

22. Oktober 2007. U. Schoenwaelder; <http://www.math.rwth-aachen.de/~Ulrich.Schoenwaelder> HB = Hochschulbibl. RWTH, HBZ = <http://www.hbz-nrw.de/> (HBZ-CD-ROM Online), MB = Mathematikbibl., DB = Didaktikbibl. (Winter), FH = Bibl. Fachhochschule Aachen, FL = Fernleihe, IB Nr. Institutsbibliothek Nr., LB = HB-Lehrbuchsammlung, LS = HB-Lesesaal

LITERATUR ZU NEGATIVEN ZAHLEN

- [1] B. Andelfinger, B. Bekemeier, and H. N. Jahnke. *Zahlbereichserweiterungen als Kernlinie des Lehrplans – Probleme und Alternativen*. Occasional Paper 31. Arbeiten aus dem Institut für Mathematik der Universität Bielefeld. Bielefeld: IDM, 1983. HBZ.
- [2] Bernhard Andelfinger, editor. *Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen/Quellensammlung*, Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Soest: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, 1984. HB: KB1824-4+1. Vgl. [4, 3].
- [3] Bernhard Andelfinger, editor. *Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen/2*, Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Soest: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, 1985. HB: KB1595-49+1. Vgl. [2, 4].
- [4] Bernhard Andelfinger, editor. *Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen/Hauptband*, Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Soest: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, 1985. HB: KB1595-44+1. Vgl. [2, 3].
- [5] Bernhard Andelfinger. Plusminusnull. *mathematik lehren*, 35:19–21, 1989.
- [6] B. Artmann. *Eine Einführung in die Algebra. Unter ständiger Berücksichtigung der ganzen und der rationalen Zahlen*. Moderne Mathematik in elementarer Darstellung 13. Vandenhoeck & Ruprecht, 1973. HB: Bb1126-13.
- [7] Peter Baireuther. Mathematische Unterrichtspraxis - Was ist das? *Mathematische Unterrichtspraxis*, 19(4):1–3, 1998. ISSN 0721-8419.
- [8] R. Borges. Negative Zahlen in der Grundschule? *Mathematische Unterrichtspraxis*, 16:21–30, 1995.
- [9] Willibald Dörfler. Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktion. In W. Dörfler, editor, *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung*, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik (Klagenfurt) 16, pages 55–125. Wien: HPT; Stuttgart: Teubner, 1988. ISBN 3-209-00770-5 (HPT); 3-519-02794-1 (Teubner). HB: Ka7590-16+1. Über Handlungen zur Abstraktion/Idealisierung und Verallgemeinerung. S. 85: Beispiel: Ganze Zahlen.
- [10] M. Enders. Pfeil und Leiter als Grundbegriffe des arithmetischen Unterrichts. *Der Mathematikunterricht*, 1(4 Aufbau des Zahlensystems):64–88, 1955. HB: Z5577-1/2. Ganze Zahlen als Reihenfolge (Ordinalzahlen). Addition/Subtraktion via Pfeilen (Feder, Schaft, Spitze): S. 70: I Zuzählen - Pfeil vorwärts ansetzen (Spitze - Feder); II Abziehen - Pfeil rückwärts ansetzen (Spitze - Spitze); III Differenz $a - b$ - Pfeil (Weg) von b bis a (Feder - Feder).
- [11] Hans Freudenthal. Tendenzen zur Mathematik in der Grundschule. *Didaktik der Mathematik*, 1(1):2–11, 1973. HB: Z5339-1/2. Kap. 3: Zahlengerade; Kap. 4: Geometrische und algebraische Methode (Verschiebung und Umlegung für Addition und Subtraktion als Abbildung der Zahlengeraden).
- [12] Hans Freudenthal. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel, 1983. ISBN 90-277-2261-7. MB: 13486. Ch. 15: Negative numbers and directed magnitudes.
- [13] Hans Freudenthal. Einführung der negativen Zahlen nach dem geometrisch-algebraischen Permanenzprinzip. *mathematik lehren*, 35:26–37, 1989. Geht zweidimensional geometrisch vor mit Pfeilen und Geradengleichungen.
- [14] Athanassios Gagatsis and Jannis Thomaidis. Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs „absoluter Betrag“. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 16:3–46, 1995. HB: Z5899-15/16. S. 6: Vietas ‘minus incerta’ nach Jacob Klein [31], S. 232.
