File: Skripte/Allein/alleinrahmen.tex

Aachen, 4. Nov. 2004

Die fünf Diskursebenen:

vom inhaltlichen zum formalen mathematischen Denken und zurück

(Teil A)

Hier: Nur Teil A. Die fünf Diskursebenen. Es fehlen die Teile

B. Grundbegriffe der vektoriellen ebenen Geometrie

C. Der Satz des Pythagoras

D. Der Höhenschnittpunktsatz

Kurztitel: Die fünf Diskursebenen

Verfasser: Prof. Dr. ULRICH SCHOENWAELDER, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule

Aachen, Lehrstuhl D für Mathematik, Templergraben 55, 52062 Aachen

E-mail: uschoenw@math.rwth-aachen.de

Zusammenfassung: Warum wird "die Mathematik" in der Schule oft nicht verstanden? Wer-

den beim Übergang von realen Erfahrungen zur Theorie die Schritte im Prozess der Modellbildung

nicht bewusst genug gemacht und deren Sinn nicht explizit reflektiert? Kann oder muss man wis-

senschaftliches Vorgehen in der Schule verdeutlichen?

1

Auf dem Weg vom Beschreiben physischer Gegebenheiten zu einer axiomatisch fundierten mathematischen Theorie kann man vier inhaltliche Argumentationsebenen unterscheiden; daneben tritt in der Mathematik interpretationsfreies Manipulieren von Symbolen. Diese Diskursebenen werden an Beispielen aus der Geometrie (Satz des Pythagoras und Höhenschnittpunktsatz) erläutert. Ein Wechsel der Argumentationsbasis sollte vom Lehrer in Schule und Hochschule bewusst vollzogen werden.

Mathematik ist für strenges Begründen bekannt. Aber was ist die jeweilige Argumentationsbasis im Mathematikunterricht? In §1 stelle ich dazu vier inhaltliche Diskursebenen und eine syntaktische vor und erläutere diese in §2 allgemein am Beispiel der (ebenen) Schulgeometrie. Dann schließen sich konkrete Beispiele aus der vektoriellen ("analytischen") Geometrie an: Flächeninhalt von Parallelogrammen (§5), Orthogonalität und Quadrate (§6), Satz des Pythagoras (§7 – §9), Höhenschnittpunktsatz (§10 – §16). Dabei wird besonders beim Übergang zur syntaktischen Diskursebene bewusst gemacht, welche Rechenregeln die Rechnung erlauben. Dies ermöglicht es dann umgekehrt, das Rechenergebnis und eventuell auch formale Zwischenergebnisse inhaltlich anders zu interpretieren als zunächst vorgestellt. Möglicherweise kann durch solche Neuinterpretation einer formalen Rechnung auch der Übergang zur axiomatischen Vorgehensweise des 20. Jahrhunderts in der Hochschule und Schule erleichtert werden.

## A. Die fünf Diskursebenen

1. Beschreibung der fünf Ebenen des Diskurses. Der Mensch macht sich so seine Theorien von den Dingen. Oft ist es eine mathematische Theorie. Das fängt an beim Begriff der Zahl, verschiedenen Zahlbereichen, geht über die Idealisierung im Begriff der reellen Zahlen bis zum algebraischen Körperbegriff; oder es geht im Bereich der Geometrie von Stellen und gespannten Seilen im Raum über die Idealisierung zu Punkten und Geraden zu (synthetischen oder analytischen) geometrischen Theorien. Man kann im Laufe der mathematischen Theorienbildung die folgenden inhaltlichen und syntaktischen [3, S. 33] Typen von Theorien (Diskursebenen) nach der

Art ihrer Argumentationsbasis unterscheiden. Dabei trenne ich mehr inhaltsbezogene Theorien (semantischer Aspekt) von interpretationsfreien Kalkülen (syntaktischer Aspekt).

