

Von Achsenspiegelungen zu Achsenaffinitäten

Klassenstufe: 7 - 8 und 9 - 10.

Ziele:

- Hinführung zum punktweisen Abbilden.
- Eine neue Konstruktionsvorschrift für Achsenspiegelungen und ihre Begründung.
- Verallgemeinern von Achsenspiegelung zu
 - Dehnung/Stauchung einerseits,
 - Schrägspiegelung andererseits,
 - Achsenaffinität als gemeinsamem Oberbegriff.
- Erkennen von Eigenschaften dieser Abbildungen.
- Ellipse mit Hauptachsen

In Klasse 7 bezieht sich Geometrie immer noch auf die reale, visuelle Welt. In diesem Alter wird jedoch eine Lernstufe erreicht, auf der Wenn-dann-Aussagen Sinn bekommen und erfasst werden können (second level of thinking bei van Hiele [7]). Figuren müssen nicht mehr als Ganzheiten genommen werden, sondern können [behutsam] als „aus Punkten zusammengesetzt gedacht“ werden. Infolgedessen kann angestrebt werden, einen Abbildungsbegriff als Punkt-zu-Punkt-Zuordnung zu etablieren. Schulbücher schlagen dazu Achsenspiegelungen vor. Ziele sind also jetzt

- die Hinführung zum Abbildungsbegriff;
- Abhängigkeiten zwischen den in Klasse 5 genannten Eigenschaften eines achsensymmetrischen Figuren-Paares experimentell zu erkennen.

Man versucht hier also eine erste *Formulierung* von Wenn-dann-Aussagen, deren Gültigkeit allerdings noch nicht theoretisch-logisch, sondern naturwissenschaftlich-experimentell nachgewiesen wird [eventuell auch mit einem DGS] (2. Diskursebene [4]). Durch eine Konstruktionsvorschrift [mit DGS nachvollziehbar] für den spiegelbildlichen Punkt X' zu einem Punkt X werden gewisse Eigenschaften der Achsenspiegelung ausgezeichnet [Voraussetzung]. Andere Eigenschaften sollen experimentell hieraus folgen.

Trotzdem füge ich für später (Klassenstufe 9) schon theoretische Rückführungen auf andere geometrische Aussagen in diesen Text ein (3. Diskursebene).

I. Achsenspiegelungen

E Experiment Wir gehen von Faltvorgängen aus, um die definierende Eigenschaft einer Achsenspiegelung zu erarbeiten. Indem man ein gefaltetes Blatt Papier mit einem Milchdosenöffner oder einer Sicherheitsnadel durchsticht, mit einem Locher durchlocht oder mit einer Schere einschneidet, erhält man nach Aufklappen sich entsprechende Punkte, Löcher, Schlitzte.

D1 Definition (2. Diskursebene) Gegeben sei eine Papierebene (Tafelebene) mit einer Geraden, die wir Achse a nennen. Zwei Punkte A, A' liegen *symmetrisch zur Achse a* , wenn

- sie auf verschiedenen Seiten von a liegen,
- ihre Verbindungsstrecke $[A, A']$ senkrecht auf a steht und
- der Schnittpunkt $A^* = a \cap AA'$ der Mittelpunkt von $[A, A']$ ist.

K Konstruktion Zeichne auf dem Papier und konstruiere mit GEONExT [1] zu gegebenen Punkten $A_1, A_2, \dots$ (auf beiden Seiten von a) die Spiegelpunkte $A'_1, A'_2, \dots$. Ziehen.

F Frage Was ist der Spiegelpunkt eines Punktes B auf a ?

D2 Wir definieren: Ein solcher Punkt liegt zu sich selbst symmetrisch: $B' = B$.

Damit ist *jedem* Punkt A der Ebene sein Spiegelpunkt A' zugeordnet. Die Konstruktionsvorschrift ergibt sich aus D1 und D2.

G Geonext-Hinweis Wenn die Achse a und ein Punkt A gegeben sind, erhält man den Spiegelpunkt A' so:

- Von A auf a das Lot fällen, Fußpunkt A^* .
- Auf $[A, A^*]$ einen Pfeil legen.
- Einen „parallelen“ Pfeil von A^* aus abtragen. Endpunkt A' .

Man kann an A ziehen. Für den Spiegelpunkt gibt es auch einen eingebauten Befehl.

F Wie werden die Punkte einer Geraden abgebildet?

E Wir schneiden mit der Schere am gefalteten Papier ein Stück (bis zur Achse) ab: zwei Geraden entsprechen sich.