- [15] E. Geck. Die negativen Zahlen. *Der Mathematikunterricht*, 1(4 Aufbau des Zahlensystems):32–36, 1955. HB: Z5577-1/2. Addition via Operatoren $+k = (k$ Schritte nach rechts mit Blick nach rechts) und $-k = (k$ Schritte nach links ebenfalls mit Blick nach rechts, also rückwärts). Multiplikation über Rechteck-Zerlegung motiviert.
- [16] Siegrid Gey. „Negative Ziffern“ – eine Übungsstunde zum Rechnen mit negativen Zahlen in Klasse 7. *mathematik lehren*, 19:54–55, 1986.
- [17] G. Glaeser. Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2:303–346, 1981. ISSN 0246-9367. Stagnation au stade des opérations concrètes, erschwert Übergang von konkret zu relational (bei negativen Zahlen).
- [18] H. Gorenflo. Das Permanenzprinzip im Unterricht. *Didaktik der Mathematik*, 2(2):149–158, 1974. HB: Z5339-1/2. Negative ganze Zahlen via Permanenzprinzip.
- [19] H. Griesel. Der mathematische Hintergrund der natürlichen Zugänge zu den negativen Zahlen. *Der Mathematikunterricht*, 19(1 Ganze und rationale Zahlen):54–77, 1973. HB: Z5577-19. Im selben Heft [29, 77].
- [20] D. Hackenberg. Verwendung der Restklassen zur Begründung des Rechnens mit negativen Zahlen. *Didaktik der Mathematik*, 9(3):195–200, 1981. HB: Z5339-1/2.
- [21] L. Hefendehl-Hebeker. Die Zahl NULL im Bewußtsein von Schülern – Eine Fallstudie. *Journal für Mathematikdidaktik*, 3:47–66, 1982. HB: Z5899.
- [22] L. Hefendehl-Hebeker. „...das muß man doch auch noch anders erklären können!“ Protokoll über einen didaktischen Lernprozeß. *Der Mathematikunterricht*, 34(2):4–18, 1988. HB: Z5577-34. An Vorerfahrungen anknüpfen? Addition und Subtraktion in \mathbb{Q} .
- [23] L. Hefendehl-Hebeker. Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion – geistige Hindernisse in ihrer Geschichte. *mathematik lehren*, 35:6–12, 1989. HBZ.
- [24] L. Hefendehl-Hebeker. Erfahrungen mit negativen Zahlen im Gymnasium. *mathematik lehren*, 35:48–58, 1989. HBZ. Tabellen für Multiplikation.

- [25] Lisa Hefendehl-Hebeker. Unstetigkeiten im Lehrprozeß - oder: „Das muß man doch auch noch anders erklären können“. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 1987:162–165, 1987. HB: Bb1256-1987 nicht vorhanden! Fortgeführt in [22, 26, 23].
- [26] Lisa Hefendehl-Hebeker. Die Einführung der negativen Zahlen als unterrichtliches Problem. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 1989:183–186, 1989. HB: Bb1256-1989. Übergang vom Größenbegriff zum theoretischen Zahlverständnis.
- [27] J. Humenberger and H.-Ch. Reichel. *Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik 31. Mannheim: BI, 1995. ISBN 3-411-17291-6. HB: KB5084-31. S. 249: Einführung von negativen Zahlen (5 Möglichkeiten).
- [28] H. N. Jahnke. Numeri Absurdi Infra Nihil. Die negativen Zahlen. *mathematik lehren*, 121:21–22, 39–40, 2003.
- [29] A. Kirsch. Die Einführung der negativen Zahlen mittels additiver Operatoren. *Der Mathematikunterricht*, 19(1):5–39, 1973. HB: Z5577-19. Im selben Heft [19, 77].
- [30] A. Kirsch, editor. *Ganze und rationale Zahlen*. Der Mathematikunterricht 19, Heft 1. Ernst Klett Verlag, 1973. HB: Z 5577. Siehe Weidig, Griesel.
- [31] Jacob Klein. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1968, Dover 1992. HBZ. Zitiert in [14].
- [32] D. Küchemann. Children’s understanding of integers. *Mathematics in School*, 9(2):31–32, 1980. ISSN 0305-7259.
