Satz 1 Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha = [Q_0; Q_1, \ldots]$ eine unendliche oder abbrechende Kettenbruchentwicklung mit $Q_n \geq 2$. Dann ist

$$|\alpha q_k - p_k| > |\alpha q_{k+1} - p_{k+1}|$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Nach unserer Notation ist

$$\alpha = [Q_0; Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, Q_{k+1}, \ldots]$$

und

$$A_{k+1} = [Q_0; Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, Q_{k+1}].$$

Um α und A_{k+1} vergleichen zu können, definieren wir daher $Q'_{k+1} \in \mathbb{R}$ durch

$$Q'_{k+1} := [Q_{k+1}, Q_{k+2}, \ldots]$$

und erhalten

$$\alpha = [Q_0; Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, Q'_{k+1}] =: A'_{k+1} = -\frac{y'_{k+2}}{x'_{k+2}}.$$

Nach §7, Satz 3 (Beweis) ist die Iterationsformel für das Paar (x_{i+2}, y_{i+2}) gegeben durch

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} & y_{i+1} \\ x_{i+2} & y_{i+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Q_{i+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{bmatrix}.$$

Wenden wir diese Formel auf (x'_{i+2}, y'_{i+2}) an, so erhalten wir

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ x'_{k+2} & y'_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Q'_{k+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k & y_k \\ x_{k+1} & y_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Dabei ist die Matrix

$$M_k := \begin{bmatrix} x_k & y_k \\ x_{k+1} & y_{k+1} \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$$

mit $\det M_k = (-1)^{k+1}$ und

$$M_k^{-1} = (-1)^{k+1} \begin{bmatrix} y_{k+1} & -y_k \\ -x_{k+1} & x_k \end{bmatrix}.$$

Multiplizieren wir nun (*) von rechts mit M_k^{-1}, so erhalten wir

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ x'_{k+2} & y'_{k+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{k+1} & -y_k \\ -x_{k+1} & x_k \end{bmatrix} = (-1)^{k+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Q'_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Als Eintrag in der 2. Zeile und 2. Spalte bekommen wir

$$-x'_{k+2} y_k + y'_{k+2} x_k = -(-1)^{k+1} Q'_{k+1}$$

bzw.

$$x'_{k+2} y_k - y'_{k+2} x_k = (-1)^{k+1} Q'_{k+1},$$

der Eintrag in der 2. Zeile und 1. Spalte ist gegeben durch

$$x'_{k+2} y_{k+1} - y'_{k+2} x_{k+1} = (-1)^{k+1} \cdot 1 = (-1)^{k+1}.$$

Division dieser beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} Q'_{k+1} &= \frac{x'_{k+2} y_k - y'_{k+2} x_k}{x'_{k+2} y_{k+1} - y'_{k+2} x_{k+1}} \\ &= \frac{y_k - \frac{y'_{k+2}}{x'_{k+2}} x_k}{y_{k+1} - \frac{y'_{k+2}}{x'_{k+2}} x_{k+1}} \\ &= \frac{y_k - A'_{k+1} x_k}{y_{k+1} - A'_{k+1} x_{k+1}} \\ &= \frac{y_k - \alpha x_k}{y_{k+1} - \alpha x_{k+1}} \\ &= -\frac{\alpha q_{k-1} - p_{k-1}}{\alpha q_k - p_k}. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten:

$$|\alpha q_{k-1} - p_{k-1}| = Q'_{k+1} |\alpha q_k - p_k| > |\alpha q_k - p_k|,$$

denn

$$Q'_{k+1} = Q_{k+1} + \frac{1}{Q_{k+2} + \ldots} > 1$$

nach Voraussetzung. ||

Satz 2 Die $A_k = \frac{p_k}{q_k}$ sind für $k \geq 1$ Ultra-Approximationen an α.
Beweis. Es sei $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{u}{v} > 0$, $0 < v \leq q_k$ und $\frac{u}{v} \neq \frac{p_k}{q_k}$ gegeben. Um nun zeigen zu können, dass $|\alpha q_k - p_k| < |\alpha v - u|$ ist, benötigen wir eine Gleichung zwischen (p_k, q_k) einerseits und (u, v) andererseits. Per Definition ist