K Wir wollen dies mit Geonext simulieren. Die Gerade g treffe a in B , auf g sei A ein weiterer Punkt. Konstruiere A' . Nun wähle einen weiteren Punkt C auf g (in Geonext als Gleiter). Liegt C' auf $A'B$? An C ziehen. Eventuell Ortslinienfunktion benutzen; dazu mit Objects - Special Properties - Trace die Ortslinienfunktion am linken Rand verfügbar machen, dieses Ikon und den Ziehen-Pfeil anklicken, am Gleiter ziehen. (Man kann die Ortslinie mit Edit - Clear Trace wieder löschen.)

F Kann man dies auch allein mit D1 und D2 ohne physikalisches Experiment begründen? (3. Diskursebene)

A Antwort Wähle C zunächst als Mittelpunkt von $[A, B]$. Statt C' betrachten wir den Mittelpunkt $C^\#$ von $[A', B]$. Ist $C^\# = C'$? Kann man das begründen?

Wir müssen dazu überprüfen, ob $C^\#$ begründbar die Eigenschaften erfüllt, die wir von C' in D1 gefordert haben.

- C und $C^\#$ liegen auf verschiedenen Seiten von a .
- $CC^\#$ ist nach Definition im Dreieck $[A, B, A']$ die Mittellinie zur Grundseite AA' . Sie ist bekanntlich (!) parallel zu AA' , also (!) wie diese senkrecht auf a . [An den Stellen „(!)“ haben wir auf „bekannte“ Aussagen zurückgegriffen.]
- A^* sei wie oben der Punkt $a \wedge AA'$. Dann ist $a = A^*B$ die Seitenhalbierende des Dreiecks $[A, B, A']$. Diese trifft die zu $[A, A']$ parallele Strecke $[C, C^\#]$ bekanntlich (!) in der Mitte.
(Eine theoretische Begründung der benutzten Dreieckseigenschaft setzt eine affine Definition des Mittelpunktsbegriffes voraus, etwa als Schnittpunkt mit der anderen Diagonalen eines umgebenden Parallelogramms. Die ist aber hier nicht gegeben.)

Damit ist $C^\# = C'$.

F Geht auch der Mittelpunkt von $[A, C]$ bei der Achsenspiegelung auf den Mittelpunkt von $[A', C']$?

A Ja mit analoger Begründung.

K Bilde weitere iterierte Mittelpunkte und deren Bilder.

A Wir kommen zu dem Schluss, dass „alle“ Punkte von $g = AB$ auf Punkte der Geraden $A'B$ abgebildet werden. Das gilt auch für Geraden, die parallel zu a liegen. (**Geradentreue der Achsenspiegelung**)

F Nutzen der Geradentreue?

A Neue Konstruktionsmöglichkeit für den Bildpunkt P' eines Punktes P , wenn das Bild A' eines Punktes A schon vorhanden ist. A liege nicht auf a .

K Unterscheide die zwei Fälle:

- Die Gerade PA schneidet a in einem Punkt B .
- Die Gerade PA ist parallel zu a .

Im ersten Fall liegt P auf AB , also P' auf $A'B$ (Geradentreue). Außerdem liegen P und P' auf der Parallelen zu AA' durch P . Dadurch ist P' festgelegt. Im zweiten Fall ist PA parallel zu a , also auch $P'A' \parallel a$ (indirekt begründen).

F Sind Achsenspiegelungen auch kreistreu?

K (Hausaufgabe) Konstruiere einen Gleiter G auf einer Kreislinie und seinen Bildpunkt. Ziehe an G und benutze die Ortslinienfunktion von GEONExT.

F Sind „alle Abbildungen“ geradentreu, kreistreu? Kannst Du Abbildungsvorschriften erfinden, wo die Geradentreue oder die Kreistreue verletzt ist?
(Nur wenn man solche Beispiele hat, machen diese Begriffe Sinn.)

A Wir zeichnen mit Kreide ein paar Geraden auf ein ebenes Stück Gummi. Dann ziehen wir an zwei Stellen am Gummi, so dass das Gummistück eben bleibt. Die Kreidegeraden sehen jetzt krumm aus. Jedem Punkt des Gummis entspricht ein Punkt des gedehnten Gummis: Abbildung. Im Folgenden beschreiben wir geradentreue Abbildungen, die nicht kreistreu sind.

