Ulrich Schoenwaelder
GEONExT-Fortbildung 15. April 2005
Lst. D für Mathematik

Zeichne einen Würfel unter Parallelprojektion

Klassenstufe: 9 - 10.
Methodische Ziele:

- Raumvorstellung stärken.
- Genaues Beobachten, Beschreiben und Argumentieren bei der Modellierung:
  - Raumpunkte, Leinwandpunkte und Geonextpunkte unterscheiden, aber auch
  - durch die Parallelprojektion in Beziehung setzen.

Stoffliche Ziele: räumliche und ebene Affine Geometrie, Studium der folgenden Hilfsabbildungen.

- Parallelprojektion als Effekt einer räumlichen Drehung einer Ebene um eine ihrer Geraden als Achse.
- Achsenaffinitäten einer Ebene, die durch räumliche Parallelprojektionen entstanden sind.

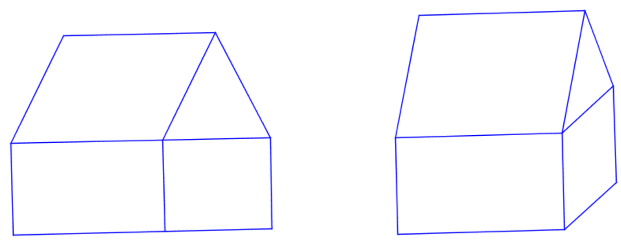
Ebene Bilder räumlicher Objekte begegnen uns tagtäglich, und wir lernen, solche Bilder zu verstehen, sie eben räumlich zu sehen. Aber welche Prinzipien stecken hinter ihrer zeichnerischen Konstruktion? Am häufigsten wird die Zentralprojektion verwandt, bei der (fast) alle Punkte des Raumes (insbesondere die markanten Punkte des Objektes) von einem festen Punkt aus, dem Zentrum, längs Geraden auf eine feste Ebene projiziert werden. Vgl. hierzu z. B. [3]. Als Grenzfall, bei dem der feste Punkt „unendlich weit weg“ liegt und die Geraden zu Parallelen in einer festen Richtung werden, hat man eine *Parallelprojektion*. In diesem Text soll die Theorie der Parallelprojektionen entwickelt und mit der dynamischen Geometriesoftware GEONExT [1] an Beispielen erlebt werden. Als Anwendungbeispiele haben wir zwei Situationen:

1. Ich sehe aus großer Entfernung ein Objekt vor einem vertikalen Hintergrund, den ich mir als Leinwand vorstelle, auf die parallel projiziert wird.
2. Eine entfernte Lichtquelle (Sonne) sendet parallele Strahlen auf eine ebene Wand und produziert dort den Schatten eines davor befindlichen Objektes.

Der Unterschied der beiden Situationen besteht darin, dass ich beim Sehen mich doch *in der Mitte* (weit) vor dem Objekt befinde und das Objekt somit senkrecht auf den Hintergrund projiziert wird, während eine Lichtquelle in der Regel schräg *von der Seite* leuchten wird.

I. Das Kinderhaus

Grundschulkinder zeichnen ein Haus gerne so, wie es das linke Bild zeigt, von älteren Personen könnte das rechte Bild stammen.



Beide Bilder stellen den Betrachter nicht ganz zufrieden. Obwohl sie viele wichtige Merkmale des Hauses enthalten und obwohl man schon versteht, was gemeint ist, kann man folgende Kritik äußern:

- Links sieht man zwei Seiten des Hauses gleichzeitig von vorne, als stünde man jeweils zentral davor. Abgesehen davon, dass man beim Sehen in der Regel nicht sehr weit weg vom Objekt ist und deshalb eher eine Zentralprojektion angebracht wäre, handelt es sich auch beim linken Haus um eine legitime Parallelprojektion: man stelle sich statt der Hausgrundfläche eine Tischplatte vor und die Projektionsgeraden so, dass sie parallel zur Tischplatte verlaufen.
- Beim rechten Haus verlaufen die Projektionsgeraden nicht parallel zur Grundfläche, aber auch nicht senkrecht zur Traufe (sonst könnte man die Seitenwand nicht sehen), also offenbar etwas von rechts oben nach links unten. Der „Betrachter“ befindet sich also *rechts* vom Haus „in einem Baum“ (sog. *Kavalierperspektive*, „Schreckbild“ [2]). Das ist nicht die übliche Sicht eines Hauses, wo man eher zentral davor steht.

Wie ist also ein Haus „richtig“ zu zeichnen? Dazu mehr in den Abschnitten II bis IV. Zuvor noch ein technischer Hinweis.

