Ulrich Schoenwaelder
Lst. D für Mathematik, RWTH

Aachen, 15. Januar 2005

Von achsensymmetrischen Figuren zu affinen Abbildungen[1]

Die Ausbildung des Abbildungsbegriffs ist eines der inhaltlichen Ziele des Mathematikunterrichts in den Sekundarstufen. Im Bereich der Geometrie kommen die Bewegungen (Kongruenzabbildungen) der Euklidischen Geometrie und die affinen Abbildungen der Affinen Geometrie in Frage. Wir zeichnen in den folgenden Kapiteln einen Weg dahin durch die verschiedenen Jahrgangsstufen nach.

- Achsensymmetrie in Klasse 5 (auf der 1. Diskursebene)
- Achsenspiegelungen in Klasse 7-8 (auf der 2. Diskursebene)
- Achsenspiegelungen in Klasse 9-10 (auf der 3. Diskursebene)
- Ausblick über affine Abbildungen in der S II, in Facharbeiten und Hochschule (auf der 3. und 4. Diskursebene)

Es handelt sich jeweils um kleine mathematische Theorien, die von realen Gegebenheiten ausgehend auf einer zunehmend expliziteren und formaleren Argumentationsbasis aufbauen [9]. Die Schwierigkeiten mit Punkt-zu-Punkt-Abbildungen der Anschauungsebene in sich beruhen darauf, dass Lernende zunächst nur Figuren abbilden (und nicht alle Punkte der Ebene) und außerdem Figuren zunächst als ganze Objekte und nicht als aus Punkten zusammengesetzte Mengen ansehen. Kann ein Dynamisches Geometriesystem (DGS) bei der Ausbildung des Abbildungsbegriffes und bei der Analyse der (Kongruenz- bzw. affinen) Abbildungen hilfreich sein?

[1] Sie werden dieses Manuskript auch unter `http://www.math.rwth-aachen.de/ ~Ulrich.Schoenwaelder/Fachdidaktik/index.html` finden.

Achsensymmetrie in Klasse 5 (auf der 1. Diskursebene)

Geometrie in Klasse 5 beinhaltet das Vertrautwerden mit geometrischen Phänomenen der visuellen Welt in der Alltagssprache (1. Diskursebene [9]) und zielt darüber hinaus auf die Einführung idealisierender Begriffe der 2. Diskursebene. Für die folgende Diskussion achsensymmetrischer Figuren und Figuren-Paare benötigen wir die folgenden Begriffe:

Idealisierender Begriff	**Reale Entsprechung**
Strecke	mit gestrafftem Seil markiert, mit Lineal gezogen Schnittkante zweier ebener Fächen
Punkt	Stelle im Raum, an der Tafel oder im Heft, Schnittpunkt zweier Linien
(begrenzte) Linie	Schnittkante zweier Flächen
Dreieck, Viereck, Fünfeck	geschlossener Streckenzug
Kreis	Form eines Rades, Tellers; mit Seil oder Zirkel markiert
Strecken sind parallel	nach Prüfung mit dem Geodreieck oder Parallelenlineal
Strecken sind zueinander senkrecht	nach Prüfung mit dem Geodreieck oder längs der Falten eines zweimal gefalteten Blattes
Strecken sind gleich lang	nach Vergleich mit einer beweglichen dritten Strecke
Figuren	werden nur durch Beispiele wie Strecke [Zweieck], Dreieck, .., Kreis, .. erläutert

Strecken und Kreise werden als ganze Objekte aufgefasst; sie sind nicht „die Menge ihrer Punkte“.

Wo tritt das Phänomen achsensymmetrischer Figuren-Paare auf, und wie kann man solche herstellen?

- Durch Falten eines Blattes Papier: a) ein Farbklecks wird auf die Gegenseite übertragen; b) ein gezeichnetes Polygon scheint durch und wird durchgepaust, erst auf die Rückseite und dann auf die Gegenseite; c) das gefaltete Papier wird von der Falte her figurenhaft mit einer Schere beschnitten [Schmetterling].
- Durch Spiegeln: a) ein flacher Gegenstand auf der Tischplatte wird durch einen fest vertikal auf der Tischplatte platzierten Spiegel „gespiegelt“; b) statt des Spiegels wird eine Glasscheibe genommen, die sowohl spiegelt als auch durchsichtig ist, so dass man das Spiegelbild von vor der Scheibe ausgelegten Plättchen hinter der Glasscheibe mit identischen Plättchen auslegen kann.
- Durch Konstruktion mit Geodreieck oder durch Freihand-Zeichnen; dies erfordert jedoch eine vorangehende *Analyse* in der Situation achsensymmetrischer Polygone (Klasse 7-8).