II. Dehnungen/Stauchungen

Wir ändern die Abbildungsvorschrift einer Achsenspiegelung leicht ab. A' liege nun in doppelter (absoluter) Entfernung zur Achse a wie A (auf der andern Seite). Man führe die entsprechende Untersuchung wie in Abschnitt I durch. Es sei A^* wiederum der Schnittpunkt von AA' mit der Achse. Für die orientierten Entfernungen von A^* aus gilt

$$[A^*A'] = (-2) \cdot [A^*A].$$

Man überzeugt sich wie unter I, dass die neue Abbildung wieder geradentreu ist. Sie ist aber offensichtlich nicht kreistreu.

Wir verallgemeinern weiter, indem wir (-2) durch einen beliebigen (rationalen) Fasktor $k \neq 0$ ersetzen. Für $k > 0$ liegen jetzt A und A' auf derselben Seite der Achse. Die neue Abbildung nenne ich

Dehnung, wenn $1 < k$ ist,
Identität, wenn $k = 1$ ist,
Stauchung, wenn $0 < k < 1$ ist,
Spiegelung, wenn $k = -1$ ist,
Stauchspiegelung, wenn $-1 < k < 0$ ist,
Dehnspiegelung, wenn $k < -1$ ist.

Sie heißt allgemein *orthogonale Achsenaffinität*.

III. Schrägspiegelungen

Wir ändern die Abbildungsvorschrift für Achsenspiegelungen anders ab. Die Geraden PP' brauchen jetzt nicht mehr senkrecht auf der Achse zu stehen, sondern sollen alle eine gemeinsame, beliebig vorgegebene Richtung haben. Der Schnittpunkt mit der Achse soll weiterhin der Mittelpunkt von $[P, P']$ sein.

IV. Achsenaffinitäten

Wir verallgemeinern gleichzeitig wie in II und in III. Bei der Konstruktion des Bildpunktes von P ändert sich nichts Wesentliches, wenn man die Achse und ein Paar (A, A') schon gegeben hat, das nicht auf der Achse liegt. Siehe Abschnitt I.

Es fiel uns - auch schon früher - auf, dass man das Bild eines dritten Punktes Q über (A, A') oder über ein zweites Paar (P, P') konstruieren kann: es kommt derselbe Punkt Q' heraus. Damit haben wir einen Satz entdeckt, nämlich eine Form des Satzes von Desargues [5, S. 22]:

Gegeben seien drei Parallelen a, p, q und Punkte A, A' auf a , P, P' auf p und Q, Q' auf q , für die die Schnittpunkte entsprechender Seiten der Dreiecke $[A, P, Q]$ und $[A', P', Q']$ existieren. Dann liegen diese Schnittpunkte auf einer Geraden.

Das folgende Argument als Beweis für diesen Satz ist für die Schüler der Klassenstufen 7 - 8 wohl noch nicht zugänglich. Es sei trotzdem für den Lehrer oder für später hier gebracht.

Beweis. Die Schnittpunkte seien

$$X = AP \wedge A'P', Y = AQ \wedge A'Q', Z = PQ \wedge P'Q'.$$

Wir betrachten die Gerade XY . Sie ist ein dritter Strahl neben XAP und $XA'P'$ durch den Scheitel X der Strahlensatzfigur zu den beiden Parallelen a und p . Sie teilt in den mit A^* und P^* bezeichneten Punkten die Parallelenabschnitte im gleichen Verhältnis (Drei-Strahlen-Satz). Analog teilt XY als dritter Strahl neben YAQ und $YA'Q'$ durch den Scheitel Y der Strahlensatzfigur zu den Parallelen a und q diese Parallelenabschnitte in Punkten A^* und Q^* im gleichen Verhältnis. Also ist

$$[P^*P'] : [P^*P] = [A^*A'] : [A^*A] = [Q^*Q'] : [Q^*Q] = k.$$

Deshalb sind A', P', Q' die Bilder von A, P, Q unter der Achsenaffinität in Richtung AA' zum Faktor k . Dann lässt sich Q' aber auch über P statt über A konstruieren, d. h., Z liegt auf der Achse XY .

V. Zeichne eine Ellipse und ihre Hauptachsen

F Was sind das nun für Figuren, die aus einem Kreis unter Achsenaffinitäten entstehen? (Klassenstufe 9 - 10)

D Definition Das Bild eines Kreises unter einer Achsenaffinität der Ebene nennen wir *Ellipse*.