K Wie werden obige Hausbilder mit GEONExT erstellt? Es reicht zu wissen, wie man ein Rechteck bekommt. Dazu

- (Start) Strecke $[A, B]$ als eine Rechteckseite.
- (1. Konstruktion)
  - Senkrechte (Perpendicular Line) in beiden Endpunkten.
  - Gleiter C auf der Senkrechten in B und Parallele durch ihn zur Grundseite $[A, B]$.
  - Schnittpunkt D als vierten Rechteckpunkt.

- (2. Konstruktion)
  - Senkrechte in einem Endpunkt, etwa B. Gleiter C auf dieser Senkrechten.
  - Pfeil von B nach C darüber legen; Senkrechte verstecken.
  - Parallelpfeil von A aus setzen.
  - Spitzen der Pfeile durch Strecke verbinden.
- (Verschönerung)
  - Man möchte aber Strecken statt Geraden oder Pfeile haben. Also legt man Strecken $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$ darüber und versteckt anschließend die Geraden bzw. Pfeile mit den Befehlen Objects - Object Properties - im neuen Fenster „Object Properties" den Namen der Geraden anklicken - Hide Object markieren.
  - Nun möchte man noch die Kreuzchen für Punkte und die Namen der Punkte entfernen. Das geht mit den Befehlen Objects - Special Properties - Hide (das Hide-Symbol erscheint am linken Rand) - dieses Hide-Symbol verwenden.

II. Militärprojektion eines Hauses

Wir stellen uns vor, ein Bauklotz-Haus steht auf unserer Zeichenfläche, die vor uns auf der Tischplatte liegt. Wir schauen aus einer vergleichsweise großen Entfernung darauf. Diese Situation modellieren wir durch eine Parallelprojektion von oben schräg auf die Tischplatte/Zeichenfläche.

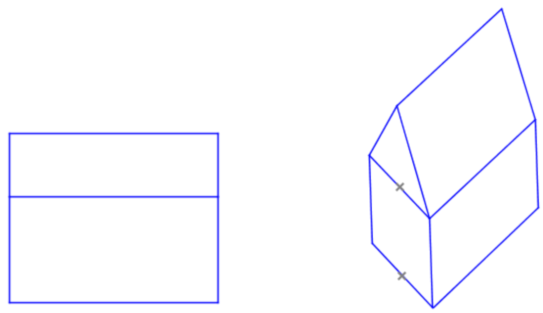
F Wie wird der Hausklotz auf der Zeichenfläche dargestellt?

- Wie die Grundfläche?
- Wie die vertikalen Kanten?

A
- Die Grundfläche des Hausklotzes wird in realer Größe und Form dargestellt, weil sie ja praktisch in der Zeichenfläche liegt.
- Vertikale Kanten werden auch vertikal dargestellt, da wir zentral von vorne schauen. - Die Sache wäre anders, wenn die Parallelprojektion nicht von vorne, sondern etwas von rechts auf die Zeichenfläche verliefe wie bei einer entfernten Lichtquelle, bezüglich der wir den Schatten des Hausklotzes auf der Zeichenfläche ermitteln wollten.
  Die zu zeichnende Höhe des Hauses hängt davon ab, von wie weit oben ich auf den Klotz schaue. Sie kann also in der Zeichnung vorgegeben werden.

K Konstruiere das Schaubild oder/und allgemeiner das Schattenbild des Hausklotzes mit GEONExT. Ziehe am Bildpunkt einer Dachecke, um zu verfolgen, wie sich das Schattenbild bei verschiedenen Einfallsrichtungen der Lichtstrahlen verändert.

Eine solche Projektion, bei der die Grundflächen formtreu und maßstabsgerecht und vertikale Kanten auch vertikal dargestellt werden, nennt man *Militärperspektive*. Sie findet oft bei Stadtplänen mit eingezeichneten Gebäuden Anwendung.



Bei der Konstruktion der vorstehenden Zeichnung wurden - vielleicht umbewusst - Geraden des Raumes durch Geraden in der Zeichnung sowie parallele Geraden des Raumes durch Parallelen in der Zeichnung dargestellt. Ich stelle in Abschnitt V abstrakte Eigenschaften von Parallelprojektionen zusammen, die bei der Bildkonstruktion Verwendung finden, und begründe sie dort.

III. Normalprojektion eines Quadrates

Wir wollen im folgenden Abschnitt IV einen Würfel, der irgenwie vor einer vertikalen Leinwand schwebt, per Parallelprojektion senkrecht zur Leinwand auf die Leinwand projizieren, genauer ein entsprechendes Bild mit GEONE$_X$T konstruieren. Eine Parallelprojektion senkrecht auf die Leinwand nennt man *Normalprojektion (Orthogonalprojektion, Riss).* Ziel dabei ist es, alle rechten Winkel und alle gleich langen Strecken des Raumes relativ zueinander richtig darzustellen. Dazu beginnen wir mit der Darstellung eines schräg im Raum liegenden Quadrates Q.