In welcher Beziehung stehen Figur (aus Polygonen und Kreisen) F und gespiegelte Figur F'? Mögliche Antworten sind dem Inhalt nach:

- Der am nächsten zur Achse gelegene Eckpunkt A von F und sein entsprechender Punkt A' von F' sind *gleich weit* von der Achse entfernt. D. h.: Die Verbindungsstrecke AA' trifft die Achse a senkrecht in einem Punkt M, der genau *in der Mitte* liegt [die Strecken MA und MA' sind gleich lang.

- Für jeden Eckpunkt X sind X und X' gleich weit von a entfernt.

- Einer Strecke der Figur F entspricht eine Strecke von F'. Einem Kreis in F entspricht ein Kreis von F'. Sie sind gleich lang bzw. gleich groß.

- Für alle Eckpunkte X sind die sämtlichen Verbindungsstrecken XX' zueinander parallel.

- Entsprechende Winkel sind gleich groß [falls diese Begriffe vorhanden sind].

- Für alle Punkte X der Figur sind X und X' gleich weit von a entfernt.

Es ist nicht klar, ob alle diese Eigenschaften genannt werden. Manche scheinen so selbstverständlich zu sein, dass ein Hinweis auf sie „sinnlos“ [wozu?] erscheint. Dem kann erst später mit Hilfe von Streckspiegelungen oder Schrägspiegelungen entgegengewirkt werden, nicht aber an dieser Stelle. Alle diese Eigenschaften zusammen konstituieren danach den Begriff „achsensymmetrisches Figuren-Paar“. Dass einige der Eigenschaften die anderen implizieren, kann auf dieser Klassen- und Lernstufe noch nicht thematisiert werden. Trotzdem können zur Kontrolle der Begriffsbildung Aufgaben von folgenden Typen gestellt werden:

- Bei gegebener Figur und Achse die achsensymmetrische Figur skizzieren oder konstruieren lassen.

- Bei einem achsensymmetrischen Figuren-Paar die Achse skizzieren oder konstruieren lassen.

- Die Figur die Achse überschreiten lassen.

- Eine in sich achsensymmetrische Figur betrachten lassen.

Geometrie-Software wird nicht eingesetzt.

Achsenspiegelungen in Klasse 7-8 (auf der 2. Diskursebene)

In Klasse 7 bezieht sich Geometrie immer noch auf die reale, visuelle Welt. In diesem Alter wird jedoch eine Lernstufe erreicht, auf der Wenn-dann-Aussagen Sinn bekommen und erfasst werden können (second level of thinking bei van Hiele [11]). Figuren müssen nicht mehr als Ganzheiten genommen werden, sondern können [behutsam] als „aus Punkten zusammengesetzt gedacht" werden. Infolgedessen kann angestrebt werden, einen Abbildungsbegriff als Punkt-zu-Punkt-Zuordnung zu etablieren. Schulbücher schlagen dazu Achsenspiegelungen vor. Ziele sind also jetzt

- die Hinführung zum Abbildungsbegriff;
- Abhängigkeiten zwischen den in Klasse 5 genannten Eigenschaften eines achsensymmetrischen Figuren-Paares experimentell zu erkennen.

Man versucht hier also eine erste *Formulierung* von Wenn-dann-Aussagen, deren Gültigkeit allerdings noch nicht theoretisch-logisch, sondern naturwissenschaftlich-experimentell nachgewiesen wird [eventuell auch mit einem DGS] (2. Diskursebene). Durch eine Konstruktionsvorschrift [mit DGS nachvollziehbar] für den spiegelbildlichen Punkt X' zu einem Punkt X werden gewisse Eigenschaften der Achsenspiegelung ausgezeichnet [Voraussetzung]. Andere Eigenschaften sollen experimetell hieraus folgen.

Konstruktionsvorschrift:
Gegeben sei eine Gerade [hinreichend lange Strecke] a, genannt *Achse*. Zu einem Punkt X sei der Spiegelpunkt X' durch die folgende Konstruktion festgelegt: bilde die Lotgerade von X auf a, markiere den Schnittpunkt [Lotfußpunkt] und nenne ihn X^*, und zeichne X' auf der anderen Seite von a auf der Lotgeraden so, dass der Schnittpunkt X^* genau in der Mitte [Geodreieck] von X und X' liegt.
Das kann man zunächst zeichnen und dann mit einem DGS konstruieren. Man geht dann der Frage nach, ob die anderen früher (in Klasse 5) genannten Eigenschaften zwangsläufig auch erfüllt sind.

