Zerlegungszahlen endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen genehmigte Habilitationsschrift[1] zur Erlangung der venia legendi

vorgelegt von

Dr. Gerhard Hiß

aus

Freiburg i. Br.

Referenten: W. Plesken
H. Pahlings

Tag der Habilitation: 13. Juni 1990

[1]Korrigierte Version vom 6. April 2000

Für
ANITA

Danksagung

Es ist mir eine große Freude, all jenen zu danken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Allen voran gebührt mein Dank M. Geck. Stets war er bereit, meine Fragen anzuhören und mit mir darüber zu sprechen. Oft genug wurden dadurch erst die wahren Feinheiten eines Problems aufgedeckt. Er hat große Teile einer ersten Fassung der Arbeit gelesen und zahlreiche Verbesserungen vorgeschlagen. Aufbau und Inhalt der Kapitel 2–4 haben wesentlich davon profitiert.

Mit M. Broué, R. Carter, B. Külshammer und W. Plesken führte ich klärende und hilfreiche Gespräche zum Inhalt dieser Arbeit. Ohne die großzügige und weitsichtige Bereitstellung der Rechneranlagen durch J. Neubüser und W. Plesken wäre diese Arbeit wohl nie entstanden. J. Michel verdanke ich einen wertvollen Literaturhinweis. M. Geck und G. Malle haben einige Tensorprodukte in den Ree-Gruppen ausgerechnet, ohne die deren Bäume nicht hätten bestimmt werden können. M. Zumbroich hat durch seine umfassende Kenntnis der Feinheiten der deutschen Sprache dazu beigetragen, die Anzahl der sprachlichen Ungereimtheiten, insbesondere in der Einleitung, zu verkleinern. H. Pahlings, W. Plesken und B. Srinivasan lasen eine erste Fassung der Arbeit. Ihre zahlreichen Verbesserunsvorschläge haben die Lesbarkeit der vorliegenden Schrift wesentlich erhöht. Ihnen allen sei an dieser Stelle dafür gedankt.

Meinen beiden MOC-Mitautoren K. Lux und R. Parker danke ich für die Erlaubnis, Teile der Theorie von MOC in diese Arbeit aufzunehmen; dem ersten auch für das Lesen eines Teils der Arbeit.

Schließlich bedanke ich mich von ganzem Herzen bei A. Flamm für ihre unerschöpfliche Geduld, ihre unzähligen Ermunterungen und nicht zuletzt auch für ihre Hilfe bei den Korrekturen des Anhangs.

Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole

1. Zahlen

p, ℓ	Primzahlen
q	positive reelle Zahl, Potenz von p
$\pi(n)$	Menge der Primteiler von n
$a \mid b$	a teilt b
$\ell^d \parallel n$	höchste Potenz von ℓ, die in der ganzen Zahl n aufgeht
$\mathrm{ggT}(a, b)$	größter gemeinsamer Teiler von a und b
n_p, $n_{p'}$	p- bzw. p'-Anteil der ganzen Zahl n
$\lvert M\rvert$	Anzahl der Elemente der endlichen Menge M
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$\mathbb{Q}_\ell$	ℓ-adische Zahlen
$\mathbb{Z}_\ell$	ℓ-adische ganze Zahlen
$\mathbb{F}_q$	Körper mit q Elementen

2. Matrizen

X^t	Transponierte der Matrix X
$\det(X)$	Determinante von X
$\mathrm{Spur}(X)$	Spur von X
E	Einheitsmatrix von nicht näher bestimmtem Format
E_n	$n \times n$-Einheitsmatrix
J	Alles-Eins-Matrix von nicht näher bestimmtem Format
$\bar{X}$	Anwendung des Homomorphismus $\bar{\ }$ auf jeden Eintrag der Matrix X, für Charaktertafeln komplexe Konjugation
$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$	Diagonalmatrix mit Einträgen $a_1, \ldots, a_n$

3. Gruppen

$H \leq G$	H ist Untergruppe von G
$H < G$	H ist echte Untergruppe von G
$H \lhd G$	H ist Normalteiler von G
$Z(G)$	Zentrum von G
$C_G(X)$	Zentralisator von $X \subseteq G$
$N_G(H)$	Normalisator der Untergruppe H in G
$\langle X\rangle$	von $X \subseteq G$ aufgespannte Untergruppe

$\mathbb{Z}_n$, bzw. n	zyklische Gruppe der Ordnung n
AB	Produkt der Untergruppen A, B von G
$A{:}B$	zerfallende Erweiterung von A mit B, ($A \lhd A{:}B$)
$A * B$	zentrale Erweiterung von A und B
$G^{\#}$	$G \setminus \{1\}$
G_ℓ, $G_{\ell'}$	Menge der ℓ- bzw. ℓ'-Elemente der Gruppe G
$\mathrm{rank}_\ell(G)$	ℓ-Rang der abelschen Gruppe G
$\mathrm{rank}(G)$	ℓ-Rang der abelschen Gruppe G, wenn ℓ aus dem Zusammenhang hervorgeht
$\mathrm{Aut}(G)$	Gruppe der Automorphismen von G
$\lvert x\rvert$	Ordnung des Elementes x

4. Gruppen mit BN-Paar

B	Boreluntergruppe
N	monomiale Untergruppe
H	Cartanuntergruppe $H = B \cap N$
W	Weylgruppe $W = N/H$
U	unipotente Untergruppe, $B = UH$, $U \lhd B$
Φ	Wurzelsystem
Π	Fundamentalsystem
Φ^+	positives System bzgl. Π
I	Indexmenge: $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$
s_α	Spiegelung zur Wurzel α
J	Teilmenge von I
Π_J	$\{\alpha_i \in \Pi \mid i \in J\}$
W_J	$\langle s_{\alpha_i} \mid i \in J\rangle$
Φ_J	$W_J(\Pi_J) = \{w(\alpha) \mid w \in W_J, \alpha \in \Pi_J\}$
P_J	parabolische Standard-Untergruppe
L_J	Standard-Levi-Untergruppe = Standard-Levi-Komplement
$\mathcal{L}$	Menge der Standard-Levi-Untergruppen
U_J	unipotentes Radikal von P_J
W_Δ	$\langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\rangle$ für $\Delta \subseteq \Pi$
Φ_Δ	$W_\Delta(\Delta) = \{w(\alpha) \mid w \in W_\Delta, \alpha \in \Delta\}$ für $\Delta \subseteq \Pi$

5. Algebraische Gruppen

$\mathbb{F}$	algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p
$\mathbf{G}$	algebraische Gruppe über $\mathbb{F}$
$\mathbf{G}^*$	zu $\mathbf{G}$ duale Gruppe

$\mathbf{G}^\circ$	Zusammenhangskomponente der 1 in $\mathbf{G}$
$\mathbf{B}$	Boreluntergruppe
$\mathbf{T}$	maximaler Torus
$\mathbf{L}$	reguläre Untergruppe
$\mathbf{U}$	unipotente Untergruppe
ε_G	relativer Rang von $\mathbf{G}$
F	Frobenius-Abbildung von $\mathbf{G}$
F^*	zu F duale Frobenius-Abbildung von $\mathbf{G}^*$
$\mathbf{G}^F = G$	Menge der Fixpunkte von F in $\mathbf{G}$
W	Weylgruppe von $\mathbf{G}$, $W \cong N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$
$((x))$	$\mathbf{G}$-Konjugiertenklasse von $x \in \mathbf{G}$
(x)	G-Konjugiertenklasse von $x \in G$

6. Ringe und Moduln

R	kommutativer Ring mit 1
R^*	Gruppe der Einheiten von R
A	R-Algebra
X	A-Gitter
$X \mid Z$	X ist direkter Summand des A-Gitters Z
nX	n-fache direkte Summe des Gitters X
RG	Gruppenalgebra von G über R
$\mathcal{H}_{R,q}(W)$	Hecke-Algebra zur Weyl-Gruppe W über R mit Parameter $q \in R^*$
$\mathcal{H}_X(W)$	generische Hecke-Algebra: $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[X^{1/2},X^{-1/2}],X}(W)$, wobei X eine Unbestimmte ist
$\delta(\mathcal{H})$	Diskriminante der Algebra $\mathcal{H}$

7. Darstellungtheorie

(K, R, k)	ℓ-modulares System: R: vollständiger, diskreter Bewertungsring vom Rang 1 und Charakteristik 0 K: Quotientenkörper von R k: Restklassenkörper von R der Charakteristik $\ell \neq 0$
πR	maximales Ideal von R, $k = R/\pi R$
K, R, k	triviale Moduln
$\mathrm{rank}_R(X)$	R-Rang des A-Gitters X
$\mathrm{rank}(X)$	R-Rang des A-Gitters X, wenn R aus dem Zusammenhang hervorgeht

$\mathrm{Hom}_A(X,Y)$	Menge der A-Homomorphismen von X nach Y
$\mathrm{End}_A(X)$	$\mathrm{Hom}_A(X,X)$
$[M,N]_A$	$\mathrm{rank}_R(\mathrm{Hom}_A(X,Y))$
$\mathrm{Kern}(\varphi)$	Kern des Homomorphismus φ
$\mathrm{Bild}(\varphi)$	Bild des Homomorphismus φ
X^K	$A \otimes_R K$-Modul $X \otimes_R K$ (Konstantenerweiterung)
$\bar{X}$	$A \otimes_R k$-Modul $X \otimes_R k = X/\pi X$ (Reduktion modulo ℓ)
$\mathrm{ch}(X)$	Charakter von X^K
$\mathrm{Res}_H^G(X)$	Einschränkung des G-Moduls X auf die Untergruppe H
X_L	Einschränkung des G-Moduls X auf die Untergruppe L
$\mathrm{Ind}_H^G(X)$	Induktion des H-Moduls X auf G
$\mathrm{Infl}_L^P(X)$	Inflation des L-Moduls X auf P, wenn P einen Normalteiler U mit $P/U \cong L$ besitzt
$\tilde{X}$	Inflation des L-Moduls X auf P, wenn P und L aus dem Zusammenhang ersichtlich sind
$\mathrm{vtx}(X)$	Vertex des RG- oder kG-Moduls X
PIM	projektiv unzerlegbarer RG- oder kG-Modul