## Semantischer Aspekt:

- Erste Diskursebene: Ebene einer realen Ausgangssituation in der Sprache des Alltags oder des Sachgebietes.
- 2. Zweite Diskursebene: Propädeutische Ebene mit abstrakten Begriffen zu realen Situationen und mit rein inhaltlicher Argumentation.
- 3. Dritte Diskursebene: Ebene des lokalen Schließens mit abstrakten Begriffen zu realen Situationen, aber mit vorwiegend expliziten, aber auch impliziten Regeln für deren Gebrauch.
- 4. Vierte Diskursebene: Axiomatische Ebene mit (mehreren) Beispielen auf der dritten Ebene.

  Syntaktischer Aspekt:
  - S. Syntaktische Ebene: Ebene der interpretationsfreien, regelhaften Manipulation von Zeichenketten (Termumformungen, Kalkülen, Termersetzungssystemen).

Die vier inhaltlichen Diskursebenen treten häufig bei der Entwicklung eines einzigen Sachgebietes (etwa der Geometrie oder der Arithmetik/Algebra) auf. Für die (voraxiomatische) Geometrie nimmt Heinz Griesel [7] eine ähnliche Einteilung vor. Auch bei Günter Ewald [2] werden Stufen der Argumentation in der Geometrie unterschieden, die sehr gut meiner Einteilung entsprechen. "Die intuitiv-geometrische Methode muß im Geometrieunterricht ihren festen Platz behalten oder wiedergewinnen" [2, 1. These]; dies entspricht meiner 2. Diskursebene. "In allen Schulstufen sollte das Verfahren der relativen Exaktheit deutlich werden: Dieses besteht darin, beim Beweis eines mathematischen, insbesondere geometrischen Satzes genau die verwendeten Voraussetzungen herauszuarbeiten, gleichgültig, ob diese schon vorher bewiesene Sätze oder durch Beobachtung nahegelegte Annahmen sind" [2, 3. These]; dies entspricht meiner 3. Diskursebene. "Die explizite Einführung von Axiomen sollte erst in der Oberstufe geschehen, und zwar dort, wo auch Probleme

der Logik, insbesondere der Widerspruchsfreiheit von Axiomen, diskutiert werden können" [2, 2. These]; dies entspricht meiner 4. Diskursebene.

Bezüglich der syntaktischen Diskursebene findet man bei Ewald [2, §7] einen Hinweis auf René Thom: "Hinsichtlich der Exaktheit trifft er die folgende bemerkenswerte Feststellung: "... Man gelangt zu absoluter Strenge nur durch das Ausklammern von Bedeutung.'... Thom hebt den Bedeutungswert hervor, den eine anschauliche Figur gegenüber den algebraischen Objekten besitzt; letztere nennt er "semantisch arm"." Teile der Sprache der Theorien der zweiten bis vierten Diskursebene können so weit durch Zeichenketten (Formeln) symbolisiert und mit Regeln zu deren Manipulation versehen sein, dass man von der Bedeutung der Symbole absehen kann [12]. Diese Situation der rein syntaktischen Argumentation liegt beim numerischen Rechnen und beim algebraischen symbolischen Rechnen vor, wie es schon immer beim Einmaleins und bei Termumformungen und heutzutage auf Taschenrechnern mit numerischen und symbolischen Funktionen (Computeralgebrasystemem) üblich ist. Bei jedem Computereinsatz wird ein solcher Kalkül benutzt. Die Symbole können danach (auf einer inhaltlichen Diskursebene) wie intendiert oder auch anders interpretiert werden. "Die Trennung und Verselbständigung des Formalen ist eine charakteristische Methode der Mathematik und eine ihrer Stärken" [3, S. 47]. Die syntaktische Diskursebene kann von der zweiten, dritten und vierten inhaltlichen Diskursebene aus erreicht werden.

In den folgenden Beispielen werde ich den Wechsel zwischen Diskursebenen hervorheben. Es geht mir darum, besonders im Rahmen der Mathematiklehrerausbildung schlagwortartig bewusst zu machen, dass der Argumentation auf den verschiedenen Ebenen (desselben Sachgebietes) unterschiedliche Annahmen zugrunde liegen. Z. B. lässt sich die Formel (-2) \* (-3) = 6 durch Regelmäßigkeiten in drei Quadranten der Multiplikationstafel für Paare ganzer Zahlen motivieren und durch das Permanenzprinzip für Rechenregeln (Axiome) auf der vierten Diskursebene begründen, aber nicht auf der zweiten Diskursebene gegenständlich realisieren.