Das Quadrat sei $Q = [{}^{D\,C}_{A\,B}]$ und habe die Seitenlänge s. Wenn die Ebene ABCD parallel zur vertikalen Leinwand liegt, erscheint auch das Bild des Quadrates unter der Normalprojektion auf die Leinwand als ein Quadrat mit der Seitenlänge s. Nun nehmen wir aber an, dass die Ebene $ABCD$ die Leinwandebene in einer Geraden trifft. Diese könnte weit weg von unserem Quadrat liegen. Um das zu vermeiden, betrachten wir eine zur Leinwand parallele Hilfsebene L_1, die durch eine Ecke des Quadrates Q geht, etwa durch C. Die Ebene des Quadrates treffe die Hilfsebene L_1 in der Geraden f. Auf ihr liegt C. Es genügt, die Normalprojektion des Quadrates auf L_1 zu konstruieren, sie liefert ja das deckungsgleiche Bild unter der Normalprojektion auf die Leinwand. Wir studieren also die durch die Normalprojektion gegebene Abbildung

$$\alpha = (P \longmapsto P')\colon\ ABCD \longrightarrow L_1$$

von Punkten P des Raumes, insbesondere der Ebene $ABCD$ des Quadrates, auf die entsprechenden Punkte P' der Hilfsebene L_1. Gesucht ist das Bildparallelogramm $Q' = [{}^{D'\,C'}_{A'\,B'}]$ des Quadrates Q. Wie in Abschnitt V dargestellt, ist α als Parallelprojektion parallelitätstreu, also ist das Bild von Q in der Tat ein Parallelogramm; aber welches?

Wir können Quadrate gut zeichnen, wenn sie in der Hilfsebene L_1 liegen; es wird ja auf L_1 projiziert. Deshalb stellen wir eine Beziehung her zwischen unserem Quadrat Q und einem *Quadrat* Q_1 in der Hilfsebene L_1, indem wir uns die Ebene $ABCD$ nach einer der beiden Seiten um die

Gerade f als Achse in die Ebene L_1 gedreht denken. Dabei bewegt sich ein Punkt P der Ebene $ABCD$ auf einem Kreisbogen einer Kreisscheibe, die senkrecht zur Achse f zu denken ist und ihren Mittelpunkt auf der Achse hat, bis zu einem Punkt P_1 in der Hilfsebene L_1. Auf diese Weise wird jedem Punkt P der Ebene $ABCD$ ein Punkt P_1 der Ebene L_1 zugeordnet. Diese Abbildung $(P \longmapsto P_1)$ nenne ich δ:

$$\delta = (P \longmapsto P_1)\colon\ ABCD \longrightarrow L_1.$$

Sie erhält alle Abstände und Winkelmaße in diesen Ebenen. Eine Analyse dieser Abbildung in Abschnitt VI ergibt, dass δ eine *Parallelprojektion* ist, nämlich in Richtung

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel DD_1.$$

$C = C_1$ bleibt unter δ fix. Die gedachten Strecken $[A, A_1]$, $[B, B_1]$ und $[D, D_1]$ werden unter der Parallelprojektion α auf parallele Strecken

$$[A', A_1] \parallel [B', B_1] \parallel [D', D_1]$$

in L_1 abgebildet; A_1, B_1, C_1 bleiben als Punkte von L_1 fix. Diese Strecken liegen ganz in der Hilfsebene L_1: die Zuordnung

$$\pi = (P' \longmapsto P_1)\colon\ L_1 \longrightarrow L_1$$

ist der Schlüssel zum α-Bild unseres Quadrates Q. Wie wir nämlich in Abschnitt V zeigen, ist π eine *Achsenaffinität* (Definition in Abschnitt V) der Ebene L_1 zur Achse f und Richtung $A'A_1 \parallel B'B_1 \parallel D'D_1$; sie ist durch ein einziges Punkt-Bildpunkt-Paar (X', X_1), das nicht auf f liegt, festgelegt, wie die folgende Konstruktion zeigen wird; vgl. dazu auch [5].

Welche Lage soll die Strecke $[A', A_1]$ relativ zur Achse f haben? Im Raum bewegte sich A auf einem Kreisbogen in A_1, der sich in einer zur Achse f senkrechten Ebene befindet. Unter unserer *Normalprojektion* α geht diese Ebene in eine zur Achse f *senkrechte* Gerade über: in ihr liegt die Strecke $[A', A_1]$. Die Richtung der Achsenaffinität π von L_1 ist also orthogonal zu f. (Bei einer nichtnormalen Parallelprojektion wäre das nicht so, etwa dann, wenn wir das Schattenbild eines Würfels unter schräg einfallenden parallelen Lichtstrahlen zeichnen wollten.)