8. Charaktere

$\mathrm{Irr}(G)$	Menge der irreduziblen K-Charaktere von G
$\mathrm{IBr}(G)$	Menge der irreduziblen Brauerchraktere von G bezüglich (K,R,k)
e	zentrales Idempotent in RG
$\mathrm{Irr}(G,e)$	Menge der irreduziblen Charaktere χ mit $\chi(eg) = \chi(g)$ für alle $g \in G$
$\mathrm{Irr}(eRG)$	$\mathrm{Irr}(G,e)$
$\mathrm{IBr}(G,e)$	Menge der irreduziblen Brauercharaktere von ekG
$\mathcal{R}_K(G,e)$	Menge aller $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von $\mathrm{Irr}(G,e)$
$\mathcal{R}_K(G)$	$\mathcal{R}_K(G,1)$
$\mathcal{R}_k(G,e)$	Menge aller $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von $\mathrm{IBr}(G,e)$, aufgefaßt als Teilmenge von $\mathcal{R}_K(G,e)$ durch Null-Fortsetzung
$\mathcal{R}_k(G)$	$\mathcal{R}_k(G,1)$
$\mathcal{R}_k^{pr}(G,e)$	Menge aller $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von projektiven Charakteren von eRG
$\mathcal{R}_k^{pr}(G)$	$\mathcal{R}_k^{pr}(G,1)$
$\mathcal{C}(G,e,K)$	Menge der Klassenfunktionen χ von G mit Werten in K und $\chi(eg) = \chi(g)$ für alle $g \in G$
$\mathcal{C}(G)$	$\mathcal{C}(G,1,K)$
$\mathcal{C}(G,e,R)$	Menge der Klassenfunktionen χ von G mit Werten in R und $\chi(eg) = \chi(g)$ für alle $g \in G$

$\mathcal{C}_{\ell'}(G,e,K)$	Menge der Klassenfunktionen aus $\mathcal{C}(G,e,K)$, die außerhalb der ℓ'-Klassen Null sind
$\mathcal{C}_{\ell'}(G)$	$\mathcal{C}_{\ell'}(G,1,K)$
$\mathcal{C}_{\ell'}(G,e,R)$	$\mathcal{C}(G,e,R)\cap\mathcal{C}_{\ell'}(G,e,K)$
$\langle\ ,\ \rangle_G$, $\langle\ ,\ \rangle'_G$	Inneres Produkt auf $\mathcal{C}(G)$ bzw. $\mathcal{C}_{\ell'}(G)$
$\langle\ ,\ \rangle$, $\langle\ ,\ \rangle'$	Inneres Produkt auf $\mathcal{C}(G)$ bzw. $\mathcal{C}_{\ell'}(G)$, wenn G aus dem Zusammenhang hervorgeht
$l(eRG)$	$\lvert\mathrm{IBr}(G,e)\rvert$
$k_0(eRG)$	$\lvert\{\chi\in\mathrm{Irr}(G,e)\mid\chi \text{ hat Höhe } 0\}\rvert$
$\mathcal{E}(G,s)$	rationale Klasse oder geometrische Konjugiertenklasse von Charakteren in der endlichen reduktiven Gruppe G
$\mathcal{E}_\ell(G,s)$	rationale Klasse oder geometrische Konjugiertenklasse von ℓ-Blöcken in der endlichen reduktiven Gruppe G
$\mathcal{R}_K(\mathcal{E}_\ell(G,s))$	Menge der $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen der gewöhnlichen Charaktere aus $\mathcal{E}_\ell(G,s)$
$\mathcal{R}_k(\mathcal{E}_\ell(G,s))$	Menge der $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen der Brauercharaktere aus $\mathcal{E}_\ell(G,s)$
$\bar\chi$	zu χ komplex konjugierter Charakter
${}^g\chi$	zu χ konjugierter Charakter: ${}^g\chi(x)=\chi(g^{-1}xg)$ für alle $x\in G$
χ^g	${}^{g^{-1}}\chi$
$\breve\chi$	Einschränkung von χ auf die ℓ'-Klassen
χ_L^G	von Untergruppe L auf G induzierter Charakter
χ^G	von Untergruppe auf G induzierter Charakter, wenn die Untergruppe aus dem Zusammenhang hervorgeht
χ_L	auf Untergruppe L eingeschränkter Charakter
$\tilde\chi$	Inflation des Charakters χ
$\mathbf{1}_G$	der triviale Charakter von G

Alle vorkommenden Moduln sind, wenn nicht anders vermerkt, endlich erzeugte Rechtsmoduln. Die Abbildungen werden dagegen links geschrieben. Die Begriffe irreduzibel und einfach werden, soweit sie sich auf KG- oder kG-Moduln beziehen, synonym verwendet. Für Charaktere wird ausschließlich der Begriff irreduzibel benutzt.

Inhalt

Kapitel 1

Einleitung

Seit nunmehr etwa 10 Jahren sind alle endlichen einfachen Gruppen bekannt. Es besteht jetzt eine vordringliche Aufgabe darin, diese Objekte auf vielfältige Weise zu untersuchen und ihre wichtigsten Eigenschaften zu bestimmen. Je genauer die einfachen Gruppen bekannt sind, desto leichter dürften Merkmale, die sie etwa von nicht-einfachen Gruppen unterscheiden, ins Auge fallen. Vielleicht ergibt sich auf diese Weise in Zukunft einmal eine Vereinfachung des Klassifikationssatzes.

Wichtige Eigenschaften einer Gruppe G bekommt man aus ihren Darstellungen, also den Homomorphismen von G in die Gruppe der invertierbaren Matrizen über einem Körper. Durch die Einteilung der endlichen Gruppen in die auflösbaren und die nicht-auflösbaren wird auch die Darstellungstheorie endlicher Gruppen in zwei Teilgebiete aufgeteilt. Die einfachen, nicht-abelschen Gruppen sind die bestimmenden Bestandteile der nicht-auflösbaren Gruppen. Es ist also nicht erstaunlich, wenn diese sozusagen kleinstmöglichen nicht-auflösbaren Gruppen zuerst untersucht werden. In dieser Einführung sind fortan mit einfachen Gruppen immer nicht-abelsche, einfache Gruppen gemeint. Anhand dieser können viele offene Fragen und Vermutungen der Darstellungstheorie, etwa Brauers Höhenvermutung, die Alperin–McKay-Vermutung oder Alperins Gewichtsvermutung getestet werden. Man kann einige dieser Fragen vollständig auf das Studium der einfachen Gruppen oder, etwas allgemeiner, der quasi-einfachen Gruppen zurückführen. So haben etwa Berger und Knörr in [1] gezeigt, daß eine Richtung von Brauers Höhenvermutung für alle endlichen Gruppen gilt, wenn sie für die quasi-einfachen erfüllt ist.

Das Studium der Darstellungen einfacher Gruppen liefert eine Fülle von Beispielen, die Hinweise für die Richtung zukünftiger Forschung geben. Jede zu entwickelnde Theorie wird sich an diesen Beispielen orientieren und sie unter einem übergreifenden, einheitlichen Gesichtspunkt erklären müssen.

Die meisten einfachen Gruppen, darunter alle klassischen, sind vom Lie-Typ. Diese werden in der vorliegenden Arbeit behandelt. Es werden die Grundzüge einer sich entwickelnden Theorie aufgezeigt und darüberhinaus einige substantielle Beispiele ausgeführt. Das Bemerkenswerte an diesen Beispielen ist, daß schon die Untersuchung einer einzigen Serie von einfachen Gruppen vom Lie-Typ, im vorliegenden Fall die Gruppen vom Typ G_2, Muster und Regelmäßigkeiten erkennen läßt, die sich oft ohne große Mühe auf alle Gruppen vom Lie-Typ verallgemeinern lassen. Wenn diese auch nicht in allen Fällen bewiesen werden können, so können sie doch an anderen Beispielen nachgeprüft werden, und führen nach hinreichender Bestätigung zu Vermutungen für alle Gruppen vom Lie-Typ.

Die Darstellungstheorie endlicher, einfacher Gruppen hat aber auch Anwendungen in anderen Gebieten der Mathematik. So kann z.B. in der reinen Gruppentheorie die Frage nach den Erweiterungen einer gegebenen Gruppe durch eine andere mit Hilfe ihrer Darstellungen angegangen werden. Aber auch bei der Suche nach den maximalen Untergruppen einer Gruppe ist die Darstellungstheorie hilfreich. Hat nämlich eine Gruppe G eine Darstellung vom Grad n über einem Körper K, dann muß auch jede hypothetische Untergruppe eine solche besitzen. Schließlich erlaubt eine detaillierte Kenntnis darstellungstheoretischer Eigenschaften von G oft die explizite Konstruktion einer Darstellung von G. Die so gewonnenen Matrizen können mit Hilfe von Computern gespeichert und manipuliert werden, um so konkrete Rechnungen innerhalb von G, etwa die Konstruktion von Elementen bestimmter Ordnung, zu ermöglichen. Auf diese Weise wurde z.B. die Existenz der sporadisch einfachen Janko Gruppe J_4 nachgewiesen.

Auch in Geometrie, Kombinatorik und Codierungstheorie gibt es Anwendungen. Als Beispiel möge das klassische Unital dienen. Dies wird am besten innerhalb der projektiven Ebene über einem Körper K mit q^2 Elementen konstruiert. Sei dazu V ein 3-dimensionale Vektorraum über K mit nichtausgeartetem, unitärem Skalarprodukt. Nimmt man als Punkte die eindimensionalen, isotropen Teilräume von V und als Geraden die von zwei verschiedenen Punkten aufgespannten zweidimensionalen Teilräume, so erhält man das klassische Unital. Je zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade. Auf jeder Geraden liegen genau $q+1$ Punkte. Es gibt insgesamt q^3+1 Punkte. Das klassische Unital ist also ein 2-$(q^3+1, q+1, 1)$ Block-Design. Wir betrachten nun die Inzidenzmatrix I dieser Geometrie. In der Kombinatorik ist man am ℓ-Rang von I interessiert, wobei ℓ eine Primzahl ist. Dieser Rang kann mit Hilfe der Darstellungen der Gruppe $P\Gamma U_3(q^2)$ untersucht werden. Dies ist nämlich die Kollineationsgruppe des klassischen Unitals, und die Menge der Punkte sowie die Menge der Geraden führen zu je einem Permutationsmodul dieser Gruppe über einem Körper der Charakteristik ℓ. Die Inzidenzmatrix beschreibt gewisse Unter- bzw. Faktormoduln davon. Kennt man alle diese, dann kann der Rang von I bestimmt werden. Das vorliegende Beispiel kann allerdings mit dieser Methode nicht vollständig gelöst werden, da für gewisse ℓ nicht alle Untermoduln des Permutationsmoduls auf den Punkten bekannt sind. Dafür wird in dieser Arbeit das Reesche Unital behandelt, für das mit der Methode alle ℓ-Ränge der Inzidenzmatrix bestimmt werden.