Beispiel „Alle Strecken XX' sind zueinander parallel":
Begründung: AA' und BB' sind senkrecht auf a. *Also* sind AA' und BB' parallel. [Denn Parallelität und Orthogonalität wurden über die Markierungen auf dem Geodreieck eingeführt.] Das DGS bringt hier nicht viel: man kann zwar sowohl die Verbindungsgerade BB' als auch die Parallele durch B zu AA' zeichnen lassen; man sieht nur, dass sie zusammenfallen.

Beispiel „Streckentreue":
Es handelt sich um die **Frage**: wenn C auf der Strecke AB variiert, bewegt sich dann C' ebenfalls auf einer Strecke (auf der Strecke $A'B'$)?

Diese Frage wird für viele Schüler sinnlos sein, denn Schüler dieser Altersstufe sind noch geneigt, Strecken als ganze Objekte aufzufassen und demgemäß als Bild einer Strecke AB die *Verbindungsstrecke* $A'B'$ zu nehmen, ohne diese punktweise zu konstruieren. Bei dieser Auffassung ist das Bild einer Strecke *natürlich* eine Strecke.

Es ist also behutsam auf die Punkt-zu-Punkt-Zuordung nicht nur für die Endpunkte einer Strecke, sondern besonders für die „Zwischenpunkte" einzugehen, also für sie ebenfalls die Konstruktionsvorschrift anzuwenden. Man kann dies mit dem DGS Geonext wie folgt versuchen.

1. Man zeichnet eine Gerade a als Achse der zu betrachtenden Achsenspiegelung.

2. Man zeichnet mehrere Punkte $A, B, C, ..$ (in Geonext rot) und konstruiert jeweils den zugehörigen Spiegelpunkt (in Geonext grau) gemäß der Defininition der Achsenspiegelung [im DGS mit vertical line, intersection, arrow, parallel arrow].

3. Danach benutzt man zur Vereinfachung die eingebaute Konstruktion des Spiegelpunktes [point (reflection in a line)].

4. Schließlich kommt man zum punktweisen Bild einer Strecke. Man zeichnet dazu eine Strecke HK [line segment] (die Punkte H und K müssen nicht auf derselben Seite von a liegen), setzt auf sie einen Slider L (in Geonext gelb) als beweglichen Zwischenpunkt und produziert den Bildpunkt L' [point (reflection in a line)]. Wenn man jetzt an L zieht, bewegt sich auch L'. Aber man sieht nicht deutlich, ob sich L' auf einer Strecke bewegt.

5. Deshalb wenden wir jetzt noch die Ortslinienfunktion an, bei der für viele Positionen von L der Bildpunkt L' dauerhaft sichtbar bleibt [Objects/Special Properties/Trace, L' anklicken, an L ziehen]. Die Schüler sollten jetzt erkennen, dass die Bildpunkte L' in einer Strecke liegen.

Hierdurch wird darauf hingearbeitet, die Strecke als aus Punkten aufgebaut zu betrachten und die Spiegelung als Abbildung allein der Punkte anzunehmen: das Bild der Strecke ist *folglich* (per punktweiser Konstruktion im DGS-Experiment) eine Strecke.

Trotz unserer Bemühungen ist nicht zu erwarten, dass alle Schüler die Notwendigkeit einer Begründnung für die Streckentreue der Abbildung einsehen, weil doch *in der Realität offensichtlich Strecken auf Strecken gehen.* Dasselbe Problem ergibt sich mit dem Nachweis der Kreistreue, ist sie nicht selbstverständlich?

Einschub zur 3. Diskursebene:
Eine solche Begründung für die Streckentreue wurde eben *experimentell* mit dem DGS gegeben. Man ist vielleicht geneigt, hier schon ein *theoretisch-logisches* Argument für die Streckentreue der Abbildung zu geben, das auf expliziten Grundannahmen beruht. Warum das nicht zu empfehlen ist, lesen Sie im nächsten Kapitel „Achsenspiegelungen in Klasse 9-10 (auf der 3. Diskursebene)".

Beispiel „Kreistreue": Mit DGS erfahrbar analog zur Streckentreue.

Trotz dieser Bemühungen um punktweises Abbilden wird man es als Lehrer schwer haben mit solchen Fragestellungen nach Streckentreue und Kreistreue. Warum soll der Schüler diese Aussagen über Streckentreue und Kreistreue überhaupt ausformulieren und zur Kenntnis nehmen, wenn sie ihm doch von vorneherein selbstverständlich sind?