Um das Bildparallelogramm Q' zu konstruieren, geben wir uns also in der Hilfsebene L_1 eine Gerade f als Achse und ein Quadrat (!) $Q_1 = [\begin{smallmatrix} D_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 \end{smallmatrix}]$ vor mit C_1 auf f; außerdem wird der Punkt A' auf der Lotgeraden von A_1 auf f vorgegeben und zwar zwischen A_1 und f. Denn der Abstand des Bildes A' von f ist eher kleiner als der wahre Abstand von A (und A_1) zu f. Die Gerade f und der Punkt A' beschreiben in der Bildebene L_1 die räumliche Lage der Ebene $ABCD$. Aber nun kommen wir endlich zur Konstruktion von B' und D', allgemein von P' zu gegebenem Punkt P_1.

K Vorbereitung Zeichne eine Gerade $C_1M = f$ und ein Quadrat $Q_1 = [\begin{smallmatrix} D_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 \end{smallmatrix}]$ durch Vorgabe von D_1 in der Entfernung s von C_1. Wähle außerdem einen Punkt X_1, der nicht auf f liegt, etwa A_1. Konstruiere seinen Lotfußpunkt X^* auf f, die Strecke $[X_1, X^*]$ und einen Punkt X' hierauf als Gleiter. Wir betrachten die durch (X', X_1) definierte Achsenaffinität π und wollen allgemein für gegebene Punkte P_1 die Punkte P' konstruieren, speziell für B_1 und D_1.

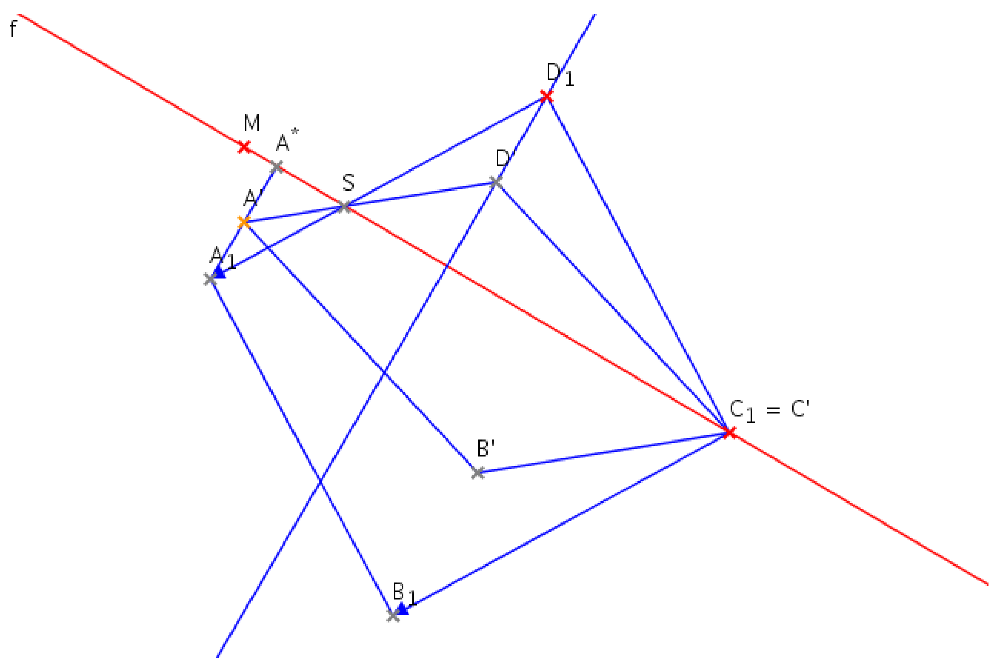
K1 Wähle einen Punkt P_1, für den X_1P_1 nicht parallel zu f ist, etwa D_1. Es sei $S = f \wedge X_1P_1$ der Schnittpunkt. Da P_1 auf X_1S liegt, liegt P' auf $X'S$ (Geradentreue der Achsenaffinität π). Außerdem hat π die Richtung X_1X'; also liegt P' auf der Parallelen zu $[X_1, X']$ durch

P_1. (Der vierte Parallelogrammpunkt B' kann aus D', A', C' in dieser Reihenfolge mit der GEONExT-Funktion „Parallelogram Point“ leicht erhalten werden, ohne über die Abbildung π zu gehen.)

K2 Wenn S nicht mehr auf dem Geonextblatt zu sehen ist, zeichnen wir parallele Geraden durch X_1 und P_1, die nicht in der Richtung von π verlaufen, mit Schnittpunkten X^{**} bzw. P^{**} mit f. Diese parallelen Geraden werden unter π auf parallele Geraden (Parallelitätstreue von π) abgebildet: die eine ist $X'X^{**}$, die andere demnach die Parallele hierzu durch P^{**}. Wie vorher liegt P' andererseits in Richtung X_1X' von P_1.