Schließlich sei noch erwähnt, daß mit Hilfe der Darstellungstheorie endlicher Gruppen Klassifikationssätze für andere mathematische Strukturen, etwa topologische Mannigfaltigkeiten gewonnen werden können.

1.1 Die Ergebnisse

Die vorliegende Arbeit untersucht modulare Darstellungen endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik. Eine endliche Gruppe G vom Lie-Typ besteht aus den Fixpunkten einer sogenannten Frobenius-Abbildung auf einer zusammenhängenden, reduktiven algebraischen Gruppe $\mathbf{G}$. Diese sei über einem Körper der Charakteristik p definiert. Dann heißt p die definierende oder natürliche Charakteristik von G. Für die Zwecke dieser Einführung will ich annehmen, daß $\mathbf{G}$ ein zusammenhängendes Zentrum hat. Zunächst wurden modulare Darstellungen solcher Gruppen nur in der definierenden Charakteristik p untersucht. J. E. Humphreys gibt in [56, Seite 259] einen Grund dafür an.

> "For p we always take the prime defining the group of Lie type, since for other primes (except possibly 2) we cannot hope to say much about an entire Lie family."

Diese Einschätzung hat sich seither als unnötig pessimistisch erwiesen. Beginnend mit den Arbeiten von Fong und Srinivasan über die Blöcke und Brauerbäume der linearen und unitären Gruppen, über die Arbeiten von Dipper und James über die Zerlegungszahlen der linearen Gruppen bis hin zur Arbeit von Broué und Michel über die Blockeinteilung hat sich gezeigt, daß es sehr wohl einheitliche Beschreibungen für die modularen Darstellungen einer Gruppe vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik gibt. Die Theorie scheint sogar einfacher als in definierender Charakteristik zu sein, weil sie sich mehr an die Theorie für Charakteristik 0 anlehnen läßt. Darüberhinaus können viele der Aussagen nicht nur für einzelne Lie-Familien, sondern sogar für alle Gruppen vom Lie-Typ formuliert werden. Davon soll in dieser Arbeit ein Eindruck vermittelt werden.

Im zweiten Kapitel meiner Arbeit werden zunächst einige ganz allgemeine Konzepte aus der modularen Charaktertheorie endlicher Gruppen bereitgestellt. Diese wurden bei dem Unternehmen entwickelt, Zerlegungsmatrizen von sporadisch einfachen Gruppen mit Computern auszurechnen. Das dabei entstandene Programmsystem MOC, von Parker, Lux und mir in Aachen entwickelt, baut seine Algorithmen im wesentlichen auf dem Konzept der Basissysteme von Brauer- und projektiven Charakteren auf. Dieses wird in Kapitel 2 beschrieben. Es ist bemerkenswert, daß sich dieses Konzept, obwohl ursprünglich nur für die Behandlung der sporadisch einfachen Gruppen entwickelt, auch in der modularen Darstellungstheorie der Gruppen vom Lie-Typ in einer Weise anwenden läßt, als wäre es speziell zu diesem Zwecke geschaffen worden. Außerdem wird in diesem Kapitel der von Broué stammende Begriff der perfekten Isometrie zwischen Charaktergruppen vorgestellt, da er wesentlich für die folgende Theorie ist.

Im dritten Kapitel werden zunächst die notwendigen Grundlagen für das Studium der endlichen Gruppen vom Lie-Typ bereitgestellt. Einen wesentlichen Platz nimmt hier die Beschreibung der Deligne–Lusztig-Theorie, also die Theorie der gewöhnlichen Darstellungen, ein. Es wird jedoch nur soviel Material bereitgestellt, wie es für die folgenden Kapitel erforderlich ist.

In den nun folgenden Ausführungen sei G eine endliche Gruppe vom Lie-Typ der Charakteristik p. Hervorragende Beschreibungen dieser Gruppen und ihrer Charaktere finden sich in den Büchern von Srinivasan [87] und Carter [10]. Die gewöhnlichen Charaktere von G werden zu geometrischen Konjugiertenklassen $\mathcal{E}(G, s)$ zusammengefaßt (siehe Abschnitt 3.4). Hierbei ist s ein halbeinfaches Element einer $\mathbf{G}$ zugeordneten sogenannten dualen Gruppe $\mathbf{G}^*$. Die Elemente aus $\mathcal{E}(G, 1)$ spielen eine besondere Rolle. Sie heißen unipotente Charaktere. Sei nun ℓ eine von p verschiedene Primzahl. In Kapitel 4 werden die ℓ-Blöcke von G unter einem einheitlichen Gesichtspunkt beschrieben. Dieser geht auf die Arbeit von Broué und Michel zurück. Zwar liefert ihre Methode nicht die einzelnen Blöcke. Sie geben jedoch Teilmengen $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ von gewöhnlichen Charakteren an, die in natürlicher Weise aus geometrischen Konjugiertenklassen zusammengesetzt sind, und zeigen, daß diese Mengen Vereinigungen von ℓ-Blöcken sind. Für die meisten Untersuchungen ist diese etwas gröbere Einteilung der Charaktere vollkommen ausreichend. In Anlehnung an die Begriffsbildung der gewöhnlichen Darstellungstheorie nenne ich die Mengen $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ geometrische Konjugiertenklassen von Blöcken.

In jeder geometrischen Konjugiertenklasse $\mathcal{E}(G, s)$ gibt es zwei ausgezeichnete Charaktere, die halbeinfach bzw. regulär genannt werden. Ich zeige, daß eine analoge Begriffsbildung auch für geometrische Konjugiertenklassen von ℓ-Blöcken möglich ist: Alle regulären Charaktere aus $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ liegen in einem einzigen Block, der deshalb der reguläre Block von $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ genannt wird. Eine vergleichbare Aussage gilt für die halbeinfachen Charaktere. Diese Aussagen folgen aus dem auch für sich allein interessanten Ergebnis, daß der Gelfand–Graev-Charakter (vgl. Abschnitt 3.5), wegen der ungleichen Charakteristik projektiv, bei Einschränkung auf $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ einen projektiv Unzerlegbaren ergibt. Eine andere Folgerung aus den dazu verwendeten Methoden betrifft den Steinberg-Charakter im Fall einer zyklischen Defektgruppe. Es wird gezeigt, daß dieser am Brauerbaum stets mit dem exzeptionellen Knoten verbunden ist, vorausgesetzt, es gibt einen solchen.

Weitere Ergebnisse dieses Kapitels betreffen die Frage nach geeigneten und natürlichen Basissystemen (vgl. Kapitel 2) für die Blöcke. Deren Existenz, die in wichtigen Spezialfällen bewiesen wird, würde die Berechnung der Zerlegungsmatrizen erheblich erleichtern. Desweiteren wird eine Vermutung aufgestellt, die die Zerlegungsmatrizen von $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ mit denen von kleineren

Gruppen in Verbindung bringt, wenn s nicht zentral ist. Diese Vermutung wird in einem Spezialfall bewiesen.

Das fünfte Kapitel stellt Methoden vor, die aus der Kenntnis geeigneter Hecke-Algebren Aussagen über die Zerlegungszahlen von G ermöglichen. Zunächst wird der kürzlich von Dipper für diesen Zweck formulierte Satz vorgestellt. Ich gebe dafür einen von W. Plesken vorgeschlagenen einfachen Beweis. Danach beweise ich die Formeln von Iwahori und Matsumoto für die Hecke-Algebra einer Gruppe mit BN-Paar auf eine, wie ich glaube, neue und einfache Weise. Diese Methoden werden dann angewandt, um für jede Gruppe mit BN-Paar und jede Charakteristik ℓ die Vielfachheit des trivialen Charakters im ℓ-modularen Steinberg-Charakter zu bestimmen. Schließlich wird die Hecke-Algebra zur Weylgruppe D_{12} etwas genauer untersucht, weil diese für spätere Beispiele benötigt wird. Lusztigs Isomorphismus zwischen der Hecke-Algebra und der Gruppenalgebra der Weylgruppe, wobei beide über einem ausreichend großen Körper der Charakteristik 0 definiert sind, wird für diesen Fall explizit angegeben. Dieser wird verwendet um zu untersuchen, über welchen Koeffizientenbereichen die beiden Algebren noch isomorph sind.

Das sechste Kapitel enthält Ergebnisse für spezielle Primzahlen ℓ, die ich streng linear genannt habe. Ist G eine Chevalley-Gruppe über dem Körper mit q Elementen, dann ist ℓ genau dann streng linear für G, wenn ℓ ein Teiler von $q-1$, aber nicht von der Ordnung der Weylgruppe von G ist. Für streng lineare Primzahlen ℓ können die ℓ-Blöcke und die Zerlegungszahlen bestimmt werden. Desweiteren wird gezeigt, daß für streng lineare Primzahlen Brauers Höhenvermutung, Alperins Gewichtsvermutung und die Alperin–McKay-Vermutung erfüllt sind. Die Ergebnisse dieses Kapitels sind nicht alle neu. Einige können aus Arbeiten von Puig abgeleitet werden, in denen er die Quellen-Algebren für Blöcke in streng linearer Charakteristik bestimmt. Meine Beweise benutzen jedoch viel klassischere Methoden, im wesentlichen nur die Green-Korrespondenz und sind so allgemeiner zugänglich.

Die Arbeit besitzt einen umfangreichen Anhang, der selbst aus sechs Kapiteln besteht. In Anhang A wird die benötigte gruppentheoretische Information über die Gruppen vom Typ G_2 bereitgestellt, da diese als wichtige Beispiele in fast allen Kapiteln vorkommen.

Anhang B enthält die explizite Charaktertafel von $G_2(q)$ für ungerades, nicht durch 3 teilbares q. Diese wurde von Chang und Ree in [11] berechnet. Dort sind jedoch nur die Deligne–Lusztig-Charaktere angegeben sowie Formeln, wie daraus die Irreduziblen gewonnen werden können. Für die vielen, expliziten Rechnungen der vorliegenden Arbeit ist es jedoch unumgänglich, die Charaktertafel in der vorliegenden Form zur Verfügung zu haben.

Kapitel C enthält die Zerlegungsmatrizen von $G_2(q)$ in nicht-definierender Charakteristik, soweit sie bestimmt werden konnten. In jedem Block bleiben höchstens zwei Brauercharaktere unbekannt. Die Ergebnisse reichen aus, um die minimalen Grade der treuen Darstellungen von $G_2(q)$ zu finden.