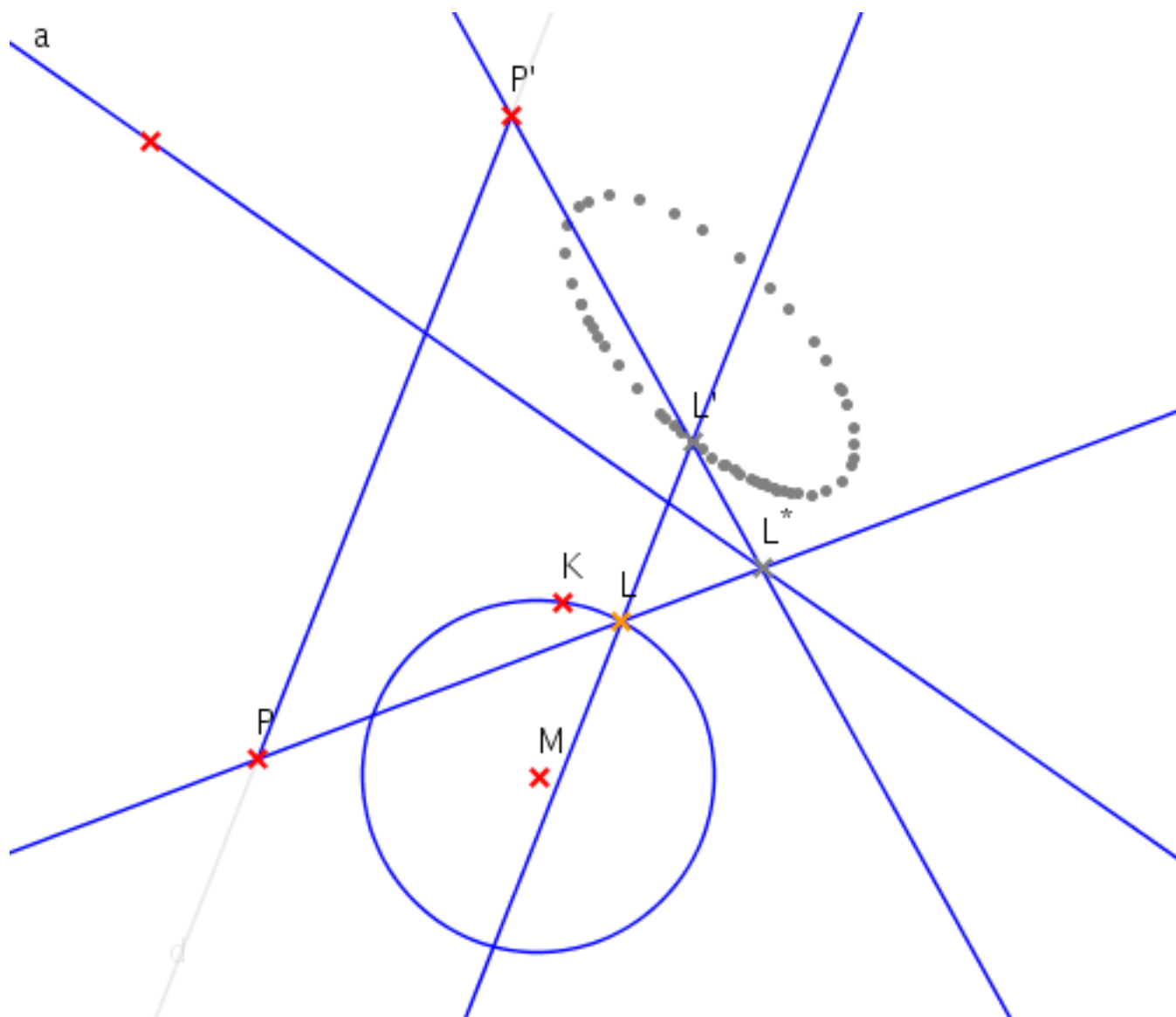
K Konstruktion Die Achsenaffinität π sei durch ihre Achse a und ein Punkt-Bildpunkt-Paar (P, P') gegeben. Wir zeichnen einen Kreis k um seinen Mittelpunkt M und durch einen Punkt K . Setze einen Gleiter L auf k und konstruiere wie oben sein Bild L' unter π . Durch die Spur-Funktion von GEONExT werden Ellipsenpunkte sichtbar. Wir nennen die Ellipse k' . (Einen ähnlichen Zugang zu Ellipsen und Literaturangaben zur Darstellenden Geometrie, wo Achsenaffinitäten prominent auftreten, findet man in [2].)

K (Hausaufgabe) Konstruiere die Ellipsenpunkte auf einer vorgegebenen Geraden durch M' .

F Was bringt uns diese Darstellung einer Ellipse?

A Wir beschreiben, was wir von der Ellipse sehen, qualitativ. Sie sieht „oval“ aus: hat zwei Symmetrieachsen (Spiegelung an diesen Achsen führt die Ellipse in sich über), deren Schnittpunkt ist der Bildpunkt M' von M , die Symmetrieachsen sind die längsten und kürzesten *Durchmesser* (= Sehnen durch M') der Ellipse, sie stehen aufeinander senkrecht.