Es erscheint mir deshalb didaktisch sinnvoll, ja zwingend erforderlich, [in Ergänzung] Abbildungen zu studieren, die *nicht* diese selbstverständlichen Eigenschaften haben. Erst dann werden solche Eigenschaften für Achsenspiegelungen etwas Besonderes. Es bieten sich zwei Verallgemeinerungen des Begriffs der Achsenspiegelungen an:

- Schrägspiegelungen und
- (gerade) Streckspiegelungen,

danach eventuell die gemeinsame Verallgemeinerung Achsenaffinität.

Beispiel Schrägspiegelung [6]:
Bei einer Schrägspiegelung wird zusätzlich zur Achse a eine sie schneidende Gerade r als *Richtung* vorgegeben. Der Bildpunkt X' zu X liegt auf der Parallelen zu r durch X so, dass der

Schnittpunkt X^* mit a wieder genau in der Mitte von X und X' liegt. Einige der Eigenschaften verifiziert man experimentell auch für Schrägspiegelungen. Änderung gibt es bei der **Kreistreue**: das Bild eines Kreises ist eine neuartige Figur: eine **Ellipse**. Sie kann mit der Ortslinienfunktion des DGS angedeutet werden. Dieses Beispiel erschüttert die Vorstellung, dass Figuren (als Ganzheiten) auf gleichartige Figuren abgebildet werden, und fördert stattdessen die Orientierung der Argumentation an der Konstruktionsvorschrift und der Auffassung der Abbildung als Punkt-zu-Punkt-Zuordnung. Indem man die Bilder vieler Figuren per DGS zeichnen lässt, festigt sich auch die Vorstellung, dass die Abbildung für *alle* Punkte der Ebene definiert ist. Jetzt kann man auch auf die Zusatzschwierigkeit eingehen, dass nicht die eine Seite der Achse nur abgebildet wird und die andere nur Bilder von Figuren enthält, sondern beide Seiten gleichzeitig beide Rollen spielen.

Als Lehrer möchte man nicht nur vom DGS abhängig sein. Es wäre doch viel instruktiver, wenn die Schüler die Schrägspiegelbilder **selbst zeichneten**. Die Schüler werden diese Aufgabe als nervig empfinden, weil die Konstruktionsvorschrift so unpraktisch ist, nämlich mit dem Geodreieck Parallelen zu r zu zeichnen und vom Schnittpunkt aus die gleiche Entfernung zur andern Seite abzutragen. Man kann das Schülerunbehagen besänftigen, indem man das frühere Ergebnis der Strecken-/Geradentreue bei der Konstruktion benutzt und somit nachträglich einen praktischen Nutzen aus der vorigen Diskussion zieht.

Modifizierte Konstruktion von Schrägspiegelungen:
Wir konstruieren zunächst zu *einem Grundpunkt* P den Bildpunkt P' nach der ursprünglichen Konstruktion. Nun sei X ein weiterer Punkt, dessen Bildpunkt konstruiert werden soll. Wir nehmen zunächst den Fall an, dass X nicht auf der Geraden PP' liegt und PX nicht parallel zur Achse a ist. Wir schneiden die Gerade PX mit a: Punkt X^a. Dann verbinden wir X^a mit P'. [Der Bildpunkt X' muss wegen der Geradentreue auf X^aP' liegen.] Andererseits liegt X' auf der Parallelen zu r durch X. Der Schnittpunkt existiert und ist X'. In den verbleibenden Fällen für X wählen wir einen anderen Grundpunkt, dessen Bild wir wie im ersten Fall konstruiert haben.

Ohne Parallelen wird es nicht gehen [Affine Geometrie]. Auch zum Verdoppeln (Übergang von $[X, X^*]$ zu $[X^*, X']$) gibt es affine Konstruktionen, die aber hier zu langwierig wären. – Wenn der Punkt X^a nicht mehr auf dem Blatt Papier liegt, kann man einen anderen Grundpunkt Q wählen. – Man sollte die Achse auch nicht immer vertikal zeichnen; Untersuchungen [6] zeigen, dass Schüler umso größere Schwierigkeiten haben, je horizontaler die Achse gewählt wird.

Mit dieser alternativen Konstruktion haben die Schüler nebenbei theoretisches Argumentieren kennengelernt und zwar aus einem konkreten Anlass heraus, nämlich um das Zeichnen des Bildpunktes zu erleichtern. Die Argumentationsbasis für dieses Argument war von der konkreten Situation her (implizit) klar und wurde durch deutlichen Hinweis auf die vorher festgestellte Geradentreue explizit gemacht. (Ein ähnliches Vorgehen empfiehlt sich bei der Einführung der zentrischen Streckungen im Rahmen der Ähnlichkeitslehre in der Mittelstufe. Vgl. [3, §1.1].) – Mathematische Arbeitsweisen, die mit den Schlagwörtern Kreativität, Variation, Verallgemeinerung verbunden sind, lassen sich durch Übergang zu den nun folgenden Streckspiegelungen rein innermathematisch in die Diskussion bringen.