- [33] S. Lang. *Undergraduate Algebra*. UTM. Springer-Verlag, 1987, ²1990. App. §2: The integers (Konstruktion), Ch. I: The integers (Eukl. Algor., unique factorization, Primzahlsätze).
- [34] J. Laub, E. Hruby, H.-C. Reichel, D. Litschauer, and H. Gross. *Mathematik Arbeitsbuch 3*. Hölder – Pichler – Tempsky, 1987. S. 32: negative Zahlen.
- [35] Josef Lauter. Negative Zahlen – bereits in der Grundschule? In Herbert Henning, editor, *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung. Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden*, pages 69–74. Oldenburg: Bültmann & Gerrits, 1999. ISBN 3-928076-09-4. HBZ.
- [36] W. Lietzmann. *Methodik des mathematischen Unterrichts. Band 1, 2*. Leipzig: Quelle & Meyer, Heidelberg, Band 1: 1953. Band 2: ¹1951, ²1953. Bearb. von Stender: ³1961. Bearb. von Jahner: ⁴1968, Jahner-Lietzmann ⁵1978 vollst. neugestaltete Aufl. HB: Bb1081+3, Bb1081+4, Bb1081+5. MB: ³AL 636; ⁵AL 666. II.3.§2: negative Zahlen.
- [37] Walter Lietzmann. *Methodik des mathematischen Unterrichts, Band 1: Organisation, allgemeine Methode und Technik des Unterrichts*. Handbuch des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts 7,1. Leipzig: Quelle & Meyer, ²1926. MB: AL 641a.
- [38] Walter Lietzmann. *Methodik des mathematischen Unterrichts, Band 3: Didaktik der angewandten Mathematik*. Handbuch des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts 7,3. Leipzig: Quelle & Meyer, ²1926. MB: AL 641c, A 837.
- [39] G. Malle and J. Hinzmann. Negative Zahlen. *mathematik lehren*, 76:23–45 (= Mathe-Welt 1–23), 1996.
- [40] Günther Malle. Die Entstehung neuer Denkgegenstände – untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In W. Dörfler, editor, *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung*, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik (Klagenfurt) 16, pages 259–319. Wien: HPT; Stuttgart: Teubner, 1988. ISBN 3-209-00770-5 (HPT); 3-519-02794-1 (Teubner). HB: Ka7590-16+1. Über Handlungen zur Abstraktion/Idealisierung und Verallgemeinerung. Vgl. [41].
- [41] Günther Malle. Die Entstehung negativer Zahlen als Denkgegenstände. *mathematik lehren*, 35:14–18, 1989. Vgl. [40].
- [42] Günther Malle. Die Entstehung der negativen Zahlen. Der Weg vom ersten Kennenlernen zu eigenständigen Denkobjekten. *mathematik lehren*, 142:52–57, 2007. Artikel im Band „Auf dem Weg zu neuen Zahlen“.
- [43] Günther Malle. Zahlen fallen nicht vom Himmel. Ein Blick in die Geschichte der Mathematik. *mathematik lehren*, 142:4–11, 2007. Artikel im Band „Auf dem Weg zu neuen Zahlen“.
- [44] Alberto A. Martinez. *Negative Math: How Mathematical Rules Can be Positively Bent; an Easy Introduction to the Study of Developing Algebraic Rules to Describe Relations Among Things*. Princeton, NJ [u.a.]: Princeton Univ. Press, 2006. ISBN 978-0-691-12309-7; 0-691-12309-8. HBZ.
- [45] Mathe-Welt. Lernwerkstatt Negative Zahlen. In R. vom Hofe and G. Malle, editors, *Auf dem Weg zu neuen Zahlen*, in *mathematik lehren* 142, pages 27–44. Seelze: Friedrich Verlag, 2007. Schüler-Arbeitsheft. Ab 5. Schuljahr: Negative Zahlen im Alltag entdecken; Spiele mit Zahlen: Wie kannst Du gewinnen? Rechnungen (er)finden und verstehen.
- [46] Carsten Miller and Volker Ulm. *Experimentieren und Entdecken mit dynamischen Arbeitsblättern*. Erhard Friedrich Verlag, 2006. ISBN 978-3-617-62115-8. Mathematik Sek I Buch inkl. CD, Schullizenz. Neben der Geometrie geht es außerdem um lineare und quadratische Funktionen sowie um den Zahlenraum der negativen Zahlen. Inhalt: Körper / Dreiecke / Vierecke / Winkel und Kreis / Zahlen / Funktionen.