$$p_k = (-1)^{k+1} y_{k+1} \quad \text{und} \quad q_k = (-1)^k x_k.$$

Wir betrachten nun die invertierbare Matrix

$$N_k := \begin{bmatrix} -x_k & y_k \\ x_{k+1} & -y_{k+1} \end{bmatrix} = (-1)^k \begin{bmatrix} q_{k-1} & p_{k-1} \\ q_k & p_k \end{bmatrix}$$

und das $\mathbb{Z}$-lineare Gleichungssystem

$$(\#) \qquad \begin{bmatrix} s & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{k-1} & p_{k-1} \\ q_k & p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$$

mit Lösung $\begin{bmatrix} s & r \end{bmatrix}$. Mit (#) erhalten wir

$$\alpha v - u = \alpha(s q_{k-1} + r q_k) - (s p_{k-1} + r p_k) = s(\alpha q_{k-1} - p_{k-1}) + r(\alpha q_k - p_k).$$

Aus dem Beweis des vorhergehenden Satzes haben wir außerdem die Beziehung $\alpha q_{k-1} - p_{k-1} = -Q'_{k+1}(\alpha q_k - p_k)$ und erhalten damit

$$\alpha v - u = (-s Q'_{k+1} + r)(\alpha q_k - p_k) = (r - s Q'_{k+1})(\alpha q_k - p_k).$$

Weiter gilt:
(1) Es ist $s \neq 0$, denn wäre $s = 0$, so folgte $v = r q_k$ und $u = r p_k$ und damit

$$\frac{u}{v} = \frac{p_k}{q_k}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.
(2) Es ist $Q'_{k+1} > 1$ (siehe oben).
(3) Ist $r \neq 0$, so haben r und s entgegengesetzte Vorzeichen:
Angenommen, r und s wären beide negativ. Dann folgte

$$v = s q_{k-1} + r q_k < 0$$

im Widerspruch zu $v > 0$.
Angenommen, r und s wären beide positiv, so wäre

$$v = sq_{k-1} + rq_k > q_k,$$

da $r, s \in \mathbb{Z}$ sind und damit $r, s \geq 1$ gelten würde. Dies ist aber ein Widerspruch zu $v \leq q_k$.
Damit ist für alle $r \in \mathbb{Z}$

$$|-sQ'_{k+1} + r| = |s|Q'_{k+1} + |r|$$

und wir erhalten insgesamt

$$|\alpha v - u| = (|s|Q'_{k+1} + |r|)|\alpha q_k - p_k| > |\alpha q_k - p_k|. \qquad ||$$

Als kleine Anwendung wollen wir die näherungsweise Berechnung von $x = \sqrt{n^2+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ betrachten (zum Beispiel $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{50}, \ldots$: In der Schule kann man dies mittels verschiedener Verfahren machen:
a) Intervallschachtelung / probieren.
b) Heron-Verfahren.
c) Man betrachte den Ansatz $n^2 + 1 = (a+b)^2$ für $a \gg b$, zum Beispiel $a = n$. Dann ist

$$n^2 + 1 = (n+b)^2 = n^2 + 2nb + b^2$$

bzw. (da $n \gg b \gg b^2$)

$$1 \approx 2nb$$

und damit

$$b \approx \frac{1}{2n}.$$

Wir erhalten

$$x = \sqrt{n^2+1} \approx n + \frac{1}{2n}.$$

d) Ein andere Ansatz wäre etwa die Beziehung $x = \sqrt{n^2+1}$ umzuformulieren in

$$(x+n)(x-n) = 1.$$

Dies ergibt

$$x = n - \frac{1}{n+x} = n - \frac{1}{n+n-\frac{1}{n+x}} = n - \frac{1}{2n - \frac{1}{n+x}} = \ldots,$$

also eine Kettenbruchentwicklung und damit die beste Approximation für $x = \sqrt{n^2+1}$.
(Für die Schule betrachte man etwa auch: Kießwetter, *In über 3000 Jahren angewachsen [...]* aus *Der Mathematikunterricht (MU)*, HB: Z5577, Heft 3, Seite 23 - 33.)