F Wir sind durch die Konstruktion (Zeichnung) von der Gültigkeit dieser Aussagen überzeugt; kann man diese Aussagen auch ohne Zeichnung allein aus den Eigenschaften von Kreis und Achsenaffinität begründen?



- A Alle Kreisdurchmesser gehen durch den Mittelpunkt M . Also gehen deren Bilder (gewisse Ellipsensehnen) ebenfalls durch einen gemeinsamen Punkt. Diesen nennen wir M' . Die Ellipsensehnen durch M' nennen wir *Ellipsendurchmesser*. Bei Achsenaffinitäten geht der Mittelpunkt einer Strecke auf den Mittelpunkt der Bildstrecke (denn der Diagonalschnittpunkt eines Parallelogramms geht auf den Diagonalschnittpunkt des Bildparallelogramms), also ist M' der Mittelpunkt jedes Ellipsendurchmessers. Die Ellipse ist also *punktsymmetrisch*.

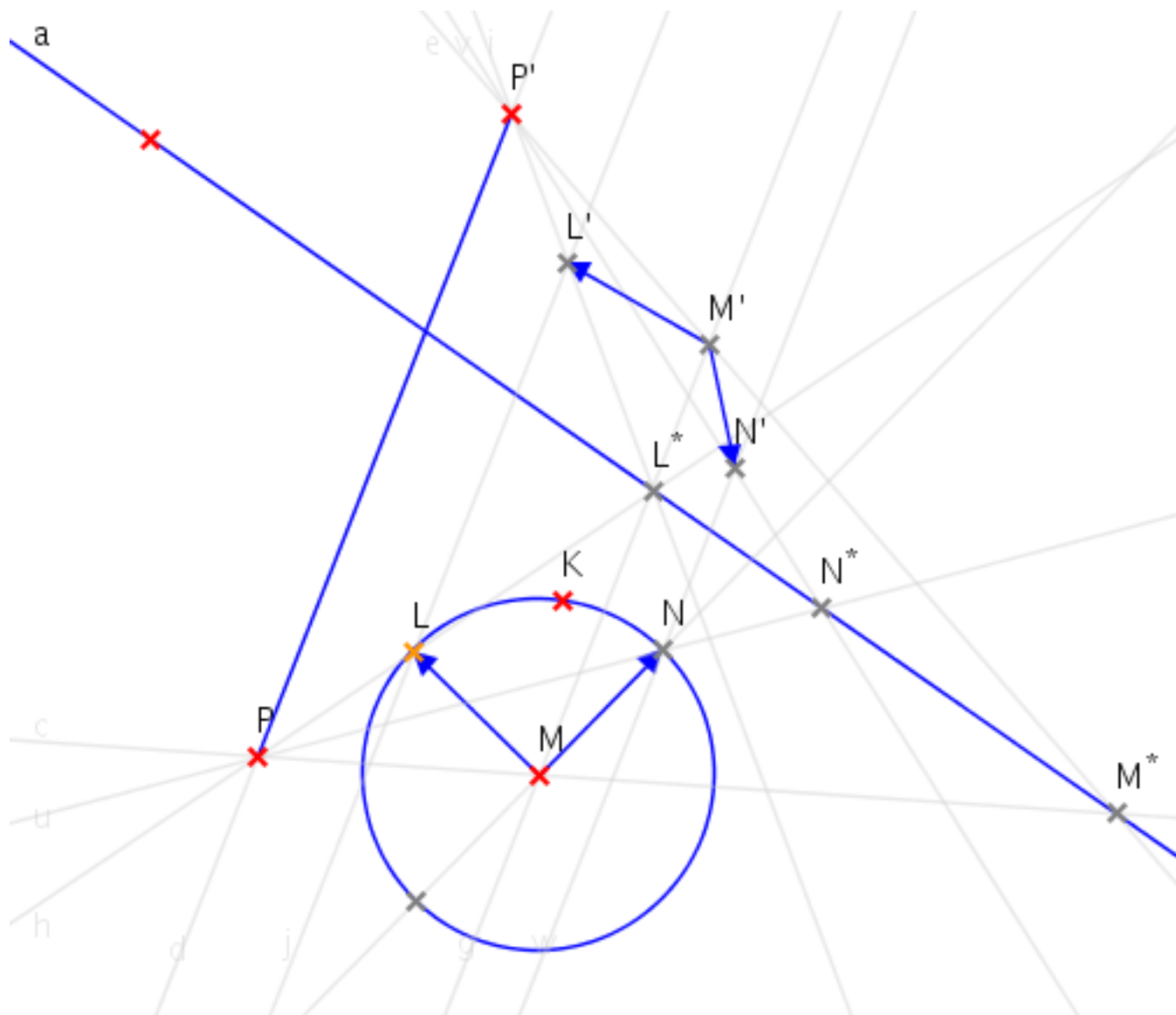
Wir kommen nun zu den Hauptachsen der Ellipse k' . Statt sie (mit Begriffen der Analysis) als Durchmesser von extremer Länge zu definieren, betrachten wir orthogonale Durchmesser des Kreises k und deren Bilder unter der Achsenaffinität π .