Bei der Berechnung der Zerlegungszahlen wurden einige Tensorprodukte verwendet. Deshalb sind in Anhang E die numerischen Ergebnisse angegeben, aus denen sich diese Tensorprodukte bestimmen lassen. Allerdings enthält Anhang E mehr Information, als tatsächlich benötigt wurde. Die zusätzliche Information wurde einerseits aus Gründen der Vollständigkeit und andererseits in der Hoffnung aufgenommen, sie könnte für zukünftige Untersuchungen einmal nützlich werden.

Als weiteres Ergebnis werden in meiner Arbeit die Brauerbäume der Ree-Gruppen bestimmt. Feit stellte in [29] das Problem, die Brauerbäume aller endlichen einfachen Gruppen sowie deren Überlagerungsgruppen zu finden. Für klassische Gruppen wurde diese Aufgabe von Fong und Srinivasan gelöst. Für alternierende Gruppen ist es eine Übungsaufgabe. Bis auf einige wenige Ausnahmen sind auch die sporadisch einfachen Gruppen erledigt (siehe [50]), so daß nur die Behandlung der exzeptionellen Gruppen vom Lie-Typ noch offen ist. Als Beitrag zu diesem Problem enthält Kapitel D die Brauerbäume der Ree-Gruppen vom Typ ${}^2G_2$ und ${}^2F_4$.

Die Beweise für die Zerlegungsmatrizen von $G_2(q)$ finden sich in Kapitel 7 meiner Arbeit. Sie benützen die wesentlichen Ergebnisse der bis dahin entwickelten Theorie. In Kapitel 8 werden die Brauerbäume der Ree-Gruppen bestimmt. Hier werden nur die Ergebnisse von Kapitel 4 benötigt. Die übrigen Beweise folgen Argumenten aus [50].

Schließlich werden in Kapitel 9 einige weitere Beispiele bzw. Anwendungen der Ergebnisse vorgestellt. Zunächst wird anhand eines Blockes der $G_2(q)$ eine Vermutung von Broué getestet. Es wird gezeigt, daß der ℓ-Hauptblock von $G_2(q)$ im Falle $\ell \mid q+1$, $\ell \neq 2, 3$ isotypisch zum Hauptblock im Normalisator der ℓ-Sylowgruppe von $G_2(q)$ ist.

Danach werden die minimalen Grade der treuen Darstellungen von $G_2(q)$ in jeder Charakteristik ℓ angegeben. Als Anwendung der Blockeinteilung wird schließlich nachgewiesen, daß in $G_2(q)$ für jede nicht-definierende Charakteristik sowohl Brauers Höhenvermutung als auch die Alperin–McKay-Vermutung erfüllt ist.

Endlich wird die Kenntnis der Brauerbäume der Ree-Gruppen vom Typ ${}^2G_2$ dazu verwendet, den ℓ-Rang der Inzidenzmatrix des Ree-Unitals für jede Primzahl ℓ zu bestimmen.

1.2 Die Jordan-Zerlegung

Als ordnendes Konzept der Theorie erweist sich der Begriff der Jordan-Zerlegung. Jedes Element x aus der linearen algebraischen Gruppe $\mathbf{G}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung in einen halbeinfachen Anteil s und einen damit kommutierenden unipotenten Anteil u, so daß also $x = su = us$ gilt. Ursprünglich auf die Elemente von $\mathbf{G}$ beschränkt, wurde dieser Begriff von Lusztig auch in der gewöhnlichen Charaktertheorie der zugehörigen endlichen Gruppe G

eingeführt. Er schlägt sich nieder in der Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von G. Jeder solche Charakter χ ist parametrisiert durch ein Paar (s, λ), wobei s ein halbeinfaches Element der zu G dualen Gruppe G^* und λ ein unipotenter Charakter von $C_{G^*}(s)^*$ ist. Viele Eigenschaften des Charakters χ, so etwa sein Grad, lassen sich aus dieser Parametrisierung ablesen.

Fong und Srinivasan haben dann bemerkt, daß sich der Begriff der Jordan-Zerlegung auch auf die Blöcke von G anwenden läßt, wenn G eine klassische Gruppe und ℓ ungerade ist. Broué gab dafür einen einfachen, konzeptionellen Beweis, der allerdings noch technische Zusatzvoraussetzungen benötigt. Die Jordan-Zerlegung von ℓ-Blöcken liest sich folgendermaßen: Sei $s \in G^*$ ein ℓ'-Element. Dann ist nach Broué und Michel $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ eine Vereinigung von ℓ-Blöcken. Aus der Jordan-Zerlegung der Charaktere erhält man zunächst eine Bijektion zwischen $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ und $\mathcal{E}_\ell(C_{G^*}(s)^*, 1)$. Diese Bijektion bildet in allen bekannten Fällen Blöcke auf Blöcke ab und induziert somit eine Bijektion zwischen den Blöcken in $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ und den unipotenten Blöcken in $C_{G^*}(s)^*$. Dabei heißt ein Block unipotent, wenn er unipotente Charaktere enthält. Diese Eigenschaft der Bijektion führt zu einer Parametrisierung der Blöcke, die man Jordan-Zerlegung von ℓ-Blöcken nennt. Es gibt nur noch sehr wenige Fälle, in denen nicht bekannt ist, ob eine Jordan-Zerlegung von Blöcken existiert.

Diese Analogie setzt sich schließlich in folgender, zuerst am Beispiel der $G_2(q)$ erfolgten Beobachtung fort. In allen Fällen, in denen die Zerlegungsmatrix bekannt ist, gilt: Die obige Bijektion erhält nicht nur die Blöcke, sondern auch die Zerlegungsmatrizen. Dies führt zu einer Jordan-Zerlegung von Brauercharakteren: Jeder irreduzible Brauercharakter ist parametrisiert durch ein Paar (s, ϑ), wobei s ein halbeinfaches ℓ'-Element von G^* und ϑ ein unipotenter irreduzibler Brauercharakter von $C_{G^*}(s)^*$ ist. Dabei heißt ein Brauercharakter unipotent, wenn er in einem unipotenten Block liegt. Aus dieser Parametrisierung der Brauercharaktere lassen sich insbesondere ihre Grade ablesen. Eine weitere wichtige Folgerung ist: Wenn die Zerlegungsmatrizen der unipotenten Blöcke von $C_{G^*}(s)^*$ bekannt sind, dann auch die von $\mathcal{E}_\ell(G, s)$. Es würde also genügen, die Zerlegungsmatrizen von $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ für zentrale s zu bestimmen. Die Jordan-Zerlegung der Brauercharaktere ist bisher bekannt für Blöcke mit zyklischen Defektgruppen durch die Arbeiten von Fong und Srinivasan, und für die $GL_n(q)$ durch die Arbeiten von Dipper und James. In der vorliegenden Schrift wird sie für den Spezialfall, daß $C_{G^*}(s)$ eine Standard-Levi-Untergruppe ist, nachgewiesen. Broué kennt einen Beweis für den Fall, daß dieser Zentralisator ein maximaler Torus ist.

1.3 Computer-Methoden

Die in der Arbeit verwendeten theoretischen Methoden werden an den betreffenden Stellen ausführlich erläutert. Hier sollen nun anhand des Beispiels der $G_2(q)$ ein paar Bemerkungen zu den umfangreichen rechnerischen Methoden gemacht werden. Sämtliche Rechnungen mit den gewöhnlichen Charaktertafeln wurden mit dem Formelmanipulationssystem MAPLE (siehe [12]) ausgeführt. Dazu muß die Charaktertafel zunächst in einem geeigneten Format gespeichert werden. M. Geck hat in seiner Diplomarbeit [38] ausführlich beschrieben, wie und welche Manipulationen mit den Charakteren durchgeführt werden können. Dazu hat er etliche Prozeduren in der Programmiersprache von MAPLE geschrieben. Die rechnerischen Ergebnisse dieser Arbeit machen ausführlichen Gebrauch davon. Das Bemerkenswerte dabei ist, daß die Rechnungen nicht, wie etwa im MOC-System, auf individuelle Gruppen beschränkt sind, sondern simultan für alle Gruppen einer ganzen Lie-Serie durchgeführt werden können.

So können beispielsweise Charaktere tensoriert, Skalarprodukte und Klassenmultiplikationskonstanten sowie zentrale Charaktere und deren Reduktion modulo einer Primzahl ℓ zur Bestimmung der ℓ-Blöcke berechnet werden. Ein weiterer, in meinen Augen überaus wichtiger Aspekt der elektronischen Speicherung ist die leichte Verfügbarkeit und der einfache Zugriff auf Teile der Tafel. Ist die im Anhang abgedruckte Charaktertafel gerade noch in dieser Form handhabbar, so werden die Beispiele aus dem Bereich der exzeptionellen Gruppen sehr schnell so groß, daß sie in gedruckter Form unbrauchbar sind. Trotzdem ist es für viele Untersuchungen hilfreich, mit einer Charaktertafel umgehen zu können. Am Rande sei erwähnt, daß die im Anhang abgedruckten Tafeln einem Ausdruck von MAPLE entstammen, der durch einfache MAPLE-Programme in eine schon fast für das Textverarbeitungssystem TEX brauchbare Form gebracht worden war.

Die elektronische Speicherung einer Charaktertafel erleichtert natürlich das Experimentieren in großem Maße. Dieser Aspekt ist deshalb so wichtig, weil etwa beim Erzeugen von projektiven Charakteren durch Tensorprodukte kein Kriterium zur Verfügung steht, das einem von vorneherein die Auswahl der Faktoren erleichtern würde. Oft erhält man eine gesuchte Information erst nach systematischem Durchspielen aller Fälle. Diese Vorgehensweise wäre unmöglich, müßte man in Tafeln dieser Größe von Hand rechnen. Die diesbezügliche Analogie zwischen den exzeptionellen Gruppen vom Lie-Typ und den sporadisch einfachen Gruppen hat überhaupt erst zu der Idee geführt, auch für erstere den Computer zu benutzen.

Aber die Computer-Methoden erschöpfen sich nicht im Hantieren mit Charaktertafeln. Auch beim Berechnen von Lusztigs kanonischem Isomorphismus zwischen der Hecke-Algebra und der Gruppenalgebra der Weylgruppe war MAPLE sehr hilfreich. Gerade im Bereich der Hecke-Algebren sehe ich wichtige zukünftige Anwendungen von Programmsystemen wie MAPLE.