Beispiel Streckspiegelung:
Hier wird ebenfalls eine Achse a (und die zu a senkrechte Richtung r) vorgegeben, aber außerdem eine Zahl $k \neq 0$. Der Bildpunkt X' zu X liegt wieder auf der Lotgeraden X^*X. Die gerichtete Strecke X^*X (Positionspfeil mit Ursprung X^*) wird um den Faktor k verändert [vergrößert, wenn $k > 1$ ist; gespiegelt für $k = -1$; usw.].

Diese Abbildung kann wie die Schrägspiegelung untersucht werden. Sie ist wiederum geradentreu, und das Bild eines Kreises ist eine Ellipse. Die Verallgemeinerung auf Achsenaffinitäten (in Richtung r statt senkrecht zu a) ist naheliegend. Die vereinfachte Konstruktion des Bildpunktes mit Hilfe *eines* Grundpunktes funktioniert auch hier.

Unser Ziel der Einführung in den Abbildungsbegriff (und einiges mehr) scheint nun erreicht zu sein. Das Mehr liegt in der **innermathematischen Fragestellung**, die durch bloßes Verallgemeinern entstanden ist. Ist das für Schüler eine sinnvolle Tätigkeit? Wir sehen uns genötigt, für einen Großteil der Schüler eine Anbindung der neuen Abbildungen an die alltägliche Erfahrung (1. Diskursebene) zu geben.

Realisierung der Streckspiegelungen auf der 2. Diskursebene. Wir hatten ursprünglich achsensymmetrische Figuren-Paare durch Aufstellen eines Spiegels realisiert. Dazu musste der Spiegel senkrecht auf der Ebene der Figur stehen.

a) Wenn wir nun den Spiegel etwas kippen, wird die ganze Tischebene gespiegelt: ihre Bildebene erscheint im selben Winkel zum Spiegel wie die Tischebene. Ein Punkt P der Tischebene hat entsprechend ein Bild $\overline{P}$ in der Bildebene. Wir hätten aber gerne einen „Bildpunkt" in der Tischebene! Dazu denken wir uns gemäß der üblichen physikalischen Vorstellung einen Sehstrahl, der vom Spiegel auf P abgelenkt wird, aber hinter dem Spiegel verlängert in der Bildebene auf $\overline{P}$ führt: wir *denken* uns ihn weiter verlängert bis zur Tischplatte; der Auftreffpunkt sei P'. Die Punkt-zu-Punkt-Zuordnung ($P \longmapsto P'$) ist dann eine Streckspiegelung. – Leider ist diese Konstruktion nur teilweise real, weshalb wir nach einer neuen Idee suchen.

b) Jetzt ersetzen wir den Spiegel durch eine Glasplatte, auf die wir undurchsichtige Figuren geklebt haben. Mit Hilfe einer Lichtquelle (nicht zu nah aufgestellt, so dass man Lichtstrahlen als parallel annehmen kann, die senkrecht auf die Glasplatte treffen) produzieren wir Schattenbilder der Figuren auf der Tischplatte. Um sie zu konservieren, markieren wir ihre Umrisse auf einem auf der Tischplatte ausgelegten Blatt Papier. Danach legen wir die Glasplatte in Richtung auf die Lichtquelle um, wobei die Unterkante weiter an der bisherigen Standlinie anliegen soll. Nun fassen wir die markierten Schattenbilder als Bilder der umgelegten Figuren auf. Entsprechend denken wir uns eine Punkt-zu-Punkt-Abbildung. Es ist eine Streckspiegelung, bei geeigneter Einfallsrichtung der Lichtstrahlen eine Achsenspiegelung. Das kann man experimentell nachmessen.

Realisierung der Schrägspiegelungen und Achsenaffinitäten. Bei Schrägspiegelungen und ihren zu den Streckspiegelungen analogen Verallgemeinerungen zu Achsenaffinitäten ist mit Spiegeln nichts zu machen. Die wesentliche Idee bei der zweiten Realisierung von Streckspiegelungen war die Anwendung zweier Parallelprojektionen, und zwar beide in Richtungen orthogonal zur Standlinie der Glasplatte auf dem Tisch. Nun wählen wir aber die Projektionsrichtung der ersten Parallelprojektion von der Tischplatte auf die Glasplatte frei (schräg zur Standlinie) und ebenso die der zweiten Parallelprojektion von der Glasplatte auf die Tischplatte. Wenn die beiden Richtungen durch Geraden s und t gegeben sind, die sich in einem Punkt der Glasplatte treffen, dann definieren sie eine Ebene. Diese habe mit der Tischplatte die Schnittgerade r. Wir erwarten, dass die Hintereinanderausführung der beiden Parallelprojektionen eine Achsenaffinität der Tischplattenebene in Richtung r ist, deren Achse die Standlinie ist.