K3 Wenn für den Punkt P_1 die Gerade X_1P_1 parallel zu f verläuft, kann man zunächst das Bild eines Punktes R_1 wie unter K1 konstruieren und dann zur Konstruktion von P' das Paar (R', R_1) benutzen statt (X', X_1).

Auf diese Weise konstruieren wir das Bildparallelogramm $Q' = [\begin{smallmatrix} D' & C' \\ A' & B' \end{smallmatrix}]$. Nun können wir an dem Punkt D_1 ziehen, der das Quadrat Q_1 festgelegt hat, damit es gut in der Mitte des Blattes zu liegen kommt. Interessanter ist es zu sehen, wie sich das Bildparallelogramm Q' verändert, wenn wir an $X' = A'$ ziehen.



Im folgenden Abschnitt IV wird das Bild des Quadrates Q zum Bild eines Würfels ergänzt; die nötige Theorie dazu wird in den Abschnitten V und VI dargestellt.

IV. Ein taumelnder Würfel

Wir kommen jetzt dazu, das Bild eines taumelnden Würfels, der also irgendwie vor einer Leinwand schwebt, zu konstruieren. Eine Seitenfläche des Würfels W sei das Quadrat $Q = [{}^{DC}_{AB}]$, ihre Gegenseite sei $[{}^{HG}_{EF}]$, wobei die Ecken A und E benachbart seien, entsprechend B und F, C und G, D und H.

Das Bildparallelogramm Q' von Q unter der Normalprojektion α auf eine zur Leinwand parallele Hilfsebene L_1 durch $C = C_1 = C'$ haben wir schon in Abschnitt III konstruiert. Es geht jetzt darum, die Lage des dazu parallel verschobenen Bildparallelogramms $[{}^{H'G'}_{E'F'}]$ festzulegen, also die Richtung und Länge der Strecke $[C', G']$ in L_1. Im Urbild W ist ja $[C, G]$ senkrecht auf $ABCD$ und gleich lang wie $[C, B]$.

F Für das α-Bild G' von G fragen wir also:

1. In welcher Richtung von C aus liegt G'?
2. In welcher Entfernung von C' aus liegt G'?

A Dazu entsprechend stellen wir die folgende Analyse an:

1. Im Würfel W steht die Kante $[C, G]$ senkrecht auf der Grundfläche $ABCD$, also erst recht senkrecht auf ihrer Geraden f. Unter der *Normal*projektion α wird die zu f in C senkrechte Ebene in die zu f in $C' = C$ senkrechte Gerade von L_1 abgebildet. Also liegt G' auf dieser Geraden. Genau so liegen E', F' und H' auf den zu f senkrechten Geraden durch A', B' bzw. D', die wir auch schon zur Konstruktion der α-Bildpunkte aus A_1, B_1 und D_1 benutzt hatten.
2. Damit der Bildwürfel seine richtige Höhe bekommt, denken wir uns die Seitenfläche $[{}^{HG}_{DC}]$ um eine neue Achse f_2 durch $C = C'$ in L_1 in die Hilfsebene L_1 gedreht, wo das Bildquadrat $[{}^{H_2G_2}_{D_2C_2}]$ mit richtiger Seitenlänge s erscheint. Als Achse f_2 wählen wir die zu $B'C'$ in $C = C'$ senkrechte Gerade von L_1. Das α-Bild des Kreisbogens von D nach D_2 liegt - analog früher bei Drehung um f - in der zu f_2 senkrechten Geraden durch D'. M. a. W., der Punkt D_2 liegt auf der Geraden $A'D'$.
   Da seine Entfernung von $C' = C_2$ bekannt ist (gleich s), können wir D_2 als einen der beiden Schnittpunkte mit dem Kreis um $C' = C_2$ vom Radius s einzeichnen. Wir ergänzen $[C_2, D_2]$ auf der gewünschten Seite zu einem Quadrat mit den weiteren Ecken G_2 und H_2. Dann liegt G' auf der zu f_2 senkrechten Geraden durch G_2 (und H' auf der zu f_2 senkrechten Geraden durch H_2).