1.4 Ausblick

Eines der Ziele der vorliegenden Arbeit ist es, zu zeigen, wie mit geeigneten Begriffen die Theorie der modularen Darstellungen der endlichen Gruppen vom Lie-Typ vereinfacht und vereinheitlicht werden kann. Dabei kann man sich etwa an den erwähnten Vermutungen orientieren. Es wäre ein erster Erfolg der Theorie, könnte etwa die oben angesprochene Richtung von Brauers Höhenvermutung für alle einfachen Gruppen nachgewiesen werden. Nach meiner Einschätzung steht dieser Erfolg kurz bevor.

Die Untersuchung modularer Charaktere ist stets von der Hoffnung begleitet, diese könnten sich auch auf die gewöhnliche Theorie auswirken. Noch sind nicht alle unipotenten Charaktere für die exzeptionellen Gruppen vom Lie-Typ bekannt. Erst kürzlich hat Malle diese für die Ree-Gruppen vom Typ ${}^2F_4$ in mühsamer Rechenarbeit bestimmt. Die ausgesprochen starke Theorie der Blöcke mit zyklischen Defektgruppen könnte hier zumindest einige Relationen für die unbekannten Charakterwerte liefern. Dies umso mehr, da es möglich ist, große Teile der Brauerbäume allein aus der Kenntnis der Charaktergrade zu gewinnen.

Das umfangreiche Tabellenmaterial in den Anhängen des Buches [10] von Carter sowie der vorliegenden Arbeit läßt es geraten erscheinen, diese Information zu sammeln und in geeigneter Weise zu speichern. Vorstellbar wäre ein Atlas für die endlichen Gruppen vom Lie-Typ, für den sich aus Gründen, die ich weiter oben schon ausgeführt habe, eine elektronische Speicherung anbieten würde. In jedem Fall wäre dieser eine wertvolle Ergänzung zum wohlbekannten Cambridger „Atlas of Finite Groups" [13].

Nicht alle Zerlegungszahlen für die $G_2(q)$ konnten in dieser Arbeit bestimmt werden. Meiner Ansicht nach ist der Hauptgrund dafür im Auftreten kuspidaler, unipotenter Charaktere zu suchen. Deshalb sind die Hecke-Algebra Methoden, im Gegensatz zur Situation bei der allgemeinen linearen Gruppe, nicht ausreichend, alle Zerlegungszahlen zu bestimmen. Es ist nahezu sicher, daß keine der in dieser Arbeit vorgestellten Methoden diese Probleme in allgemeiner Art zu lösen vermag. Zur Beantwortung dieser Fragen sind also neue Verfahren gefordert. Diese werden dann auch vergleichbare Probleme bei anderen Gruppen vom Lie-Typ lösen können.

Kapitel 2

Basissysteme und perfekte Isometrien

In diesem Kapitel sollen zunächst die Begriffe Basissystem und Atomsystem eingeführt sowie einige grundlegende Eigenschaften und Anwendungen davon vorgeführt werden. Dieses Konzept wurde von R. Parker, K. Lux und mir als Grundlage des Computersystems MOC (Modular Characters) entwickelt. Es bildet das Fundament für die in MOC verwendeten Algorithmen; insbesondere jener, die die Irreduzibilität eines Brauercharakters oder die Unzerlegbarkeit eines projektiven Charakters zu beweisen suchen. Es erlaubt, die bei der Berechnung von modularen Charakteren auftretenden Aufgaben in die Sprache der Linearen Algebra zu übersetzen. Außerdem werden die bisher in der Literatur verwendeten elementaren Methoden systematisiert und mechanisiert, so daß sie leicht von elektronischen Rechenmaschinen übernommen werden können.

Es stellte sich heraus, daß diese Methoden—ursprünglich für sporadische Gruppen unter dem Gesichtspunkt der Algorithmisierung erdacht—auch äußerst fruchtbar in der modularen Darstellungstheorie der Gruppen vom Lie-Typ angewandt werden können. Sie erleichtern die simultane Behandlung der Gruppen einer ganzen Lie-Serie, indem sie den Einfluß des zugrundeliegenden Körpers auf die Zerlegungsmatrizen in den Hintergrund drängen.

Da eine Beschreibung des MOC-Systems zwar geplant ist, aber noch nicht vorliegt, werde ich hier mit Erlaubnis meiner beiden Mitautoren R. Parker und K. Lux die für die Theorie der Gruppen vom Lie-Typ wichtigsten Gesichtspunkte dieser Maschinerie erörtern.

Perfekte Isometrien zwischen Charaktergruppen wurden von Broué eingeführt. Sie finden bisher ihre wichtigste Anwendung in der modularen Charaktertheorie der endlichen Gruppen vom Lie-Typ. Das zweite Ziel dieses Kapitels ist es deshalb, den Begriff der perfekten Isometrie zu definieren und seine wichtigsten Eigenschaften zu diskutieren.

2.1 Allgemeine Theorie der Basissysteme

In diesem Kapitel sei G eine endliche Gruppe, ℓ eine Primzahl und (K, R, k) ein ℓ-modulares Zerfällungssystem für G. Es sei weiter e ein für das gesamte Kapitel fest gewähltes zentrales Idempotent von RG. Dann ist eRG eine Summe von ℓ-Blöcken von G. Die Menge der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von eRG wird hier stets mit $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ bezeichnet. Die Gruppe der gewöhnlichen verallgemeinerten Charaktere von eRG sei $\mathcal{R}_K(G, e)$, die Gruppe der verallgemeinerten Brauercharaktere sei $\mathcal{R}_k(G, e)$. Schließlich bezeichne $\mathcal{R}_k^{pr}(G, e)$ die verallgemeinerten projektiven Charaktere von eRG. Die Menge der echten Charaktere von eRG sei $\mathcal{R}_K(G, e)^+$. Eine analoge Notation wird für die echten Brauercharaktere und die echten projektiven Charaktere verwendet. Die übrigen Bezeichnungen können der Liste der Notationen entnommen werden.

Definition 2.1.1 (a) Ein *Basissystem von Brauercharakteren* **BS** ist eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{R}_k(G, e)$, die aus echten Brauercharakteren besteht.

(b) In analoger Weise ist ein *Basissystem von projektiven Charakteren* **PS** definiert.

(c) Eine $\mathbb{Z}$-Basis **BA** von $\mathcal{R}_k(G, e)$ heißt *Atomsystem von Brauercharakteren*, falls jeder echte Brauercharakter eine Linearkombination mit nichtnegativen Koeffizienten von Elementen aus **BA** ist. Ein *Braueratom* ist ein verallgemeinerter Brauercharakter, der Mitglied eines Atomsystems ist.

(d) In analoger Weise ist ein *Atomsystem von projektiven Charakteren* **PA** und ein *projektives Atom* definiert.

Im Gegensatz zu dem gelegentlichen Gebrauch in der Literatur verlangen wir von einem Basissystem ausdrücklich, daß es aus echten projektiven oder Brauercharakteren besteht. Es wird dagegen nicht verlangt, daß die Elemente eines Atomsystems echt sind. Es stellt sich nun die Frage, wie man feststellen kann, ob eine gegebene Menge von Brauercharakteren ein Basissystem ist.

Lemma 2.1.2 *Sei $S \subset \mathcal{R}_k(G, e)^+$. Dann ist S genau dann ein Basissystem, wenn S über $\mathbb{Z}$ linear unabhängig ist, und sich jeder gewöhnliche irreduzible Charakter, eingeschränkt auf die ℓ'-Klassen, als $\mathbb{Z}$-Linearkombination in S schreiben läßt.*

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Die Umkehrung folgt aus der Surjektivität des Zerlegungshomomorphismus. ∎

Das nächste Ergebnis zeigt, wie man etwa aus einem Basissystem von Brauercharakteren ein System von projektiven Atomen erhält.

Lemma 2.1.3 *Sei* **BS** *ein Basissystem von Brauercharakteren. Ist* **PA** *die zu* **BS** *bezüglich des Skalarproduktes $\langle\ ,\ \rangle'$ duale Basis von $\mathcal{R}_k^{pr}(G, e)$, dann* *ist* **PA** *ein System von projektiven Atomen. Die analoge Aussage gilt natürlich auch für die Beziehung zwischen einem Basissystem* **PS** *von projektiven Charakteren und der dazu dualen Basis* **BA**.

Beweis: Der Einfachheit halber werde mit **BS** bzw. **PA** auch die zugehörige Charaktertafel bezeichnet. Weiter seien **Pr** bzw. **Br** die Charaktertafeln der projektiv unzerlegbaren bzw. der irreduziblen Brauercharaktere. Es ist dann

$$\mathbf{BS} = U\,\mathbf{Br},$$

wobei die Einträge von U nicht-negative ganze Zahlen sind, und $\det U = \pm 1$ ist. Es sei C eine Diagonalmatrix, die in der Diagonalen die Kehrwerte der Zentralisatorordnungen eines Repräsentantensystems der ℓ'-Konjugiertenklassen von G enthält. Aus

$$\mathbf{PA}\,C\,(\overline{\mathbf{BS}})^t = E$$

und den Orthogonalitätsrelationen folgt nun

$$\mathbf{Pr} = (U^t)\,\mathbf{PA},$$

und daraus die Behauptung. ■

Für praktische Rechnungen ist es nicht nötig, bei gegebenem **BS** die Elemente der dualen Basis **PA** explizit als Klassenfunktionen vorliegen zu haben. Dies wird im folgenden deutlich werden.

Wir haben schon gesehen, wie von einer gegebenen Menge von Brauercharakteren nachgewiesen werden kann, daß sie ein Basissystem bildet. Es stellt sich nun die Frage, wie man auf der anderen Seite von einer Menge von projektiven Charakteren nachweist, daß sie ein Basissystem bildet. Im Unterschied zu Brauercharakteren, die durch Einschränkung von gewöhnlichen gewonnen werden können, ist es nicht unmittelbar klar, wie projektive Charaktere konstruiert werden können. In dieser Arbeit geschieht dies im wesentlichen auf zwei Arten. Zum einen erhält man Projektive durch Induzieren von Projektiven von Untergruppen. Zum anderen kann man Charaktere vom Defekt 0 mit anderen, gewöhnlichen Charakteren tensorieren. Das Tensorieren mit Projektiven, die nicht Defekt 0 haben, liefert zwar wieder Projektive, die aber in den meisten Fällen wertlos sind, da einer der Faktoren einen zu großen Grad besitzt.