E Experiment Betrachte zwei orthogonale Kreisdurchmesser und die zugehörigen Ellipsendurchmesser im Zugmodus.

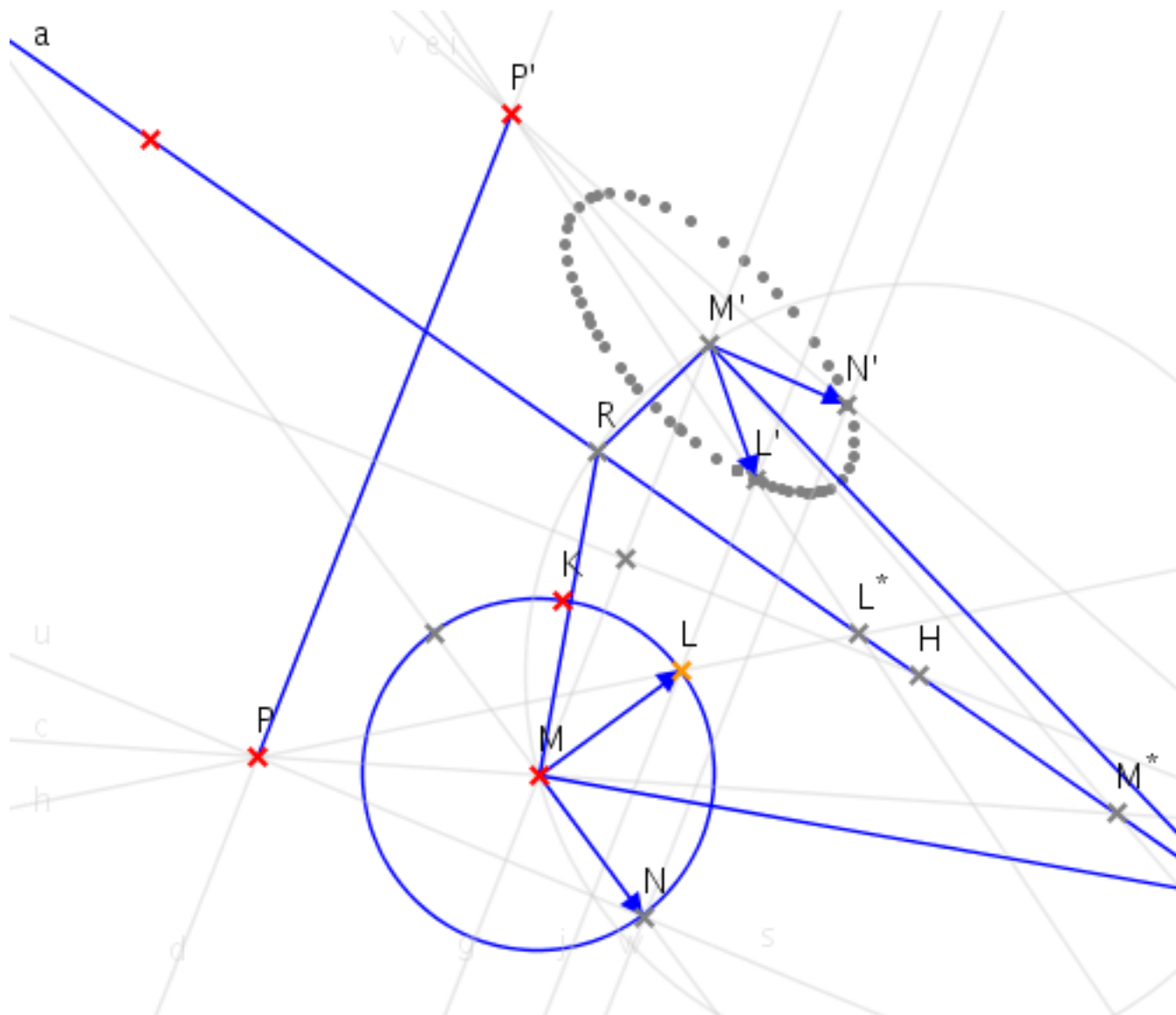
Genauer nehmen wir den Kreisradius $r = [M, L]$ zum Gleiter L und einen der beiden dazu senkrechten Radien: $t = [M, N]$. Wir färben sie grün. Die zugehörigen Ellipsenradien sind $r' = [M', L']$ und $t' = [M', N']$: konstruieren und grün färben. Wenn man an L zieht, gehen die Ellipsenradien mit. Sie stehen in der Regel nicht senkrecht aufeinander. Aber in einer speziellen Position von L ist dies wohl doch der Fall.