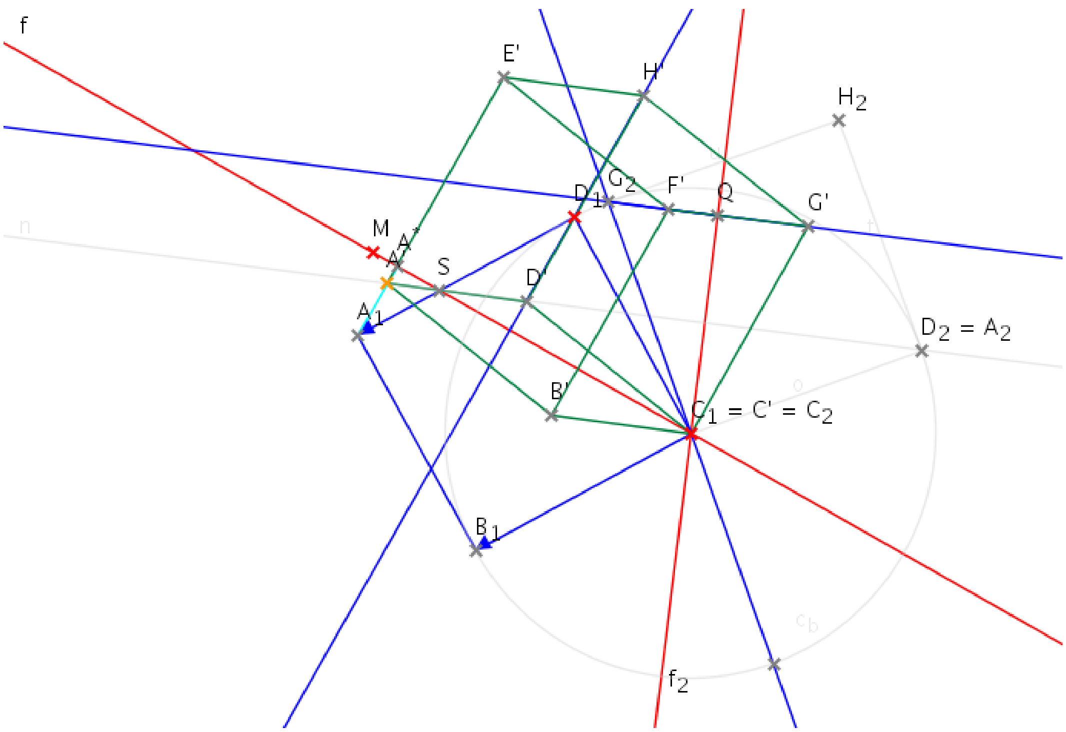
Durch A1 und A2 ist G' als Schnittpunkt zweier Geraden festgelegt.

K Wir konstruieren das Bild eines taumelnden Würfels unter der Normalprojektion α.

- Kopiere die GEONExT-Konstruktion des Bildparallelogramms $Q' = [{}^{D'C'}_{A'B'}]$ unter neuem Namen auf ein neues Blatt. Färbe die alte Achse f rot und die Kanten des Quadrats Q' grün, damit sie sich besser von späteren blauen Konstruktionsgeraden abheben.
- Zeichne (gemäß A2) die Achse f_2 durch C' senkrecht zu $B'C'$. Färbe sie ebenfalls rot.
- Zeichne D_2 auf der Parallelen zu $B'C'$ (also orthogonal zu f_2) durch D' in der richtigen Entfernung s von C. Die Hilfsgerade und der Hilfskreis können durch die Befehle Objects - Special Properties -Draft als graue Linien in den Hintergrund geschickt werden.

- Ergänze die Quadratecke G_2.
- Zeichne die Lotgerade von G_2 auf f_2.
- Markiere ihren Schnittpunkt G' mit der Senkrechten auf f in C' (gemäß A1).
- Ergänze die anderen Würfeleckenbilder E', F', H' durch Parallelogrammkonstruktionen. Färbe die Würfelkanten grün.

Ziehe an A', um zu sehen, wie sich der ganze Würfel verändert.



V. Wesentliche Eigenschaften von Parallelprojektionen (Theorie)

D Definition Eine *Parallelprojektion* α im Raum ist gegeben durch eine Ebene E [auf die die Raumpunkte (oder auch nur die Punkte einer weiteren Ebene) abgebildet werden] und eine Gerade r [in deren Richtung projiziert wird]; sie darf nicht parallel zu E sein, damit für einen Raumpunkt P die Parallele zu r durch P einen Schnittpunkt P' mit E hat: $\alpha(P) = P'$.

Um das α-Bild von Raumkörpern beschreiben zu können, braucht man Kenntnis darüber, wie die gegenseitige Lage von Raumpunkten von α berücksichtigt wird.

F Welche Eigenschaften hat α?

A Der Definition von „Parallelprojektion" und der Raumanschauung können wir entnehmen:

- (Richtung) Alle Geraden PP' sind untereinander parallel (zu r).
- (Entartung) Punkte P und R, für die die Gerade PR parallel zu r ist, haben dasselbe α-Bild $P' = R'$. Die Gerade PR wird durch diesen Punkt dargestellt.
- (Geradentreue) Nun interessieren uns Punkte einer Geraden g, die nicht parallel zu r ist. Betrachte einen Punkt P von g, der nicht auf E liegt, und die Parallele r' zu r durch P. Die Geraden g und r' definieren eine Hilfsebene G, die E in einer Geraden g' trifft. Deshalb liegen die α-Bilder der Punkte von g auf einer Geraden, nämlich g'.
- (Parallelitätstreue) Parallele Geraden des Raumes haben parallele Bilder in E. Denn parallele Hilfsebenen haben parallele Schnittgeraden mit E. Insbesondere gehen Parallelogramme des Raumes in Parallelogramme von E über, wenn sie nicht entarten.