Für den Lernenden kommen neben diesen Wechseln andere Schwierigkeiten hinzu. Welche Stufen in der *Entwicklung* des mathematisch-logischen Denkens von Lernenden durchlaufen werden müssen, ist eine weitergehende kognitionspsychologische Frage. Zu diesem "development of the

levels of thinking" (Niveaus der Einsicht in [4]) hat Pierre M. van Hiele einen grundlegenden Beitrag geleistet [15, insbes. S. 173] und am Beispiel der *Geometrie* verschiedene Phasen während der Periode vor Erreichen des nächsthöheren Levels, einer Metatheorie des vorherigen Niveaus, ausgemacht. Hans Freudenthal [5, S. 220 und S. 278] setzt fünf Phasen bei der Entwicklung des *Zahlbegriffs* zu fünf Stufen im Lernprozess in Beziehung. Weitere Hinweise auf Lernstufen findet man in [5, S. 116 ff], [17, S. 7], [16, S. 75], [9], [13, S. 77-78].

Ich sehe mich hier nicht in der Lage, unterrichtliche Vorschläge zu den folgenden geometrischen Beispielen für Diskursebenen zu machen. Auch eignet sich der dargestellte Stoff an manchen Stellen eher für Veranstaltungen der Mathematiklehrerausbildung als für Schüler; aber dort kann er demonstrieren, wie das Streben des Mathematikers nach größtmöglicher Allgemeinheit auf dem Weg über die syntaktische Ebene selbst bei klassischen Themen wie dem Satz des Pythagoras und dem Höhenschnittpunktsatz zu eventuell neuen Ergebnissen führen kann.

2. Die fünf Diskursebenen am Beispiel geometrischer Theorien. Theoriebildung (und insbesondere Modellbildung) kann von Objekten und Erfahrungen ausgehen, die in der Alltagssprache beschrieben werden, etwa Stellen im uns umgebenden Raum; gespannte Seile, gerade Kanten und Lichtstrahlen weisen Gemeinsamkeiten auf. Dies ist die erste Ebene des Diskurses. Idealisierung dieser Begriffe zu "Punkt", "Gerade", "parallelen" Geraden, Punkten "auf" einer Geraden und die Beschreibung gewisser Beziehungen zwischen den idealisierten Objekten führt zu einer Theorie der zweiten Diskursebene. Ihre Aussagen werden intuitiv erfasst und eventuell durch Hinweis auf die "Theorie" der ersten Diskursebene begründet. Erst auf der dritten Ebene des Diskurses werden solche Beziehungen ausformuliert, also (zunächst nur teilweise) explizit gemacht. Man sammelt Aussagen über den "Anschauungsraum". Und man fängt an, mit ihnen lokal zu argumentieren (lokales Ordnen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I): welche logischen Abhängigkeiten bestehen zwischen den Begriffen und Sachverhalten? Dabei bleibt aber immer die inhaltliche Bindung der Begriffe an die erste Diskursebene gewahrt: es geht weiterhin um Stellen im Raum oder auf dem Blatt Papier. Wir befinden uns hier auf der Diskursebene der Elemente des Euklid [8],

auch wenn er die Geometrie globaler aufbaut, als es in der Sekundarstufe I der Schule noch möglich ist (für ein System von expliziten (und impliziten) Grundsätzen für die ebene Geometrie siehe z. B. [6]). (Vgl. auch [1, S. 108, 111].)