- [47] H. Minning. Die Vektoren als Hilfsmittel zur Einführung der Rechenregeln für relative Zahlen. *Der Mathematikunterricht*, 1(4 Aufbau des Zahlensystems):22–31, 1955. HB: Z5577-1/2.
- [48] H. Postel and K. Schäfer. Einführung der ganzen Zahlen anhand anschaulicher Modelle. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 1969(Teil 2):34–41, 1971. HB: Bb1256-3,2.
- [49] Friederike Pronold and Gerald Wittmann. Lernspiele für den Themenberich „Ganze Zahlen“. *Mathematik in der Schule*, 37:258–261, 1999. HB: Z5724-37. Spiel 1: Die Eroberer. Spiel 2: Schwarzer Peter. Spiel 3: Bingo.
- [50] Gerd Rothfuchs. Zahlenbereichserweiterung – Addieren und Subtrahieren im positiven und negativen Bereich. *Hauptschulmagazin*, 10:35–38, 1985. ISSN 0724-3502. HBZ. Behandelt am Zahlenstrahl nur Aufgaben der Form $a \pm b$ ($a, b \in \mathbb{N}$) via Pfeiladdition.
- [51] G. Schubring. Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. „*petit x*“, 12:5–32, 1986. ISSN 0759-9188.
- [52] G. Schubring. Epistemologische Debatten über den Status negativer Zahlen in deutschen und französischen Lehrbüchern 1795 - 1845. *Mathematische Semesterberichte*, 35(2):183–196, 1988. HB: Z1538.
- [53] Gert Schubring. *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical

- Sciences. Berlin: Springer, 2005. ISBN 0-38722836-5. 129 Euro. Review (Schappacher): *Math. Semesterber.* 53 (2006), 135–136: Was negative und unendlich kleine Größen gemeinsam haben.
- [54] Rolf Schultz. Schüler spielen Sparkasse. Eine UE zur Einführung der negativen Zahlen in Klasse 7. *mathematik lehren*, 22:20–25, 1987. HBZ. Beliebtes Kontomodell; ohne Storno für die Subtraktion negativer Zahlen, hier Lebenszeiten von Personen, die z. T. vor unserer Zeitrechnung geboren sind.
- [55] K. Seebach. Einführung der negativen Zahlen mit Hilfe von Operatoren. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 1969(Teil 2):22–29, 1971. HB: Bb1256-3,2.
- [56] K. Seebach. Zahlbereichserweiterungen mit Hilfe von Operatoren. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 24(3):142–145, 1971. HB: Z848.
- [57] Z. Semadeni. A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 15:379–395, 1984. DB. Enthält das Markenmodell (rote und schwarze Marken, die sich gegenseitig aufheben). Kritik hierzu in [40].
- [58] Anna Sfard. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22:1–36, 1991. DB. Are numbers and functions basically nothing but processes that lead eventually to structural concepts? Concept formation in three steps (p. 18): interiorization, condensation, reification. Beispiel: negative Zahlen.
- [59] H. Spiess. Ein Vorschlag zur Einführung negativer Zahlen unter besonderer Berücksichtigung von Verwendungssituationen. *Mathematica didactica*, 2:93–109, 1979. DB.
- [60] H. Spiess. Didaktische Überlegungen zur Motivation von Definitionen. *Mathematica didactica*, 4:117–127, 1981. DB. Heuristisch vom Kontext ausgehend kann man eine vernünftige Definition für die Multiplikation negativer Zahlen finden.
- [61] H. Spiess. Wie Hauptschüler mit Problemen aus dem Umfeld negativer Zahlen umgehen. *mathematik lehren*, 35:42–46, 1989. Mit Skalen und Veränderungen.
- [62] Hellmuth Spiess. Spannungen zwischen Referenzkontexten und Konstrukten am Beispiel der negativen Zahlen. Anmerkungen zum Beitrag von H. Steinbring im JMD 15 (1994), Heft 3/4, S. 277 - 309. *Journal für Mathematikdidaktik*, 16(3/4):329–341, 1995. HB: Z5899-15/16. Zu [63]. S. 339 oben: In [60] habe ich vorgestellt, wie man heuristisch vom Kontext ausgehend eine vernünftige Definition der Multiplikation finden kann.
