Computeralgebra-Rundbrief der GI, DMV und GAMM (ISSN 0933-5994, http://www.gwdg.de/~cais) **30** (März 2002), 10–13.

Gedanken zur Mathematiklehrer–Ausbildung – auch mit CAS

Ulrich Schoenwaelder

Welche Rolle spielen Computeralgebra-Systeme an der Hochschule in der Mathematiklehrer-Ausbildung für die Sekundarstufen?

Randbedingungen. Der fachlichen und fachdidaktischen Ausbildung von Mathematiklehrern der Sekundarstufen stehen an der Hochschule neben der Ausbildung in einem anderen Schulfach und dem erziehungswissenschaftlichen Anteil zwischen 60 und 65 Semesterwochenstunden zur Verfügung. Eine Kernfrage ist es, wie diese beschränkte Zeit im Blick auf mannigfache Anforderungen am sinnvollsten genutzt und entsprechend in Studienordnungen geregelt wird. Die Prüfungsordnung zur ersten Staatsprüfung setzt weitere Grenzen: was hier nicht explizit gefordert wird, wird von den Studierenden („aus Zeitmangel“) nur schwer angenommen. Es ist Aufgabe der Hochschullehrer, den verbleibenden Spielraum durch Studienordnungen und das Lehrangebot zielgerichtet zu nutzen.

Ziele. Die Richtlinien für den Mathematikunterricht in den Sekundarstufen, z. B. [6, 7], legen neben inhaltlichen Zielen zunehmend Wert auf allgemeinbildende Ziele, wobei ein ganz wichtiger Aspekt die Erziehung zur *Selbständigkeit* ist, speziell zur Selbständigkeit im mathematischen Handeln. Zu einem *„Tätigen Mathematikunterricht“* gehören die Prozessziele,

- Fragen zu stellen (neugierig zu sein, Probleme zu erkennen, sie als Fragen zu formulieren, zu präzisieren, zu variieren),
- die Vorgehensweisen zu planen und zu überwachen (durch heuristische Verfahren Lösungsideen zu generieren, sie auszuformulieren und den Überblick zu behalten)
- die Ergebnisse zu dokumentieren (dabei zu kontrollieren, Fehler konstruktiv zu nutzen, Lösungen sprachlich zunehmend genauer zu entwickeln).

Wenn wir als Hochschullehrer beklagen, dass viele Studienanfänger nicht in der Lage sind, einen lesbaren Text der häuslichen Mathematikaufgaben abzuliefern, wird klar, dass dieselben Ziele im Grundstudium aller mathematikorientierten Fächer eine Rolle spielen müssen.
Mehrere der oben beschriebenen Tätigkeiten werden durch den Computer, insbesondere durch den *jederzeit* einsetzbaren CAS-Taschencomputer, unterstützt

durch

- bequemes Schreiben beim Formulieren und beim Planen und Organisieren, sowie das Kommentieren von Rechnungen,
- die graphische Veranschaulichung von Größen, Funktionen, räumlichen Vorstellungen,
- bequemes Zahlenrechnen für Beispiele, Aufstellen von Tabellen zum Entdecken von Zusammenhängen, umfangreiches Zahlenrechen bei realitätsnahen Problemen,
- bequemes symbolisches Manipulieren von Formeln.

Welche Hoffnungen der CAS-Einsatz an den Schulen in dieser Hinsicht weckt, hat H. Knechtel in diesen Rundbriefen berichtet [5].
Nach eigenen Erfahrungen der Studierenden im mathematischen Grundstudium geht es dann im fachdidaktischen Studium u. a. darum, wie diese Ziele im Schulunterricht verwirklicht werden können. Neben *fachlichen* und *fachdidaktischen* Kenntnissen und Fähigkeiten wünsche ich mir vom angehenden Mathematiklehrer, dass er die schulmathematischen Fragestellungen in einem *historischen Kontext* sehen und vermitteln kann und dass er in der Lage ist, mathematische Begriffsbildungen und Theorien in verschiedensten *Anwendungssituationen* zu motivieren und zu entwickeln, und dabei gleichzeitig die oben angesprochenen allgemeinbildenden Prozessziele im Auge behält.
Dass der *CAS-Einsatz in der Schule* geeignet ist, offene Unterrichtsformen zu fördern, in denen die angesprochenen mathematischen Tätigkeiten explizit besprochen und auch den Schülern gegenüber als Lernziele bewusst gemacht werden können, darauf wurde schon oft hingewiesen.