D Zwei Ellipsensehnen (und ihre Trägergeraden) heißen *konjugiert*, wenn die via π zugehörigen Kreissehnen aufeinander senkrecht stehen. π -Bilder von Kreisradien heißen *Ellipsenradien*.

D Konjugierte Ellipsendurchmesser, die aufeinander senkrecht stehen, heißen *Hauptachsen* der Ellipse.



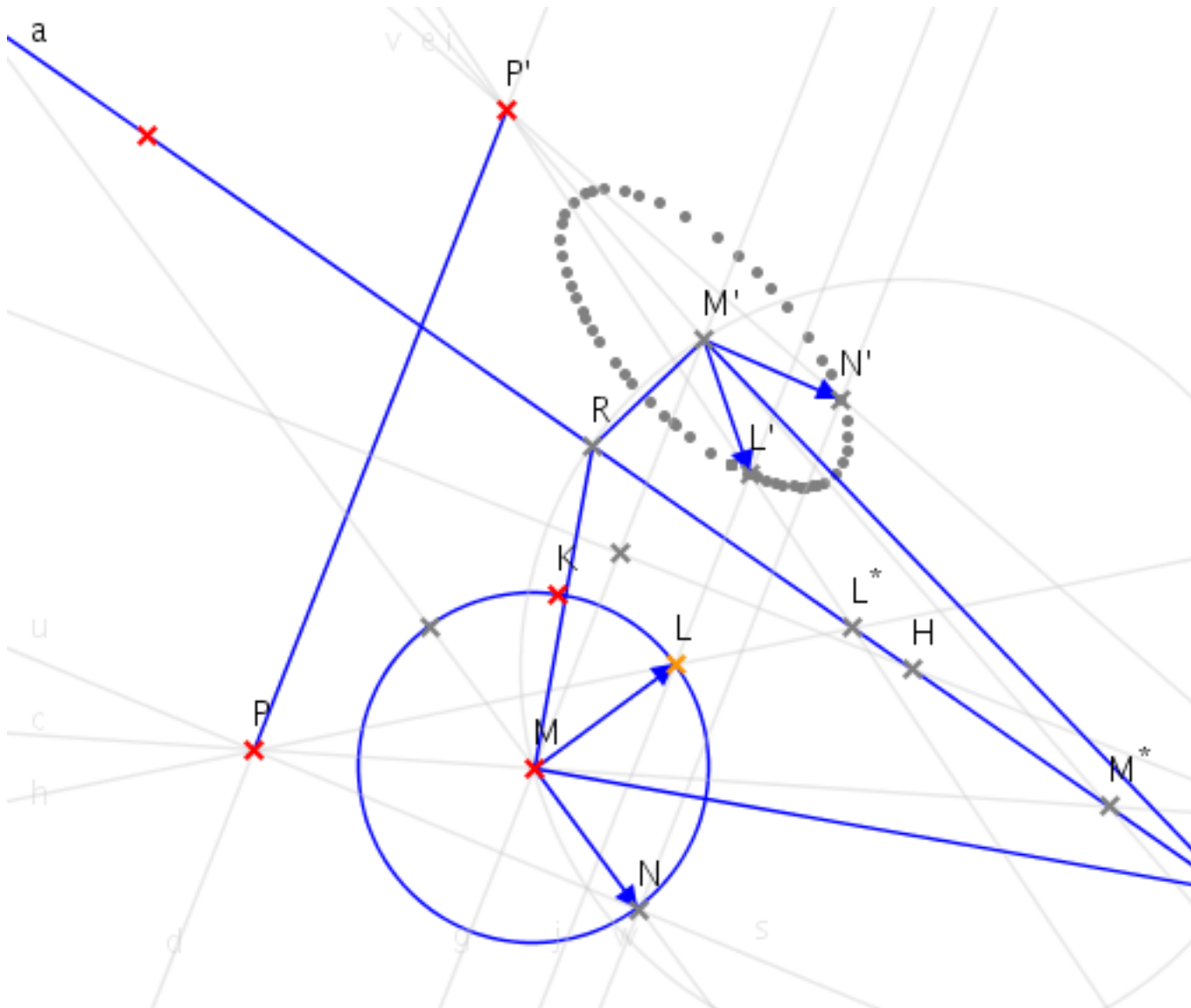
F Wie kann man die Hauptachsen *konstruieren*?