Nach dieser synthetischen teil-axiomatischen Behandlung der Geometrie wird in der Sekundarstufe II im Rahmen der Analytischen Geometrie eine neue Beschreibung des Anschauungsraumes auf der dritten Diskursebene vorgenommen, indem die Punkte durch Positionspfeile bzgl. eines festen Ursprungspunktes ersetzt werden: man ändert die Grundbegriffe von Punkt zu Positionspfeil, von Gerade zur vektoriellen Beschreibung von Geraden durch Positionspfeile (noch ohne Koordinaten). Die Addition von Positionspfeilen geschieht über die Parallelogrammkonstruktion<sup>1</sup>; die Multiplikation und Division von Positionspfeilen mit rationalen Zahlen geschieht über die Strahlensatz-Konstruktion<sup>2</sup>. Dass verschiedene ganze Zahlen zu verschiedenen Vielfachen eines Positionspfeils führen, ist eine Eigenschaft des Anschauungsraumes, die erst hier bewusst wird, aber in der Schule nicht expliziert wird. Beim Übergang zu reellen Vielfachen braucht man Eigenschaften der reellen Zahlen explizit. Mit den bisher explizit gemachten Eigenschaften der Begriffe des Anschauungsraumes kann man für die Positionspfeile die Rechenregeln eines  $\mathbb{Q}$ - bzw.  $\mathbb{R}$ -Vektorraums nachweisen. Man hat hier zwar die Regeln eines Vektorraums, aber noch nicht den axiomatischen Begriff des Vektorraums der vierten Diskursebene. Vielmehr bleibt man auf der dritten Diskursebene. Deshalb rede ich auch von Positionspfeilen und nicht von (Orts-)Vektoren als Elementen eines Vektorraums (Theorie der vierten Diskursebene).

Da diese Regeln für Positionspfeile formal mit denen für Zahlbereiche übereinstimmen, kann man ohne Schwierigkeiten händige Termumformungen durchführen oder ein Computeralgebrasystem benutzen, um mit Positionspfeilen zu rechnen. Solche Rechnungen finden auf der syntaktischen Ebene statt. Das Standardbeispiel ist der Nachweis, dass sich die Seitenhalbierenden eines räumlichen Dreiecks [A, B, C] mit den Positionspfeilen a, b, c in dem Punkt S mit dem Positionspfeilen S

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Im Falle von mit dem Ursprung kollinearen Punkten braucht man eine Hilfsgerade mit Hilfspunkt und zum Beweis der Unabhängigkeit der Summe hiervon den kleinen affinen "Satz" von Desargues.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Hier braucht man den großen "Satz" von Desargues.

pfeil  $s:=\frac{1}{3}(a+b+c)$  schneiden, dem arithmetischen Mittel der gegebenen Positionspfeile. Dieser Pfeil lässt sich ja in der Form  $a+\lambda(\frac{1}{2}(b+c)-a)$  für ein  $\lambda\in\mathbb{Q}$  und analog für b und c darstellen. Bei der Termumformung

$$a + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(b+c) - a) = \frac{1}{3}(a+b+c)$$

können wir getrost vergessen, dass a, b, c Positionspfeile bezeichnen; jeder Schüler und jedes Computeralgebra-System führt die Rechnung aus, ohne an Pfeile zu denken; und diesen syntaktischen Aspekt kann man auch mit Leistungskurs-Schülern diskutieren. Im Gegensatz zur vierten axiomatischen Ebene, die in der Oberstufe des Gymnasiums zwar angestrebt, aber vorher kaum erreichbar ist, tritt die syntaktische Ebene im Unterricht regelmäßig in Erscheinung. Sie sollte hier aber nicht nur zur Lösung eines aktuellen Problems benutzt werden; sie bietet vielmehr durch verschiedene Interpretationen der selben Formel die Möglichkeit, die Kraft mathematischer Abstraktionen zu demonstrieren.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist die binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Auf der Mittelstufe wird sie durch Zahlen a und b und deren Rechenoperationen interpretiert sowie durch Flächeninhalte bei der Zerlegung eines Quadrates mit Seiten*länge* a+b [3, S. 39]. Im Rahmen der Analytischen Geometrie der Sekundarstufe II können a und b auch Positionspfeile bedeuten (§3), und das Produkt wird als ein (positiv definites oder indefinites) Skalarprodukt interpretiert. Die Skalarprodukte können in der Anschauungsebene als orientierte Flächeninhalte gedeutet werden; dies werde ich in §4 ausführen. Je nach Produkt (Wahl einer Basis, die als Orthonormalbasis interpretiert wird: §5) liefert dies physikalisch unterschiedliche Versionen des Satzes von Pythagoras (im Fall  $a \cdot b = 0$ ) (§6) und seiner Verallgemeinerung auf beliebige Dreiecke (§7).