Achsenspiegelungen in Klasse 9-10 (auf der 3. Diskursebene)

In dieser Klassenstufe geht es nicht mehr nur um reale (physikalische) Gegebenheiten, sondern um theoretisch-logisches Schließen mit idealisierenden Begriffen und explizit gemachten Annahmen für die Argumentation (weitgehend explizite Argumentationsbasis); ich nenne das die 3. Diskursebene.

Aber Vorsicht! Diese Art Argumentation, die auf theoretischen Grundannahmen („Axiomen") beruht, stellt einen brutalen Wechsel der Argumentationsbasis dar. Bisher (auf der 2. Diskursebene) wurden Aussagen (über die reale Welt: „es ist so") experimentell bestätigt! Jetzt ist man aber dabei, theoretische Wenn-dann-Aussagen zu machen („Wenn wir .. annehmen, dann gilt aus rein logischen Gründen auch .."). [Natürlich werden die Annahmen durch die Untersuchungen der 2. Diskursebene motiviert!] Man sollte diese neue Vorgehensweise nicht unter der Hand einführen oder mit der alten vermengen [9]. Deshalb ist es auch nicht sinnvoll, den nun folgenden Beweis (!) für die Streckentreue von Achsenspiegelungen (welche Grundannahmen?) zeitgleich mit der experimentell ermittelten Streckentreue auf der 2. Diskursebene (siehe Kapitel „Achsenspiegelungen in Klasse 7-8") zu bringen.

Beweis der Streckentreue einer Achsenspiegelung:
Wir gehen von einer Strecke AB aus, die nicht parallel zu a ist, und nehmen außerdem an, dass A auf a liegt. (Das mag genügen. Eigentlich geht es uns um Geradentreue.)

Somit ist $A = A' = A^*$. (X^* bezeichnet wie früher in der Konstruktionsvorschrift den Mittelpunkt von XX' auf a.) Der Punkt C variiere auf der Strecke AB. Statt C' betrachten wir den Schnittpunkt C'' der Lotgeraden von C auf a mit der Strecke $A'B'$. [Wir wissen noch nicht, dass $C'' = C'$ ist, wollen dies erst zeigen.] Dann ist A^*B^* eine Seitenhalbierende im Dreieck BA^*B'. Sie schneidet die Parallele CC'' zur Grundlinie BB' *bekanntlich* in deren Mittelpunkt C^*. Also liegt C^* genau in der Mitte von C und C''. Aber dann ist C'' gleich C', und C' liegt auf $A'B'$: Streckentreue.

Argumentationsbasis:
Wir setzen voraus, dass eine Seitenhalbierende eines Dreiecks jede Parallele zur Grundlinie im Mittelpunkt der durch die Schnittpunkte mit den andern beiden Seiten des Dreiecks definierten Strecke schneidet. - Weitere Annahmen über Grundbegriffe der Affinen Geometrie (Punkte, Geraden, Parallelität, Inzidenz) werden nicht explizit formuliert, aber implizit benutzt.

Anmerkung:
Diese Eigenschaft der Seitenhalbierenden kann man ihrerseits auf den Strahlensatz zurückführen. Der Beweis des Strahlensatzes wiederum benutzt einen theoretischen oder anschaulichen Flächeninhaltsbegriff [und dessen Eigenschaften] und einen Längenbegriff, um die Verhältnisse bilden zu können. Man kann im Unterricht dieser Stufe natürlich nicht bis auf ein „minimales" Axiomensystem für die Affine Geometrie zurückgehen. Stattdessen ist man gezwungen, gewisse Hilfssätze als Grundannahmen vorauszusetzen [etwa obige Eigenschaft der Seitenhalbierenden]: lokales Schließen.