- [63] Heinz Steinbring. Symbole, Referenzkontexte und Konstruktion mathematischer Bedeutung – am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht. *Journal für Mathematikdidaktik*, 15(3/4):277–309, 1994. HB: Z5899. Wechsel der Diskursebenen (oe). Vgl. [62].
- [64] A. Steiner. Zur Einführung der ganzen Zahlen. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 24:145–147, 1971. HB: Z848-24.
- [65] H. Stever. Einführung der ganzen Zahlen und ihre Veranschaulichung durch Spiele. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 1969(Teil 2):42–48, 1971. HB: Bb1256-3,2.
- [66] Y. Thomaidis. Aspects of negative numbers in the early 17th century. An approach for didactic reasons. *Science & Education*, 2:69–86, 1993.
- [67] Bernhard Uher. Rationale Zahlen. *mathematik lehren*, 66:23–46 (= Mathe-Welt 1–24), 1994.
- [68] R. Vernay. Mit Würfel und Karten in die Minuszahlen. Vier Spiele zum Rechnen mit ganzen Zahlen. *mathematik lehren*, 43:24–27, 1990.
- [69] U. Viet. Modelle zur Einführung der Addition und der Subtraktion von ganzen Zahlen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 1969(Teil 2):58–64, 1969. HB: Bb1256-3,2.
- [70] U. Viet. Ein Spiel für die Unterrichtseinheit „Ganze Zahlen“. In H.-J. Vollrath, editor, *Zahlbereiche. Didaktische Materialien für die Hauptschule*, pages 118–131. Stuttgart: Klett, 1983. ISBN 3-12-928432-X. HBZ.
- [71] Ursula Viet and Heinz Ragnitz. *Negative Zahlen*. Eingreifprogramme 8./9. Schulj.: Mathematik. Stuttgart: Klett, 1968, 1970, 1972, 1973. ISBN 3-12-987110-1. HBZ.
- [72] Rudolf vom Hofe. Varianten im Unterrichtsgang. Von den natürlichen zu den rationalen Zahlen. *mathematik lehren*, 142:12–13, 2007. Basisartikel im Band „Auf dem Weg zu neuen Zahlen“.
- [73] H. von Majewski. Geometrische Beweise mit erprobter Grundlage in der gymnasialen Sekundarstufe I. *Praxis der Mathematik*, 31(1):9–19, 1989. HB: Z 1757, MB: Z 101. S. 11: In diesem Zusammenhang führen wir übrigens schon in Klasse 7 auch negative Koordinaten ein, um später im Algebraunterricht die Regeln für die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen mit Hilfe der Vektoraddition veranschaulichen und begründen zu können.
- [74] M. Wagenschein, E. Schuberth, and P. Buck. Minus mal Minus. *Forum Pädagogik*, 2:56–61, 1988. ISSN 0933-9922.
- [75] I. Weidig. Einführung der ganzen Zahlen durch eine Ordnungsstruktur. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, 18:213–224, 1971. HB: Z1538-18. Axiomatische Konstruktion.
- [76] I. Weidig. Die ganzen Zahlen als Ordnungsstruktur. *Beiträge zum Mathematikunterricht/1971*, 1971:271–276, 1972. HB: BB1256-5+1.
- [77] I. Weidig. Die Multiplikation ganzer Zahlen. *Der Mathematikunterricht*, 19(1 Ganze und rationale Zahlen):40–53, 1973. HB: Z5577-19. Im selben Heft [29, 19].
- [78] H. Winter. Da ist weniger mehr - die verdrehte Welt der negativen Zahlen. *mathematik lehren*, 35:22–25, 1989.
- [79] H. Winter. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Didaktik der Mathematik. Vieweg, 1989. HB: Kb5960. ISBN 3-528-08978-4.
- [80] H. Winter. Ganze und zugleich gebrochene Zahlen. *mathematik lehren*, 123:64–88, 2004.
- [81] Jochen Ziegenbalg. Fachdidaktische Prinzipien als Grundlage einer Design Science erläutert am Hankelschen Permanenzprinzip. In Chr. Selter and G. Walther, editors, *Mathematikdidaktik als design-science, Festschrift für Erich Christian Wittmann*, page ?? Ernst Klett Grundschulverlag, 1999. EB: U 2594. Manuskript: <http://www.ph-karlsruhe.de/wp/ziegenbalg/>.