Wie steht es nun in der Analytischen Geometrie mit der vierten axiomatischen Diskursebene? Sicher wird man in der Schule die Positionspfeile auch als Linearkombinationen einer Basis aus Positionspfeilen darstellen und so eine Bijektion zwischen Positionspfeilen und ihren Komponentenspalten [Spaltenmatrizen über  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$ ] herstellen und erkennen, dass man mit den Spalten genau so rechnet wie mit den zugehörigen Positionspfeilen. Hier scheint die abstrakte Vektorraumtheorie der vierten Diskursebene auf.

In Umkehrung der bisherigen Diskussion werden im fertigen Aufbau an der Universität affine Räume (im Sinne der Analytischen Geometrie) mit Hilfe eines Rechtsvektorraums über einem beliebigen Schiefkörper axiomatisch eingeführt. Das Ziel ist es jetzt nicht mehr nur, theoretische Ergebnisse über den Anschauungsraum abzuleiten, sondern einen Überblick über die Gesamtheit aller denkbaren "affinen Räume" [beliebiger Dimension über beliebigen Schiefkörpern] zu bekommen und dies auch in nichtgeometrischen Situationen zu interpretieren. Analog hierzu studiert man im synthetischen Zugang [auf der vierten Diskursebene] axiomatisch definierte euklidische und nicht-euklidische Räume, eine Vorgehensweise, die erst im 19. Jahrhundert die Beantwortung uralter Fragen [der dritten Diskursebene] über das euklidische Parallelenaxiom ermöglichte [14].

3. Die Bedeutung der Unterscheidung von Diskursebenen. Natürlich muss man bei jedem Prozess von Mathematisierung eines lebensweltlichen Bereiches auf der ersten Diskursebene beginnen und über Idealisierung oder Abstraktion zur zweiten Ebene übergehen. Vermutlich bleiben viele Schüler auf dieser Stufe des Unterrichts in Mathematik und Mathematik benutzenden Fächern stehen; das hypothetische lokale Argumentieren mit an der Realität überprüften Regeln [Annahmen] über die [idealisierten] Objekte des Diskurses der dritten Ebene fällt schon vielen Schülern schwer, besonders wenn diese Vorgehensweise von ihrer Zielsetzung [des logischen lokalen Ordnens] her nicht klar wird. Wenn die Schule zum Sichbilden als geistiger Verarbeitung der Erfahrung [11, S. 59] anregen soll, dann kann dies bezüglich der mathematischen Methode gerade durch ein Bewusstmachen des Standortwechsels [10, S. 193] zur dritten oder zur syntaktischen, schließlich auch zur vierten Diskursebene geschehen.

In der Lehrerausbildung für die Sekundarstufe II ist die vierte Diskursebene unverzichtbar. Studierenden wird der schwierige Übergang von der dritten zur vierten Diskursebene im ersten Semester sehr deutlich. Aber auch der Übergang in der umgekehrten Richtung zu den Diskursebenen

der Schule sollte ihnen bewusst sein. Hochschullehrer können dies schon mit ersten Semestern reflektieren, die Lineare Algebra bietet sich hierfür an. Auch eine bewusste Trennung der inhaltlichen Diskursebenen 1 bis 4 (zwecks Begriffsbildung) von der syntaktischen Diskursebene (zum Zweck von Rechnungen) würde manche Darstellung der Linearen Algebra und der Analytischen Geometrie und ihrer Anwendungen durchsichtiger machen.

Wozu lernen wir Mathematik? Wozu lehren wir Mathematik?

Mathematikunterricht sollte erlebbar machen, wie mathematische Wissensbildung geschieht, schreibt Lisa Hefendehl-Hebeker [9, S. 79, 92] und gibt dafür einen didaktischen Grund, einen methodischen, einen bildungspolitischen, einen wissenschaftssoziologischen und einen humanitären Grund an. Diese Fragen über das Verhältnis Mensch – Mathematik kann nun jeder Schüler und jeder Lehrer in der Diskussion über die Inhalte für sich beantworten [3, S. 31–32]; darin liegt das Sichbilden durch Mathematik [11, S. 39]. Die Auseinandersetzungen der Einzelnen mit Inhalten und Methoden der Mathematik (im Unterricht) bestimmen letztendlich das Bild von Mathematik in der Gesellschaft.