Bedeutung der Achsenspiegelungen für die Euklidische Geometrie:
Welche Argumentationsbasis soll man für die Behandlung der Euklidischen Geometrie wählen? Grundsätzlich gibt es ja u. a. folgende Möglichkeiten:

- via Kongruenzbegriff und Kongruenzaxiome (wie bei D. Hilbert [5]),

- via Spiegelungsbegriff und Axiome über die Spiegelungsgruppe (wie bei F. Bachmann [2]),
- via Metrik (Abstands- und Winkelmaße) und entsprechende Axiome,

wobei vielfältige Mischformen möglich sind (z. B. bei H. Schupp [10, Kap. 1]). Da man in der Schule aber keinen systematischen Aufbau der gesamten Euklidischen Geometrie anstrebt, vielmehr nur lokal schließt, kann man Elemente aus verschiedenen Theorien übernehmen und insbesondere auch den Kongruenzbegriff über den Begriff der Achsenspiegelung **einführen** (s. etwa J. Kratz [8, Kap. 5]). Die Gruppe der Kongruenzabbildungen wird ja von den Achsenspiegelungen erzeugt. Insofern ist der Begriff der Achsenspiegelung auch aus theoretischen Gründen grundlegend (und in der Oberstufe ausbaubar zum gruppentheoretischen Symmetriebegriff).

Es ist bekannt, dass sich jede Kongruenzabbildung als Produkt (Hintereinanderausführung) von höchstens drei Achsenspiegelungen schreiben lässt. Somit sind Achsenspiegelungen die **Elementarbausteine** der Kongruenzabbildungen. Das DGS lässt sich sehr schön einsetzen, um Produkte von zwei und drei Achsenspiegelungen zu untersuchen; dies ergibt eine Übersicht über (alle) Kongruenzabbildungen (etwa L. Hefendehl-Hebeker [4]):

- Achsenspiegelungen,
- Spiegelungen an zwei parallelen Geraden ergeben Translationen um den doppelten Abstand der Parallelen in dazu orthogonaler Richtung,
- Spiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden ergeben Drehungen um den Schnittpunkt um das Doppelte des eingeschlossenen Winkels,
- drei Achsenspiegelungen benötigt man für Schubspiegelungen (Produkt von Translation und Achsenspiegelung).

Auch wenn man keine Klassifikation anstrebt, ist dies ein schöner Weg, um Translationen und Drehungen einzuführen und etwa deren Geradentreue auf die der Achsenspiegelungen zurückzuführen.

Auch beim Auffinden und Veranschaulichen des Beweises dafür, dass drei Achsenspiegelungen immer ausreichen, kann das DGS hilfreich sein [4]. Das DGS dient auch in der Mittelstufe dem Entdecken von Sachverhalten und Beweisideen, dem Veranschaulichen und dem Konstruieren (als planvoller Tätigkeit), sowie mit Geonext der Konstruktionsbeschreibung (als Formulierungs- und Leseübung). Beim theoretischen Argumentieren als logischer Ausgestaltung einer Idee und Ausformulierung der Schlussfolge kann man das DGS nicht mehr gebrauchen; es würde eher von der Zielsetzung ablenken.

Ausblick über affine Abbildungen in der S II, in Facharbeiten und Hochschule (auf der 3. und 4. Diskursebene)

Wir haben im Kapitel „Achsenspiegelungen in Klasse 7-8“ Schrägspiegelungen betrachtet, um zu demonstrieren, dass Kreistreue keine universelle Eigenschaft geometrischer Abbildungen ist. In diesem Kapitel jetzt möchte ich darauf hinweisen, dass Achsenaffinitäten eine ähnliche Rolle für die Ebene Affine Geometrie spielen, wie Achsenspiegelungen für die Ebene Euklidische Geometrie. In der Tat wird die Gruppe der affinen Abbildungen der reellen Ebene von den Achsenaffinitäten erzeugt [diese erhalten Verhältnisse von Flächeninhalten]; die Schrägspiegelungen erzeugen die Untergruppe der äquiaffinen Abbildungen [diese erhalten Flächeninhalte] ([7, S. 91]).

Eigentlich ist Ebene Affine Geometrie die Theorie der **Parallelprojektionen** zwischen Ebenen in einem affinen Raum (der axiomatisch oder algebraisch als Vektorraummodell gegeben ist), so wie Ebene Projektive Geometrie die Theorie der Zentralprojektionen zwischen Ebenen eines projektiven Raumes ist. Schon im Kapitel über Achsenspiegelungen haben wir Achsenaffinitäten und insbesondere Schrägspiegelungen als Abbildungen einer Ebene E (Tischplatte) dargestellt als Hintereinanderausführung zweier Parallelprojektionen mit einer weiteren Ebene E' (Glasplatte). Das hat zur Folge, dass man Eigenschaften von Schrägspiegelungen (und Achsenaffinitäten) über Eigenschaften von Parallelprojektionen begründen kann.