Die folgende wohlbekannte Tatsache ist oft hilfreich, einen zu „dicken" Projektiven zu verdünnen. Sie wird nur für projektive Charaktere formuliert, obwohl sie sinngemäß auch für Brauercharaktere gilt. Der Leser möge das Ergebnis mit der etwas stärkeren Fassung in [58, Corollary 6.3.8] vergleichen.

Lemma 2.1.4 *Es seien $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \in \mathcal{R}_k^{pr}(G, e)$ verallgemeinerte projektive Charaktere und*

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} z_i\,\Phi_i$$

ein echter Projektiver. Ist d eine natürliche Zahl mit $d \mid z_i$ für alle i, dann ist $\frac{1}{d}\Phi$ ein echter projektiver Charakter. Dabei wird nicht verlangt, daß die Φ_i eine Basis bilden.

Beweis: Ist $\Psi \in \mathcal{R}_k^{pr}(G,e)$, so daß $d\,\Psi$ für eine natürliche Zahl $d > 0$ in $\mathcal{R}_k^{pr}(G,e)^+$ liegt, dann ist Ψ selbst schon in $\mathcal{R}_k^{pr}(G,e)^+$. ■

Wir haben also eine Menge von projektiven Charakteren konstruiert, und wählen daraus eine linear unabhängige Teilmenge **PS** von größtmöglichem Rang aus. Wie können wir feststellen, ob **PS** ein Basissystem ist? Dies ist sehr einfach.

Lemma 2.1.5 *Seien* **BS** *und* **PS** *zwei gleichmächtige Mengen von echten Brauercharakteren bzw. echten Projektiven. Wir nehmen an, daß die Anzahl ihrer Elemente gleich der Anzahl der irreduziblen Brauercharaktere ist. Identifizieren wir die Mengen mit den zugehörigen Charaktertafeln, und ist C wieder eine Diagonalmatrix wie im Beweis von* Lemma 2.1.3*, dann ist*

$$U = \mathbf{BS}\, C\, (\overline{\mathbf{PS}})^t \tag{2.1}$$

die Matrix ihrer paarweisen Skalarprodukte. Dies ist eine quadratische Matrix mit nicht-negativen Einträgen. Dann sind **BS** *und* **PS** *genau dann Basissysteme, wenn U über $\mathbb{Z}$ invertierbar ist.*

Beweis: Seien **Br** und **Pr** die Menge der irreduziblen Brauercharaktere bzw. der projektiv Unzerlegbaren. Dann können wir schreiben:

$$\mathbf{BS} = U_1\, \mathbf{Br}, \qquad U_1 \geq 0 \tag{2.2}$$

und

$$\mathbf{PS} = U_2^t\, \mathbf{Pr}, \qquad U_2 \geq 0. \tag{2.3}$$

(Die Schreibweise $U \geq 0$ bedeutet, daß alle Einträge von U nicht-negativ sind.) Aus den Orthogonalitätsrelationen folgt dann:

$$U = \mathbf{BS}\, C\, (\overline{\mathbf{PS}})^t = U_1 \mathbf{Br}\, C\, (\overline{\mathbf{Pr}})^t U_2 = U_1 U_2.$$

Nun sind **BS** bzw. **PS** genau dann Basen, wenn U_1 und U_2 über $\mathbb{Z}$ invertierbar sind, woraus die Behauptung folgt. ■

Wir nehmen an, daß uns zwei Basissysteme **BS** und **PS** gegeben sind. Die zugehörigen dualen Basen von Atomen seien **PA** und **BA**. Wir wollen uns einen Überblick über alle Matrizen verschaffen, die in der gegebenen Situation Zerlegungsmatrizen sein könnten. Wir berechnen zunächst die Matrix U der Skalarprodukte der Charaktere von **PS** mit den Charakteren von **BS** gemäß (2.1). Dann haben wir mit den Bezeichnungen von (2.2) und (2.3)

$$U = U_1\, U_2. \tag{2.4}$$

Da die Zerlegung der gewöhnlichen Charaktere in die Basis **BS** als bekannt vorausgesetzt werden kann, ist die Kenntnis von U_1 gleichbedeutend mit der Kenntnis der gesuchten Zerlegungsmatrix. Alle mit den gegebenen Basissystemen **BS** und **PS** verträglichen Zerlegungsmatrizen erhält man somit aus den Lösungen von

$$U = U_1 U_2, \quad U_1, U_2 \text{ unimodular }, \quad U_1, U_2 \geq 0. \tag{2.5}$$

In vielen Fällen sind allerdings Nebenbedingungen gegeben, die die Anzahl der Lösungen von (2.5) erheblich einschränken. Ist nämlich eine Menge von Brauercharakteren **B** sowie eine Menge von projektiven Charakteren **P** gegeben, so können wir, wenn wir wieder ihre Charaktertafeln mit den gleichen Symbolen bezeichnen, schreiben:

$$\mathbf{B} = V\,\mathbf{BS} = (V\,U_1)\,\mathbf{Br}$$

und

$$\mathbf{P} = W\,\mathbf{PS} = (W\,U_2^t)\,\mathbf{Pr}$$

mit ganzzahligen Matrizen V und W. Die Lösungen U_1 und U_2 von (2.5) müssen also die beiden Nebenbedingungen erfüllen:

$$V\,U_1 \geq 0, \quad \text{und} \quad W\,U_2^t \geq 0. \tag{2.6}$$

Im Idealfall ist die Matrix U in (2.1) die Einheitsmatrix. Dann ist unser Problem gelöst.

Proposition 2.1.6 *Seien* **BS** *und* **PS** *zwei Basissysteme, so daß die Matrix der Skalarprodukte U zwischen den Elementen aus* **BS** *und denen aus* **PS** *die Einheitsmatrix ist. Dann besteht* **BS** *aus den irreduziblen Brauercharakteren und* **PS** *aus den projektiv unzerlegbaren Charakteren.*

Beweis: Dies folgt sofort aus (2.4), (2.2) und (2.3). ∎

Das Programm MOC versucht, diesen Idealzustand zu erreichen, indem es die Basissysteme **BS** und **PS** Schritt für Schritt verbessert, wobei die Nebenbedingungen (2.6) ausgenützt werden.

2.2 Spezielle Basissysteme und Rechentechniken

Wir behalten weiterhin die Notation aus dem vorigen Abschnitt bei. Bevor wir uns der Frage nach speziellen Basissystemen zuwenden, soll eine kleine, aber doch recht nützliche Anwendung der bisher eingeführten Begriffe vorgestellt werden.

Proposition 2.2.1 *Gegeben sei ein System von projektiven Atomen* **PA**. *Ist* $\Phi \in \mathbf{PA} \cap \mathcal{R}_k^{pr}(G,e)^+$, *d.h. ist* Φ *ein echter projektiver Charakter und ein Atom, so ist* Φ *unzerlegbar.*

Beweis: Sei $\mathbf{PA} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ mit $\Phi = \Phi_1$. Seien weiter $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ die projektiv unzerlegbaren Charaktere. Wir schreiben

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \Phi_j.$$

Dann sind alle $z_{ij} \geq 0$, und ihre Matrix ist invertierbar. Da Φ ein echter Projektiver ist, können wir schreiben

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} x_i \Psi_i$$

mit $x_i \geq 0$. Also ist

$$\Phi = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i z_{ij} \right) \Phi_j = \Phi_1.$$

Daraus folgt nun $x_i = 0$ für alle $i \neq i_0$ und $x_{i_0} = 1$, d.h. $\Phi = \Psi_{i_0}$. ■

Natürlich ist eine analoge Aussage auch für Brauercharaktere richtig. Diese Beobachtung erlaubt Unzerlegbarkeits- bzw. Irreduzibilitätsbeweise, wovon gleich ein erstes Beispiel (2.2.3) gegeben werden soll. Sie ist allerdings nur der Trivialfall eines viel allgemeineren Verfahrens, welches später noch zu besprechen sein wird.

Die Situation wird erheblich vereinfacht, wenn spezielle Basissysteme vorliegen.

Lemma 2.2.2 *Sei* $\mathbf{BS} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ *ein Basissystem von Brauercharakteren, so daß die* φ_i *Einschränkungen von gewöhnlichen Charakteren sind, d.h.* $\varphi_i = \check{\chi}_i$, $1 \leq i \leq m$. *Sei* $\mathbf{PA} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ *die zu* **BS** *duale Basis. Ist nun* $\Phi \in \mathcal{R}_k^{pr}(G,e)$, *etwa*

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} z_i \, \chi_i,$$

dann ist

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} z_i \, \Phi_i.$$

Mit anderen Worten: Stellt man einen verallgemeinerten projektiven Charakter Φ *als* $\mathbb{Z}$*-Linearkombination von gewöhnlichen Charakteren dar, und läßt dann diejenigen Koeffizienten weg, die nicht zu Charakteren aus* **BS** *gehören, so erhält man seine Darstellung im zugehörigen dualen System* **PA**.

Beweis: Sei $\Phi = \sum_{i=1}^{m} z_i' \Phi_i$. Dann ist für $1 \leq j \leq m$:

$$\langle \Phi, \varphi_j \rangle' = \sum_{i=1}^{m} z_i' \langle \Phi_i, \varphi_j \rangle' = z_j'$$

und

$$\langle \Phi, \varphi_j \rangle' = \langle \Phi, \chi_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \langle \chi_i, \chi_j \rangle = z_j,$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Diese Beobachtung erlaubt es nun—vorausgesetzt es existiert ein Basissystem wie oben—die Zerlegungsmatrix zunächst auf dieses einzuschränken, und sodann den Spalten eine neue Interpretation zu geben: Es sind dies die projektiv unzerlegbaren Charaktere, ausgedrückt in der zum gegebenen Basissystem dualen Basis der Atome.

Beispiel 2.2.3 Dieses Beispiel dient ausschließlich zur Illustration der bisher eingeführten Begriffe und Methoden. Die darin aufgestellten Behauptungen werden deshalb an dieser Stelle nicht alle bewiesen. Sei $G = G_2(q)$, ℓ eine Primzahl mit $\ell \not| \, q$, und e das Idempotent eines ℓ-Blockes. Ist Γ_e die Einschränkung des Gelfand–Graev-Charakters (siehe Abschnitt 3.5) auf diesen Block, dann ist Γ_e projektiv unzerlegbar. Zum Beweis beobachtet man, daß $\mathcal{R}_k(G, e)$ ein Basissystem **BS** besitzt, das aus Einschränkungen gewöhnlicher Charaktere auf die ℓ'-Klassen besteht. Dies wird in Kapitel 7 gezeigt. Weiterhin beobachtet man, daß genau ein Charakter aus **BS** in Γ_e vorkommt. Aus Lemma 2.2.2 folgt nun, daß Γ_e ein Atom ist. Mit Proposition 2.2.1 ergibt sich die Behauptung.