[Die Abschnitte

- B. Grundbegriffe der vektoriellen ebenen Geometrie
- C. Der Satz des Pythagoras
- D. Der Höhenschnittpunktsatz

sind hier weggelassen.]

## Literatur

[1] R. Baer. Hegel und die Mathematik. In B. Wigersma, editor, Verhandlungen des 2. Hegel-kongresses (18. - 21. Oktober 1931 in Berlin), Veröffentlichungen des Internationalen Hegelbundes, Hegelkongress 1, S. 104–120. Tübingen: Mohr, 1932.

- [2] G. Ewald. Das Problem des Exakten in der Geometrie. Math. Naturw. Unterricht (MNU), 30(8):449–453, 1977. ISSN 0025-586.
- [3] R. Fischer und G. Malle (unter Mitarbeit von H. Bürger). Mensch und Mathematik Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik 1. Zürich, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1985, 1989. ISBN 3-86025-475-8, 3-411-03117-4.
- [4] H. Freudenthal. Logik als Gegenstand und als Methode. Der Mathematikunterricht, 13(5):7–22, 1967. ISSN 0025-5807.
- [5] H. Freudenthal. Mathematik als p\u00e4dagogische Aufgabe, Band 1. Klett-Studienb\u00fccher Mathematik. Stuttgart: Klett, 1973.
- [6] K. Fritsche. Was ist Euklidische Geometrie? In Jürgen Blankenagel and Wolfgang Spiegel, editors, Mathematikdidaktik aus Begeisterung für die Mathematik. Festschrift für Harald Scheid, pages 54–72. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 2000. ISBN 3-12-983380-3.
- [7] H. Griesel. Lokales Ordnen und Aufstellen einer Ausgangsbasis, ein Weg zur Behandlung der Geometrie der Unter- und Mittelstufe. Der Mathematikunterricht, 9(4):55–65, 1963. ISSN 0025-5807.
- [8] T. L. Heath, Hrsg. The Thirteen Books of Euclid's Elements (in 3 Volumes). Dover Reprint Series. Dover, 1956.
- [9] L. Hefendehl-Hebeker. Geometrie-Unterricht als Chance für die Mathematik. Mathematica Didactica. Zeitschrift für Didaktik der Mathematik, 20(2):79–93, 1997. ISSN 0170-1541. Review: Mathematics Didactics Database at http://www.emis.de/.

- [10] L. Hefendehl-Hebeker. Aspekte eines didaktisch sensiblen Mathematikverständnisses. Math. Semesterber., 45:189–206, 1998. ISSN 0340-4897.
- [11] H. von Hentig. Bildung ein Essay. Darmstadt: Wiss. Buchges. (Lizenzausgabe), 1997. Nach der Ausgabe München: Hanser, 1996; ISBN 3-446-18751-0.
- [12] S. Krämer. Symbolische Maschinen: die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriß. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft, 1988. ISBN 3-534-03207-1.
- [13] K. Lengnink und W. Peschek. Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung. In Katja Lengnink, Susanne Prediger und Frankziska Siebel, editor, Mathematik und Mensch: Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik, Darmstädter Schriften zur Allgemeinen Wissenschaft, Bd. 2, pages 65–82. Mühltal: Verl. Allg. Wiss. HRW e. K., 2001. ISBN 3-935924-01-1.
- [14] R. J. Trudeau. Die geometrische Revolution. Basel: Birkhäuser, 1998. ISBN 3-7643-5914-5.
- [15] Pierre M. van Hiele. Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education. Developmental Psychology Series. Orlando et al.: Acad. Press, 1986. ISBN 0-12-714161-8.
- [16] H. Winter. Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Didaktik der Mathematik. Braunschweig: Vieweg, 1989. ISBN 3-528-08978-4.
- [17] E. Wittmann. Themenkreismethode und lokales Ordnen. Der Mathematikunterricht, 20(1):5– 18, 1974. ISSN 0025-5807.