Diese Sicht führt auf die folgende Definition des Begriffs **Ellipse** im Rahmen der Analytischen Affinen Geometrie (algebraisches $\mathbb{R}$-Vektorraummodell):

> Eine *Ellipse* ist eine Punktmenge, die bzgl. eines geeigneten Ursprungs und einer geeigneten Basis $\mathcal{B}$ (also eines geeigneten Parallelkoordinatensystems) die Darstellung
>
> $$\{X(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$
>
> hat.

Dann ist klar, dass bei Parallelprojektionen zwischen Ebenen Ellipsen auf Ellipsen gehen, also auch bei Achsenaffinitäten einer Ebene E.

Viele Schüler lernen den Begriff „Ellipse“ nur im Rahmen der Analytischen Euklidischen Geometrie kennen. Dort hat man noch ein positiv-definites Skalarprodukt S vorgegeben und definiert:

> Eine *Ellipse* ist eine Punktmenge, die bezgl. eines S-kartesischen Koordinatensystems eine Darstellung
>
> $$\{Y(y_1, y_2) | \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1\}$$
>
> für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ hat.

Dass beide Definitionen dasselbe liefern, folgt aus dem Spektralsatz der Linearen Algebra, wonach es zu S und der symmetrischen Bilinearform T, die $\mathcal{B}$ als Orthonormalbasis hat, eine Basis $\mathcal{C}$ gibt, die gleichzeitig Ortho*normal*basis für S und Orthogonalbasis für T ist.

Wie schon angeklungen, lässt sich in Facharbeiten und Hochschule die Projektive Geometrie ähnlich behandeln wie die Affine Geometrie. Eine Verallgemeinerung der Euklidischen Geometrie erhält man, wenn man das positiv-definite Skalarprodukt S durch ein nicht-ausgeartetes, indefinites ersetzt [9]: wie sehen hier die Achsenspiegelungen aus und welche Gruppe erzeugen sie?

Literatur

[1] B. Artmann. Die affine Gruppe der Ebene. *Der Mathematikunterricht*, 23(6):14–32, 1977. HB: Z5577.

[2] F. Bachmann. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 96. Springer–Verlag, 1959, ²1973. MB: 1488, 7627.

[3] Lisa Hefendehl-Hebeker. Aspekte eines didaktisch sensiblen Mathematikverständnisses. *Mathematische Semesterberichte*, 45:189–206, 1998. HB (ZNT): Z1538.

[4] Lisa Hefendehl-Hebeker. *Figuren und Abbildungen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I.* Augsburger Mathematisch-Naturwissenschaftliche Schriften 41. Augsburg: Wißner-Verlag, 1999. ISBN 3-89639-212-3. 10,20 EUR (2004).

[5] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie, mit Supplementen von Prof. Dr. P. Bernays.* B. G. Teubner, ^{13}1987. HB: BD100+8, BD100+9, BD100+11, BD100+12 LB.

[6] Reinhard Hölzl. *Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software.* Augsburger Mathematisch-Naturwissenschaftliche Schriften 32. Augsburg: Wißner-Verlag, 1999. ISBN 3-89639-204-2. Habilitationsschrift Augsburg, 1999.

[7] B. Klotzek. Ebene äquiaffine Spiegelungsgeometrie. *Math. Nachr.*, 55:89–131, 1973. MB: Z 8. Aufbau der affinen Gruppe durch Schrägspiegelungen. Hinweis in [1, S. 31].

[8] J. Kratz. *Zentrale Themen des Geometrieunterrichts aus didaktischer Sicht.* Bsv-Mathematik. München: Bayerischer Schulbuch-Verlag, 1993. HB: Kb7786. ISBN 3-7627-3708-8. S. 49–69: 4. Symmetrie und Spiegelung. S. 70–79: 5. Die Kongruenz und ihre Abbildungen.

[9] Ulrich Schoenwaelder. Die fünf Diskursebenen: vom inhaltlichen zum formalen mathematischen Denken und zurück. *Mathematische Semesterberichte*, erscheint, 2005. HB (ZNT): Z1538. Diese Originalpublikation wird unter `http://www.springerlink.com` verfügbar sein. Das Manuskript (4. Nov. 2004) werden Sie unter `http://www.math.rwth-aachen.de/~Ulrich.Schoenwaelder/Fachdidaktik/index.html` finden.

[10] H. Schupp. *Figuren und Abbildungen.* Studium und Lehre: Mathematik. Hildesheim: div-Verlag Frankzbecker, 1998. ISBN 3-88120-288-9. HBZ.

[11] Pierre M. van Hiele. *Structure and Insight: a Theory of Mathematics Education.* Developmental psychology series. Orlando [u.a.]: Acad. Pr., 1986. ISBN 0-12-714160-X. 0-12-714161-8. HBZ.