Grundlagen der Geometrie (WS 00/01)
13. Aufgabenblatt

Aufgabe 28 (Minkowski-Ebenen)

Gegeben sei eine affine Ebene mit (F) und (D) und mit einer Orthogonalitätsrelation $\perp$, die unsere Axiome (O1)-(O4) sowie (H) erfüllt. [(H) gilt also auch für Dreiecke mit isotropen Seiten.] Ein Parallelogramm mit lauter isotropen Seiten heißt *isotrop* [in der Mathematik] oder *optisch* [in der Physik].

Zeigen Sie:

a) Es gibt höchstens zwei isotrope Richtungen.

b) Die beiden Diagonalen eines isotropen Parallelogramms [Existenz hier vorausgesetzt] sind zueinander orthogonal.

c) Es gibt keine oder genau zwei isotrope Richtungen.

   Hinweis. Ist l eine isotrope Gerade, so konstruiere man ein „Rechteck" mit Diagonale l und zeige, dass auch die andere Diagonale isotrop ist. [Ist das überhaupt zu erwarten?] Dazu betrachte man ein Dreieck, das die Gegenpunkte des Rechtecks, die auf der zweiten Diagonalen liegen, und den Schnittpunkt der Parallelen zu l durch einen nicht auf l liegenden Rechteck-Eckpunkt mit einer Rechteck-Seite als Ecken hat.

   Definition. Unter obigen Voraussetzungen spreche ich von einer *Euklid-Ebene*, wenn es keine isotropen Richtungen gibt, und von einer *Minkowski-Ebene*, wenn es genau zwei isotrope Richtungen gibt.

d) Man kann zeigen, dass in einer affinen Ebene mit Orthogonalität unter den o.g. Generalvoraussetzungen [automatisch] die Aussage (P) von Pappus gültig ist [S. 44 in: Robert Goldblatt, Orthogonality and Spacetime Geometry, Universitext, New York: Springer, 1987. MB: 13742]! — Zeigen Sie umgekehrt für Pappus-Ebenen [Zusatzaxiom (P)], dass die folgende durch Teil b) nahegelegte Konstruktion eine Minkowski-Ebene ergibt.

   Zwei sich schneidende Geraden i und j seien [fest] gegeben. Definieren Sie $\perp$ ((i,j)-Orthogonalität) durch $a \perp b$, wenn

   1. a und b parallel g sind oder
   2. a und b parallel h sind oder

3. a und b die beiden Diagonalen eines Parallelogramms mit zu a und b parallelen Seiten sind, und zeigen Sie, dass $\perp$ die Aussagen (O1)-(O4) und (H) erfüllt.

e) Wir setzen wieder (P) voraus. Gegeben sei nun ein Rechteck, dessen beiden Diagonalen isotrop sind. Wir nehmen als „Koordinatenachsen" die beiden Mittellinien des Rechtecks, die durch den Diagonalenschnittpunkt M gehen. Auf ihnen markieren wir ihren Schnittpunkt M mit 0 und den jeweiligen Schnittpunkt mit einer Rechteckseite mit 1. Da wir (P) voraussetzen, können wir die Punkte jeder Koordinatenachse als Elemente eines [kommutativen] Körpers mit 0 und 1 als Null- und Eins-Element auffassen [vgl. Aufg. 25 b)]. Die beiden Körper sind bekanntlich unter der Parallelprojektion in Richtung der Verbindungsgeraden der beiden 1-Punkte isomorph: deshalb identifizieren wir beide Körper und nennen ihn K. Jeder Punkt der Ebene ist — wie üblich — durch seine Koordinatenpaare (a, b) aus $K \times K$ festgelegt.

   Auf dem K-Vektorraum $K \times K$ betrachten wir das Skalarprodukt G, das bzgl. der Standardbasis die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ hat. Zeigen Sie, dass für Koordinatenpaare (a, b) und (p, q) [Vektoren aus $K \times K$] genau dann

$$G((a, b), (p, q)) = 0$$

   gilt, wenn für die zugehörigen Punkte A und P die Geraden MA und MP [im ursprünglichen Sinn $\perp$] orthogonal sind.

Abgabe: Montag, 05.02.2001.