Wir brauchen noch eine Eigenschaft der Hintereinanderausführung zweier Parallelprojektionen

$$\alpha_1 = (P_1 \longmapsto P_2)\colon\ E_1 \longrightarrow E_2 \text{ und } \alpha_2 = (P_2 \longmapsto P_3)\colon\ E_2 \longrightarrow E_3$$

zwischen Ebenen E_1, E_2 und E_3, die sich in *einer* Geraden $f = E_1 \wedge E_2 = E_2 \wedge E_3$ treffen. Es darf $E_1 = E_3$ sein. Die uns interessierende Zuordnung ist

$$\beta = (P_1 \longmapsto P_3)\colon\ E_1 \longrightarrow E_3.$$

Nach Voraussetzung sind alle Geraden P_1P_2 untereinander parallel (zu $r_1 = X_1X_2$) und alle Geraden P_2P_3 untereinander parallel (zu $r_2 = X_2X_3$).

F Sind auch alle Geraden P_1P_3 untereinander parallel (zu $r_3 = X_1X_3$)?

A (Richtung) Die Gerade P_1X_1 von E_1 treffe f im Punkt S. Da die Punkte von f bei α_1 fix bleiben, liegt P_2 auf X_3S. Da α_1 und α_2 Parallelprojektionen sind, ist

$$P_1P_2 \parallel X_1X_2 \text{ und } P_2P_3 \parallel X_2X_3.$$

Damit ist die Ebene $P_1P_2P_3$ parallel zur Ebene $X_1X_2X_3$. Diese beien Ebenen schneiden die von den Geraden SP_1X_1 und SP_3X_3 erzeugte Ebene F in *parallelen* Geraden $P_1P_3 \parallel X_1X_3 = r_3$.

Die Abbildung β ist also eine Achsenaffiniät der Ebene F im Sinne der folgenden Definition.

D Eine *Achsenaffinität* einer Ebene F ist eine Abbildung von F nach F, bei der

- (Achse) die Punkte einer festen Geraden f fix bleiben,
- (Geradentreue) die Punkte einer jeden Geraden auf die Punkte einer Geraden abgebildet werden und
- (Richtung) alle durch Punkt und Bildpunkt (nicht auf f) definierten Geraden zueinander parallel sind.

Satz Man stellt durch Konstruktionen wie in Abschnitt III leicht fest, dass eine Achsenaffinität durch

- ihre Achse,
- ihre Richtung und
- *ein* Punkt-Bildpunkt-Paar, das nicht auf der Achse liegt,

festgelegt ist. Vgl. [5], Literaturhinweise zur Darstellenden Geometrie in [4].

VI. Die Hilfsabbildung δ (Theorie)

Wir betrachten wie in Abschnitt III zwei Ebenen des Raumes, die sich in einer Geraden schneiden: die Leinwandebene L_1 und eine Ebene L_0 (in Abschnitt III die Ebene $ABCD$ des Quadrates Q) mit der Schnittgeraden f. Wir denken uns die Ebene L_0 längs der Achse f in die Ebene L_1 verdreht: auf diese Weise entspricht jedem Punkt P von L_0 ein verdrehter Punkt P_1 von L_1. Es soll jetzt gezeigt werden, dass die Zuordnung

$$\delta = (P \longmapsto P_1)\colon\ L_0 \longrightarrow L_1$$

eine Parallelprojektion in Richtung PP_1 ist.

F Vergleiche eine (feste) Gerade AA_1 (für einen Punkt A in L_0) mit einer beliebigen weiteren Geraden PP_1 (P in L_0) mit dem Ziel, ihre Parallelität zu zeigen. Es bezeichne A^* den Fußpunkt des Lotes von A auf f und analog P^* den Fußpunkt des Lotes von P auf f.

A1 (1. Fall) Wir nehmen zunächst einen Punkt P, für den die Verbindungsgerade AP einen Schnittpunkt S mit f hat (in L_0), der nicht mit A^* zusammen fällt. P^* ist also von A^* verschieden. Bei dem gedachten Drehvorgang bleiben A^*, P^* und S als Punkte der Achse f fix. Es ist

$$AA^* \parallel PP^* \text{ und } A_1A^* \parallel P_1P^*.$$

Die Gerade APS geht in die Gerade A_1P_1S über. Ich fasse zusammen: Wir haben

- einen Punkt S,
- die drei Geraden APS, A^*P^*S, A_1P_1S durch S und
- die beiden Dreiecke (im Raum)