Ausbildung. Wie können diese anspruchsvollen Ziele in der beschränkten Zeit des Studiums und Referendariats erreicht werden? Ich stelle mir zwei Typen von speziellen Veranstaltungen für Lehramtsstudierende vor. In Veranstaltungen des ersten Typs sollen die Studierenden einen solchen tätigen Mathematikunterricht am eigenen Leibe erfahren, in dem unter einem fachlichen Thema auch die fachdidaktischen und historischen Aspekte sowie der Computer-Einsatz und Anwendungen in *integrierter* Form erlebt werden [10]; das geht allerdings nur auf Kosten des fachwissenschaftlichen Stoffumfangs. In den Veranstaltungen des zweiten Typs werden fachdidaktische Fragestellungen theoretisch formuliert und bewusst gemacht und durch Entwicklung von Unterrichtseinheiten aktiv behandelt und an der Schule erprobt. Ich will die beiden Typen *Veranstaltungen des aktiven Lernens* und *des orientierenden Lehrens* nennen. Sie treten neben *Fachveranstaltungen*, die nicht nur für Lehramtsstudierende gedacht sind (wie etwa auch eine Einführung in die Computeralgebra nebst Praktikum). Eine den Studierenden bewusste Einteilung der Lehrveranstaltungen in diese Typen könnte ihnen auch eine deutlichere Perspektive für ihr Studium geben.

Beispiele. 1. Ein CAS als Werkzeug am heimischen Computer zum numerischen Rechnen, zur grafischen Veranschaulichung und zum symbolischen Manipulieren findet verbreitet in den meisten *gemeinsamen Mathematikveranstaltungen* des Grundstudiums verschiedener Studiengänge Verwendung. Lehramtsstudierende sehen hier Einsatzmöglichkeiten in den Bereichen Analysis, Lineare Algebra und Geometrie sowie Stochastik und lernen en passant den Umgang mit einem solchen System.

2. Als *Veranstaltungen des aktiven Lernens* für Lehramtsstudierende bieten sich „Vorlesungen" in Elementarer Zahlentheorie, in Geometrie und in Stochastik an, in denen die angesprochenen Aspekte integriert zum Tragen kommen. Das erfordert auch vom Dozenten eine über die innermathematischen Kenntnisse hinaus gehende Beschäftigung mit Geschichte der Mathematik, CAS-Einsatz, Anwendungsgebieten und fachdidaktischen Fragestellungen, sowie den Mut, nicht fertigen Stoff systematisiert vorzutragen, sondern ihn teilweise von den Studierenden entwickeln zu lassen durch Diskussionen, Gruppen-, Partner- und Einzelarbeit, Protokolle [9], kleine Vorträge, Hausaufsätze und Hausaufgaben, die offen formuliert sein können, um eigenes Arbeiten anzuregen.
Als ein Beispiel einer dafür geeigneten Situation in einer Veranstaltung zu den Grundlagen der affinen Geoemetrie nenne ich das „Entdecken" des Satzes (Axioms) von Desargues über die Frage nach dem Mittelpunkt eines Punktepaares in einer axiomatisch gegebenen affinen Ebene: ist seine Konstruktion als Schnittpunkt der beiden Diagonalen eines Parallelogramms, das die gegebenen Punkte als Gegenecken besitzt, unabhängig von der Wahl des Parallelogramms? Übrigens ist die Frage nach dem Mittelpunkt auch der Ausgangspunkt für die Einführung von Koordinaten in desarguesschen affinen Ebenen, also der Möglichkeit vektorielle Analytische Geometrie zu betreiben; in diesem Rahmen läßt sich dann der *projektive* Satz von Desargues in affiner Fassung mit Hilfe der symbolischen Funktion eines CAS problemlos beweisen.
Dass es beim erlebten tätigen Mathematikunterricht nicht hauptsächlich um die Präsentation von Ergebnissen, sondern gleichgewichtig um das Kennenlernen unterschiedlicher Methoden geht, können die Studierenden auch in einer Veranstaltung zur Elementaren Zahlentheorie bei der Behandlung der pythagoreischen Tripel sehen. Zunächst haben wir verschiedene Interpretationen der Fragestellung: über den Satz des Pythagoras oder als rationale Punkte auf dem Einheitskreis (verallgemeinerbar zur Frage nach rationalen Punkten auf anderen Kurven [4]); dann verschiedene Methoden zum Auffinden der üblichen Parametrisierungen der primitiven Tripel: eine algebraische (etwa [8]), eine geometrische [11] oder eine Methode, die durch Verallgemeinerung aus dem historischen Ansatz, der in $m^2 + n^2 = (m + k)^2$ für $k = 1$ und $k = 2$ auf die pythagoreische bzw. platonische Serie führt; und schließlich eine algorithmische Beschreibung als Bahn des Tripels [1, 0, 1] unter einer ganzzahligen Matrixgruppe [3]. Eine solche Behandlung der pythagoreischen Zahlentripel erfordert natürlich mehr als eine Doppelstunde Unterrichtszeit; dies führt dazu, dass man andere Themen wie etwa auch Primzahltests oder Faktorisierungsalgorithmen für ganze Zahlen in einer solchen „Vorlesung" nicht mehr schafft.