Dieses Beispiel läßt sich verallgemeinern auf jede Gruppe vom Lie-Typ, für die der Gelfand–Graev-Charakter definiert ist. Der Beweis hiervon benötigt nichts weiter als eine leichte Erweiterung der eben skizzierten Methode. Er wird in einem späteren Kapitel erbracht werden.

Will man—was eine verbreitete Methode ist—die Zerlegungsmatrix bestimmen, indem man projektive Charaktere als Klassenfunktionen berechnet und diese dann in den gewöhnlichen ausdrückt, so genügt es, die Skalarprodukte dieser Projektiven mit den Charakteren des Basissystems zu kennen. Bei den Blöcken der Gruppen vom Lie-Typ, die im folgenden behandelt werden sollen, ist dies ein entscheidender Vorteil. Hier erhält man im allgemeinen ein Basissystem das aus Charakteren mit verhältnismäßig wenigen Irrationalitäten besteht. Die übrigen Charaktere, die viele Irrationalitäten aufweisen, können zunächst aus der Betrachtung ausgeklammert werden.

Beispiel 2.2.4 Sei $G = G_2(q)$, $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, und $3 \not| \, q$. Die Charaktere von G sind in Anhang B wiedergegeben. Jeder Charakter χ vom Typ X_3 ist vom 2-Defekt 0. Das Tensorprodukt $\Phi := \chi \otimes X_{32}$ ist das gleiche für jeden beliebigen Charakter χ vom Typ X_3 und ist projektiv modulo 2. Schränken wir Φ auf den Hauptblock B_1 ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Phi &= (q-1)X_{12}+X_{15}+X_{17}+\\ &\quad (q-1)X_{21}+X_{23}+X_{24}+\\ &\quad \textstyle\sum_{X'_{1a}\in B_1} X'_{1a}+q\sum_{X_{1a}\in B_1} X_{1a}+\\ &\quad \textstyle\sum_{X'_{1b}\in B_1} X'_{1b}+q\sum_{X_{1b}\in B_1} X_{1b}+\\ &\quad \textstyle(q-1)\sum_{X_a\in B_1} X_a+(q-1)\sum_{X_b\in B_1} X_b+\\ &\quad \textstyle(q+1)\sum_{X_1\in B_1} X_1.\end{aligned}$$

Es wäre sehr aufwendig aus der gegebenen Klassenfunktion Φ die obige Zerlegung vollständig auszurechnen. Stattdessen genügen in diesem Fall die Skalarprodukte mit den 7 Charakteren eines Basissystems.

Es ist leider nicht klar, ob es immer ein Basissystem gibt, welches aus den Einschränkungen gewöhnlicher Charaktere besteht. Bei ℓ-auflösbaren Gruppen folgt eine positive Antwort aus dem Satz von Fong–Swan. Bei Blöcken mit zyklischer Defektgruppe existiert immer ein solches nach den Ergebnissen von Dade. Trotz der großen Anzahl der behandelten Beispiele ist auch bei Gruppen vom Lie-Typ noch kein Block aufgetreten, der kein derartiges Basissystem hat. Ebensowenig liefern die sporadischen Gruppen negative Beispiele. Am ehesten wäre ein Gegenbeispiel bei Gruppen vom Lie-Typ in definierender Charakteristik p zu erwarten.

Ist ein Basissystem von Brauercharakteren gegeben, und sind die Zerlegungen der Charaktere des Basissystems in die irreduziblen Brauercharaktere bekannt, so läßt sich daraus natürlich sofort die gesamte Zerlegungsmatrix rekonstruieren. Wir wollen in diesem Zusammenhang noch eine Bezeichnungsweise festlegen.

Definition 2.2.5 Eine *Relation* ist eine lineare Abhängigkeit über $\mathbb{Z}$ zwischen Brauercharakteren. Spezieller: Ist ein Basissystem **BS** von Brauercharakteren gegeben, und ist $\varphi \in \mathcal{R}_k(G,e)$, so heißt die Darstellung von φ in **BS** eine *Relation bezüglich* **BS**.

Will man von einer Teilmenge **BS** von irreduziblen gewöhnlichen Charakteren, die man auf die ℓ'-Klassen eingeschränkt hat, nachweisen, daß diese ein Basissystem bilden, so genügt es, wie wir oben gesehen hatten, jeden anderen, auf die ℓ'-Klassen eingeschränkten, gewöhnlichen irreduziblen Charakter als $\mathbb{Z}$-Linearkombination von **BS** zu schreiben. Gelingt dies, so hat man gleichzeitig auch diejenigen Relationen gefunden, mit denen man die vollständige Zerlegungsmatrix herstellen kann. Diese Relationen erlauben aber auch noch eine weitere Interpretation, die zum Test der Irreduzibilität verwendet werden kann.

Lemma 2.2.6 *Sei* $\mathbf{BS} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ *ein Basissystem von Brauercharakteren und dualem System von projektiven Atomen* $\mathbf{PA} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$*. Ist* φ *ein verallgemeinerter Brauercharakter, etwa*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} z_i \varphi_i,$$

so können aus dieser Relation die Skalarprodukte von φ *mit den Elementen aus* **PA** *abgelesen werden: Es ist nämlich* $\langle \Phi_j, \varphi \rangle' = z_j$*. Ist* Φ *ein verallgemeinerter projektiver Charakter, etwa*

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} z_i' \Phi_i,$$

so ist $\langle \Phi, \varphi \rangle' = \sum_{i=1}^{m} z_i' z_i$*.* ∎

Es gibt nun ein sehr einfaches, und auch mechanisch durchführbares Verfahren, die Irreduzibilität eines Brauercharakters bzw. die Unzerlegbarkeit eines Projektiven zu testen und womöglich auch zu beweisen. Da die beiden Methoden dual zueinander sind, soll nur eine davon vorgestellt werden.

Proposition 2.2.7 (PIM-Test)*: Gegeben sei ein System von projektiven Atomen* $\mathbf{PA} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$*, ein projektiver Charakter* $\Phi = \sum_{i=1}^{m} z_i \Phi_i$ *und eine Menge* $\mathbf{R}$ *von echten Brauercharakteren. Für alle* $(0, \ldots, 0) \neq (z_1', \ldots, z_m') \neq (z_1, \ldots, z_m)$*,* $0 \leq z_i' \leq z_i$*, und* $\Phi' = \sum_{i=1}^{m} z_i' \Phi_i$ *gebe es stets einen Brauercharakter* $\varphi \in \mathbf{R}$ *mit* $\langle \Phi', \varphi \rangle' < 0$ *oder* $\langle \Phi - \Phi', \varphi \rangle' < 0$*. Dann ist* Φ *unzerlegbar.* ∎

Je mehr Brauercharaktere in $\mathbf{R}$ liegen, desto stärker ist diese Methode. Üblicherweise nehmen wir für $\mathbf{R}$ die Menge der auf die ℓ'-Klassen eingeschränkten gewöhnlichen Charaktere. Das folgende Beispiel möge dieses Verfahren illustrieren.

Beispiel 2.2.8 Sei $G = G_2(q)$, $q \equiv -1 (\operatorname{mod} 3)$, $\ell = 3$. Der Hauptblock besitzt ein Basissystem **BS** bestehend aus den Charakteren $\breve{X}_{11}$, $\breve{X}_{12}$, $\breve{X}_{14}$, $\breve{X}_{16}$, $\breve{X}_{17}$, $\breve{X}_{18}$, $\breve{X}_{19}$ (siehe Kapitel 7). Da im vorliegenden Fall die Boreluntergruppe B eine ℓ'-Gruppe ist, ist $\Phi = \mathbf{1}_B^G$ ein projektiver Charakter. Wir benötigen drei Relationen, um die Unzerlegbarkeit von Φ gemäß obigem Verfahren zu zeigen. Natürlich wurden zunächst auch alle gewöhnlichen Charaktere in die Testmenge $\mathbf{R}$ aufgenommen. Es stellt sich jedoch im nachhinein heraus, daß die drei angegebenen genügen. Die relevanten Koeffizienten sind in folgender Tabelle zusammengefaßt, wobei wie üblich fehlende Einträge durch 0 zu ersetzen sind. Die erste Zeile enthält die Koeffizienten von Φ, ausgedrückt in den projektiven Atomen zu **BS**. Die folgenden drei Zeilen enthalten die

Koeffizienten bezüglich **BS** der verwendeten Brauercharaktere.

	X_{11}	X_{12}	X_{14}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}
Φ	1	1	1	2			
$\breve{X}_{31}$		1	-1				1
$\breve{X}_{32}$	-1		-1	1		1	
$\breve{X}'_{2a}$	-1		1		1	1	

Ein PIM-Test könnte etwa folgendermaßen verlaufen. Sei Φ' ein möglicher direkter Summand von Φ, der X_{11} enthält. Die dritte Relation zeigt, daß dann auch X_{14} in Φ' vorkommt. Aus der zweiten Relation entnehmen wir sodann, daß X_{16} zweimal in Φ' steckt, und aus der ersten, daß auch X_{12} vorkommt. Deshalb ist Φ unzerlegbar.

Ein gewöhnlicher Charakter ist genau dann ein verallgemeinerter Projektiver, wenn er auf allen ℓ-singulären Klassen den Wert 0 hat. Dies ermöglicht den folgenden Teilsummentest, der gelegentlich in der Literatur verwendet wird, um die Unzerlegbarkeit eines Projektiven zu zeigen. Sei

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} z_i \, \chi_i$$

ein projektiver Charakter, ausgedrückt in den gewöhnlichen Irreduziblen. Eine Teilsumme von Φ ist ein Charakter

$$\Phi' = \sum_{i=1}^{n} z'_i \, \chi_i,$$

mit $0 \leq z'_i \leq z_i$ und $(0, \ldots, 0) \neq (z'_1, \ldots, z'_n) \neq (z_1, \ldots, z_n)$. Beim Teilsummentest werden nun alle Teilsummen eines projektiven Φ durchlaufen und getestet, ob eine davon ein verallgemeinerter Projektiver ist. Trifft dies nicht zu, so ist Φ unzerlegbar.