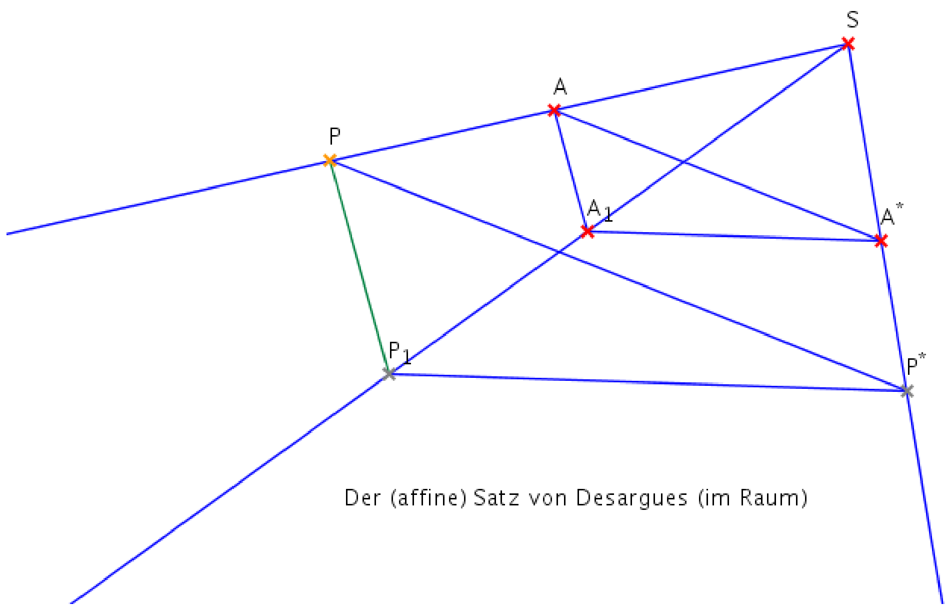
$$[A, A^*, A_1] \text{ und } [P, P^*, P_1],$$

wo zweimal entsprechende Seiten parallel sind.

In solchen Situationen sind aus unserer Erfahrung mit Ebenen **auch die dritten Seiten** zueinander parallel: $AA_1 \parallel PP_1$. Denn parallele Ebenen schneiden eine weitere Ebene in parallelen Geraden: bei uns sind die durch parallele Geradenpaare (A^*A, A^*A_1) und (P^*P, P^*P_1) definierten Ebenen parallel; sie schneiden die durch die Geraden APS und A_1P_1S definierte Ebene in den (somit) parallelen Geraden AA_1 und PP_1. (Man nennt dies den Großen Satz von Desargues [6, S. 22].)

A2 (2. Fall) Nun sei P auf AA^*. Dann ist $PP_1 \parallel AA_1$ nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes.

A3 (3. Fall) Nun sei $AP \parallel f$. Dann ist auch $A_1P_1 \parallel f$. Wir haben eine ähnliche Situation wie im 1. Fall, nur dass die drei Geraden AP, A^*P^*, A_1P_1 nicht durch einen gemeinsamen Punkt gehen, sondern zueinander parallel sind. Auch hier kennt man die Parallelität der dritten Dreiecksseiten. (Man nennt dies den Kleinen Satz von Desargues.)



Der (affine) Satz von Desargues (im Raum)

Fazit. Die Abbildung δ von der ersten Ebene L_0 auf die zweite Ebene L_1 ist die Parallelprojektion in Richtung AA_1.

Literatur

[1] Peter Baptist et al. GEONExT. `http://www.geonext.de`. Programm, Einführung, Beispiele.

[2] H. Bergold. Schrägbild – Schreckbild. *Didaktik der Mathematik*, 17(Heft 3):190–200, 1989. HB: Z5339.

[3] Hans-Jürgen Elschenbroich. Zentralperspektive mit EUKLID. Mit einem zweidimensionalen Geometrieprogramm Raumvorstellung entwickeln. *Praxis der Mathematik: PM Computerpraxis*, 40(4):174–178, 1998. MB: Z 101. Der Verfasser zeigt an verschiedenen Beispielen, wie man mit Hilfe eines 2-dimensionalen Geometrie-Programms (im Beispiel EUKLID) die Raumvorstellung entwickeln kann.

[4] H. Klement. Ebene Affinitäten in der Darstellenden Geoemtrie. *Praxis der Mathematik*, 45(6):293–297, 2003. HB: Z1757; MB: Z 101.

[5] U. Schoenwaelder. Von Achsenspiegelungen zu Achsenaffinitäten. Manuskript zur Lehrerfortbildung am 15.04.2005 in Aachen, 2005.
`http://www.math.rwth-aachen.de/~Ulrich.Schoenwaelder/Fachdidaktik/index.html`.

[6] E. M. Schröder. *Vorlesungen über Geometrie, Band 2: Affine und projektive Geometrie.* BI, Wissenschaftsverlag, 1991. ISBN 3-411-15301-6. HB: Bd1495-2; MB: 16319b.