Grundlagen der Geometrie (WS 00/01)
11. Aufgabenblatt

Aufgabe 25

a) Beweisen Sie geometrisch (über die Multiplikation von Punkten auf einer Geraden mit 0-Punkt und 1-Punkt in einer affinen Ebene mit (F) und (P)), dass $(-2) \cdot (-3) = 6$ ist.

   Gehen Sie so vor: Veranschaulichen Sie zunächst das 1×3 und dann das $1 \times (-3)$ durch eine Parallelenschar [auch negative Faktoren wählen].

b) Führen Sie nach vorstehendem konkreten Einstieg die theoretische Diskussion fort, indem Sie einige der Körperaxiome für die Punktmenge einer Geraden [geometrisch] nachweisen.

Aufgabe 26 (Affine Abbildungen)

Wir betrachten in einem Desargueschen affinen Raum A [Ebene zugelassen!] die Tripel $T = (P, Q, R)$ von kollinearen Punkten P, Q, R, die nicht alle gleich sind. [Ein solches Tripel bestimmt also eindeutig seine Verbindungsgerade.]

Definition 1. Solche Tripel T und T' auf Geraden g und g' heissen *verhältnisgleich*, wenn es eine Folge $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k$ von Parallelprojektionen

$$\pi_i : \mathcal{P}(g_{i-1}) \to \mathcal{P}(g_i) \qquad (i = 1, ..., k)$$

zwischen Geraden $g = g_0, g_1, ..., g_k = g'$ gibt, bei denen T schließlich auf T' abgebildet wird:

$$T\pi_1 \cdot ... \cdot \pi_k = T'.$$

Definition 2. Eine Kollineation α von A heißt *affine Abbildung*, wenn jedes kollineare Tripel T [aus mind. zwei Punkten] verhältnisgleich zu seinem Bildtripel $T\alpha$ ist. — Die affinen Abbildungen von A bilden offenbar eine Untergruppe von $Koll(A) := Aut(A)$, die sogenannte *affine Gruppe Aff(A)*.

a) Zeigen Sie, dass für affine Räume $A(V)$ über Vektorräumen [Links-Vektorräumen über Schiefkörpern] die affine Gruppe *Aff(A)* mit $T(V) \cdot GL(V)$ übereinstimmt. Definieren Sie den Begriff *Teilverhältnis* für kollineare Tripel.

b) Kann man auch im Rahmen der axiomatischen Theorie affiner Räume Teilverhältnisse als Elemente eines Körpers einführen?

Abgabe: Montag, 22.01.2001.