3. Zu den *Veranstaltungen des orientierenden Lehrens* gehören das Schulpraktikum und fachdidaktische Seminare (auch über CAS-Einsatz). Für ein fachdidaktisches Seminar sehe ich zunächst zwei Schwerpunkte: eine allgemei-

ne Diskussion über Ziele des Mathematikunterrichts und dann der ansatzweise Versuch ihrer Umsetzung durch Unterrichtsentwürfe.
Als Beispiel für einen solchen Entwurf nenne ich das Thema „Krümmung von Funktionsgrafen und parametrisierten Kurven“. Da unsere Lehramtsstudierenden in der Regel keine Kenntnisse in Differentialgeometrie mitbringen, müssen sie sich die beiden Zugänge über den Berührkreis bzw. die Geschwindigkeit der Richtungsänderung der Tangente zunächst selbst erarbeiten, wobei das eigene Lernerlebnis für die Unterrichtplanung sensibilisiert. Die Entscheidung für ein Hauptziel der Unterrichtsreihe (etwa „Begriffsbildung“) wird dann Einfluß auf die methodische Durchführung inklusive des CAS-Einsatzes als Werkzeug zur grafischen Veranschaulichung, zur symbolischen Umforung der entstehenden Formel für die Krümmung und zu ihrer numerischen Auswertung haben.

Personelle Bewältigung dieser Aufgaben. Wo keine Professoren für die Fachdidaktik zur Verfügung stehen, können Fachmathematiker in Zusammenarbeit mit Lehrbeauftragten aus dem Schulbereich die Veranstaltungen des orientierenden Lehrens durchführen und auf diese Weise sich auch den fachdidaktischen Hintergrund für die Veranstaltungen des aktiven Lernens erarbeiten. Leider ist auf absehbare Zeit nicht mit genügend vielen promovierten Fachdidaktikern für Schule und Hochschule zu rechnen, wie ja auch ein Mangel an Mathematiklehrern vorprogrammiert ist. Umso mehr sollten wir darauf achten, dass unsere Absolventen für die durch tätigen Mathematikunterricht gestellten *höheren Anforderungen* [2, S. 27] an Schüler und Lehrer *gut ausgebildet* sind. Für diese wichtige Aufgabe brauchen wir Kollegen an den Hochschulen, die dafür auf anderes verzichten, aber durch die Zusammenarbeit mit Kollegen von den Schulen und im Kontakt mit der Arbeit an den Schulen ganz neue Erfahrungen machen wollen. Als Einstieg bieten sich gemeinsame Projekte zum CAS-Einsatz an einer Schule an [1].

Literatur

[1] Uwe Bettscheider und Ulrich Schoenwaelder. Tätiger Mathematikunterricht mit dem Cassiopeia A-22T. `http://www.MUmitCAS.de`, Februar 2002.

[2] Wilfried Herget, Helmut Heugl, Bernhard Kutzler und Eberhard Lehmann. Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? *Computeralgebra-Rundbrief*, 27:25–31, Oktober 2000. ISSN 0933-5994.

[3] J. E. Hofmann. Beispiele zur unbestimmmten Analytik im Sinne der Alten. *Der Mathematikunterricht*, 9(5):5–37, 1963.

[4] Bernd Jakob. Pythagoreische Tripel, algebraische Kurven und Diophantische Gleichungen. *Didaktik der Mathematik*, 23:99–105, 1995.

[5] Heiko Knechtel. Computeralgebra-Systeme in der Schule - Erfahrungen in Deutschland. *Computeralgebra-Rundbrief*, 25:18–22, Oktober 1999. ISSN 0933-5994.

[6] Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen. *Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe I – Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen: Mathematik.* Schriftenreihe Schule in NRW Nr. 3106. Ritterbach Verlag, `http://www.ritterbach.de`, 1998. ISBN 3-89314-558-3.

[7] Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen. *Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II – Gymsasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen: Mathematik.* Schriftenreihe Schule in NRW Nr. 4720. Ritterbach Verlag, 1999. ISBN 3-89314-618-0. pdf-File beim Service „LEHRPLÄNE online“ des Ritterbach-Verlages erhältlich unter `http://www.schul-welt.de/verlag/schulwelt/news.asp` (22.02.2002).

[8] Pierre Samuel. *Algebraic Theory of Numbers.* Kershaw Publ. Co., London, 1972.

[9] Ulrich Schoenwaelder. Protokolle zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“ WS 2000/01. `http://www.math.rwth-aachen.de/LDFM/homes/Ulrich.Schoenwaelder/Gdg/grundlagendergeometrie.html`, Februar 2001.

[10] Christoph Selter. Allgemeine Lernziele für die Lehrerbildung. In C. Selter und G. Walther, editor, *Mathematikdidaktik als design science: Festschrift für Erich Christian Wittmann*, pages 206–216. Ernst Klett Grundschulverlag, 1999. ISBN 3-12-200060-1.

[11] H. Winter. Gestalt und Zahl – zur Anschauung im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Pythagoreischen Zahlentripel. In C. Selter und G. Walther, editor, *Mathematik als design-science: Festschrift für Erich Christian Wittmann*, pages 254–269. Ernst Klett Grundschulverlag, 1999. ISBN 3-12-200060-1.

Ulrich Schoenwaelder (Aachen, `uschoenw@math.rwth-aachen.de`)