- A Analyse** Wir nehmen an, dass das Paar (r', t') ein Hauptachsen-Radienpaar ist, dessen Trägergeraden die Achse a in Punkten R und T treffen. Nach Konstruktion (Achsenaffinität) treffen sich auch die zugehörigen Kreisradien r und t mit der Achse a in R bzw. T . Dann liegt M auf dem Thaleskreis über $[R, T]$ und M' ebenfalls. Der Mittelpunkt dieses Thaleskreises liegt also einerseits auf der Achse $a = RT$ und andererseits auf der Mittelsenkrechten von $[M, M']$.
- K** Wir drehen den Spieß rum: Konstruiere den Schnittpunkt H von a und der Mittelsenkrechten auf $[M, M']$; dieser Punkt H existiert, wenn MM' , also auch PP' *nicht* senkrecht auf der Achse a steht. Wir nehmen deshalb jetzt an, dass die Achsenaffinität π echt schräg (= nicht

orthogonal) ist. Der Kreis um H durch M (und M') schneidet die Achse a in zwei Punkten R und T . Die Ellipsenradien $[M', R]$ und $[M', T]$ liegen auf konjugierten Ellipsendurchmessern. [3, S. 136-138]. Die Analyse zeigt auch, dass das Hauptachsenpaar eindeutig bestimmt ist.

Im andern Fall, wo π eine Dehnung/Stauchung ist, liegt offenbar eine Hauptachse der Ellipse parallel zur Achse a der orthogonalen Achsenspiegelung π . Auch hier gibt es nur ein Hauptachsenpaar, wenn π keine Achsenspiegelung ist.



Literatur

- [1] Peter Baptist . GEONExT (Homepage) . <http://geonext.uni-bayreuth.de>, 2004. Links zu Materialien (auch Materialien aus Fortbildungsveranstaltungen).
- [2] H. Klement. Ebene Affinitäten in der Darstellenden Geometrie. *Praxis der Mathematik*, 45(6):293–297, 2003. HB: Z1757; MB: Z 101.
- [3] G. Pickert. Die Bedeutung der Darstellenden Geometrie für die Mathematikausbildung. In H. Bauersfeld, H. Otte, and H.-G. Steiner, editors, *Proceedings of the ICMI-IDM Regional Conference on the Teaching of Geometry (Bielefeld, 1974)*, Schriftenreihe des IDM 3, pages 1–22. Univ. Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik (IDM), 1974. HB: Ka5874-3+1.
- [4] U. Schoenwaelder. Die fünf Diskursebenen: vom inhaltlichen zum formalen mathematischen Denken und zurück. *Mathematische Semesterberichte*, erscheint 2005. Wird unter <http://www.springerlink.com> verfügbar sein. Siehe auch unter <http://www.math.rwth-aachen.de/~Ulrich.Schoenwaelder/Fachdidaktik/>.
- [5] E. M. Schröder. *Vorlesungen über Geometrie, Band 2: Affine und projektive Geometrie*. BI, Wissenschaftsverlag, 1991. ISBN 3-411-15301-6. HB: Bd1495-2; MB: 16319b.
- [6] P. M. van Hiele and D. van Hiele-Geldorf. La signification des niveaux de pensée dans l’enseignement par la méthode déductive. *Mathematica et Paedagogica*, 16:25–34, 1958/59. ISSN 0465-3688. Deutsche Übersetzung: [7].
- [7] P. M. van Hiele and D. van Hiele-Geldorf. Die Bedeutung der Denkebenen im Unterrichtssystem nach der deduktiven Methode. In H.-G. Steiner, editor, *Didaktik der Mathematik*, Wege der Forschung 361, pages 127–139. Darmstadt: Wiss. Buchges., 1978. ISBN 3-534-06005-9. HB: Za5799-361. Übersetzung von [6] durch Reinhilde Eisenhut.
Zitiert in: M. Franke, *Didaktik der Geometrie*, Mathematik Primarstufe, Spektrum Akad. Verl., 2000; HB: Kb7612.