Der Vollständigkeit wegen soll nun dieser herkömmliche Teilsummentest mit dem oben angegebenen PIM-Test verglichen werden.

Proposition 2.2.9 *Es gebe ein Basissystem* **BS** *bestehend aus gewöhnlichen Charakteren und* **PA** *sei das zugehörige duale System von projektiven Atomen. Weiter sei Φ ein projektiver Charakter. Dann gilt:*

Der Test aus Proposition 2.2.7 *beweist die Unzerlegbarkeit von Φ, wobei als Menge* **R** *der Brauercharaktere nur die Einschränkungen der gewöhnlichen Charaktere auf die ℓ'-Klassen zugelassen sind, genau dann, wenn keine Teilsumme von Φ ein verallgemeinerter Projektiver ist.*

Beweis: Ist Ψ irgendein verallgemeinerter projektiver Charakter, und

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \chi_i$$

seine Darstellung in den gewöhnlichen irreduziblen Charakteren, dann folgt $\langle \Psi, \breve{\chi}_j \rangle' = \langle \Psi, \chi_j \rangle = x_j$. Seien nun Φ' und $\Phi'' = \Phi - \Phi'$ wie in Proposition 2.2.7. Dann sind $\Phi', \Phi'' \in \mathcal{R}_k^{pr}(G, e)$. Wenn nun keine Teilsumme von Φ ein verallgemeinerter projektiver Charakter ist, dann ist weder Φ' noch Φ'' eine Teilsumme. Mindestens einer der beiden hat dann in seiner Darstellung in den gewöhnlichen Charakteren einen negativen Koeffizienten x_j, der nach obiger Vorbemerkung gerade sein Skalarprodukt mit $\breve{\chi}_j$ angibt. Das heißt, daß unser PIM-Test die Unzerlegbarkeit von Φ auch beweisen kann.

Sei umgekehrt Φ' eine Teilsumme von Φ, die in $\mathcal{R}_k^{pr}(G, e)$ liegt. Dann ist $\langle \Phi', \breve{\chi}_j \rangle \geq 0$ für alle $1 \leq j \leq n$. Weil unser Basissystem so speziell gewählt ist, wird Φ' nach Lemma 2.2.2 auch von unserem PIM-Test in Betracht gezogen, der somit nicht entscheiden kann, ob Φ unzerlegbar ist. ■

In diesem Sinne stellt der obige PIM-Test eine Verallgemeinerung des Teilsummentests dar, denn wir können alle vorhandenen Brauercharaktere als Testvektoren benutzen. Unser Test ist im allgemeinen mit weniger Arbeit verbunden, denn die zu durchlaufenden Koeffizientenvektoren sind kürzer als beim Teilsummentest, da wir von vorneherein schon diejenigen Koeffizienten vergessen, die zu Charakteren außerhalb des Basissystems gehören. Zudem ist die Berechnung der Skalarprodukte nichts weiter als die Berechnung des Standardskalarproduktes zwischen Zeilen ganzer Zahlen.

Die Lösung des Problems 2.5 unter den Nebenbedingungen 2.6 wird erheblich vereinfacht, wenn die Matrix U eine untere Dreiecksmatrix ist. Da U unimodular ist, sind dann die Einträge auf der Hauptdiagonalen alle gleich 1. Die beiden Matrizen U_1 und U_2 sind dann ebenfalls unimodulare Dreiecksmatrizen. Man erhält etwa U_1, indem man U von rechts her verdünnt, d.h. sukzessive von rechts her Spalten subtrahiert. Mit diesem Spezialfall hängt eng der Begriff der Dreiecksgestalt einer Zerlegungsmatrix zusammen.

Definition 2.2.10 Die Zerlegungsmatrix von A hat *Dreiecksgestalt*, wenn die irreduziblen gewöhnlichen, und die irreduziblen Brauercharaktere so angeordnet werden können, daß die Zerlegungsmatrix von folgender Form ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & * & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \\ & & * & & & \\ & & & & & \end{pmatrix},$$

wobei die Einträge oberhalb der Diagonalen alle 0 sind.

In der symmetrischen Gruppe hat jede Zerlegungsmatrix Dreiecksgestalt (siehe z.B. [58, Theorem 6.3.60]), ebenso, wie Dipper in [19] gezeigt hat, in den allgemeinen linearen Gruppen in nicht-definierender Charakteristik.

Offensichlich gilt der folgende Zusammenhang.

Lemma 2.2.11 *Die Zerlegungsmatrix hat dann und nur dann Dreiecksgestalt, wenn ein Basissystem* **BS***, bestehend aus gewöhnlichen Charakteren, sowie ein Basissystem* **PS** *von projektiven Charakteren existiert, so daß die Matrix* U *aus* (2.1) *eine untere Dreiecksmatrix ist.* ■

Ist eine solche Situation erreicht, und ist Φ ein Projektiver aus **PS**, so sind im PIM-Test aus Proposition 2.2.7 erheblich weniger mögliche Summanden Φ' zu untersuchen. Die einzigen Kandidaten für Φ' erhält man aus Φ durch sukzessives Subtrahieren von rechts (vgl. [58, 6.3.22] sowie die danach folgende Bemerkung).

2.3 Perfekte Isometrien

In diesem letzten Abschnitt des Kapitels fassen wir im wesentlichen den Abschnitt 1 aus Broués Arbeit [3] zusammen. Sei H eine weitere endliche Gruppe und f ein zentrales Idempotent von RH. Wir setzen voraus, daß K und k auch Zerfällungskörper für H sind. Sei $\mu \in \mathcal{R}_K(G \times H, (e, f))$. Diesem μ sind zwei Gruppenhomomorphismen

$$I_\mu : \mathcal{R}_K(H, f) \longrightarrow \mathcal{R}_K(G, e) \quad \text{und} \quad R_\mu : \mathcal{R}_K(G, e) \longrightarrow \mathcal{R}_K(H, f)$$

zugeordnet. Sie sind durch die folgenden Formeln definiert:

$$\begin{aligned} I_\mu(\beta)(g) &= \tfrac{1}{|H|} \textstyle\sum_{h \in H} \mu(g, h^{-1})\beta(h) \\ R_\mu(\alpha)(h) &= \tfrac{1}{|G|} \textstyle\sum_{g \in G} \mu(g^{-1}, h)\alpha(g) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dabei sind α und β beliebige Klassenfunktionen mit Werten in K, d.h. wir fassen I_μ und R_μ auch als Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen der Klassenfunktionen auf. Die beiden Homomorphismen sind adjungiert bezülich des Skalarproduktes $\langle\ ,\ \rangle$, d.h. $\langle I_\mu(\beta), \chi\rangle_G = \overline{\langle \beta, R_\mu(\chi)\rangle}_H$. Jeder Homomorphismus von $\mathcal{R}_K(H, f)$ nach $\mathcal{R}_K(G, e)$ ist von der Form I_μ für einen verallgemeinerten Charakter $\mu \in \mathcal{R}_K(G \times H, (e, f))$.

Wir kommen nun zu der wichtigen Definition der Perfektheit eines solchen verallgemeinerten Charakters μ.

Definition 2.3.1 (Broué [3, DÉFINITION 1.1]): Der Charakter μ heißt *perfekt*, wenn er die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) Für alle $g \in G$ und $h \in H$ sind $\mu(g, h)/|C_G(g)|$ und $\mu(g, h)/|C_H(h)|$ in R.

(b) Ist $\mu(g,h) \neq 0$, dann ist g genau dann ein ℓ'-Element, wenn h ein solches ist.

In die Formeln 2.7 kann man insbesondere Brauercharaktere einsetzen. Für perfekte Charaktere μ erhält man dann wieder Brauercharaktere.

Proposition 2.3.2 (Broué [3, PROPOSITION 1.3]): *Sei μ perfekt. Die Anwendung der Formeln (2.7) liefert dann adjungierte Homomorphismen $I_\mu : \mathcal{R}_k(H,f) \to \mathcal{R}_k(G,f)$ und $R_\mu : \mathcal{R}_k^{pr}(G,e) \to \mathcal{R}_k^{pr}(H,f)$, und, dual dazu: $R_\mu : \mathcal{R}_k(G,e) \to \mathcal{R}_k(H,f)$ sowie $I_\mu : \mathcal{R}_k^{pr}(H,f) \to \mathcal{R}_k^{pr}(G,f)$.* ∎

Wir kommen nun zur Definition der perfekten Isometrie.

Definition 2.3.3 (Broué [3, DÉFINITION 1.4]): Eine Isometrie zwischen $\mathcal{R}_K(H,f)$ und $\mathcal{R}_K(G,e)$ heißt perfekt, wenn sie von der Form I_μ mit einem perfekten Charakter μ ist.

Die Bedeutung einer perfekten Isometrie I_μ liegt darin, daß sie einen Algebrenisomorphismus zwischen $Z(fRH)$ und $Z(eRG)$ induziert, und die wesentlichen blocktheoretischen Invarianten überträgt. Insbesondere erhält sie die Anzahl und die Höhen der gewöhnlichen Irreduziblen sowie die Anzahl der irreduziblen Brauercharaktere (siehe [3, THÉORÈME 1.5]). Im allgemeinen bildet eine perfekte Isometrie echte Charaktere nicht auf echte ab. Deshalb kann man auch nicht erwarten, daß sie die Zerlegungszahlen erhält. Ist dies jedoch der Fall, so werden insbesondere echte Brauercharaktere auf echte Brauercharaktere abgebildet. Eine analoge Aussage gilt dann auch für echte projektive Charaktere. Es ist nicht schwer zu sehen, daß auch die Umkehrung richtig ist.

Proposition 2.3.4 *Sei I_μ eine perfekte Isometrie zwischen $\mathcal{R}_K(H,f)$ und $\mathcal{R}_K(G,e)$. Durch I_μ werde $\mathcal{R}_k(H,f)^+$ auf $\mathcal{R}_k(G,e)^+$ sowie $\mathcal{R}_k^{pr}(H,f)^+$ auf $\mathcal{R}_k^{pr}(G,e)^+$ abbildet. Dann bildet I_μ die irreduziblen Brauercharaktere auf die irreduziblen Brauercharaktere ab und erhält somit die Zerlegungsmatrix.*

Beweis: Sei **BS** das Bild der Menge der irreduziblen Brauercharaktere unter I_μ. Dann ist **BS** ein Basissystem im Sinne von Definition 2.1.1. Das gleiche gilt für das Bild **PS** der Menge der projektiv unzerlegbaren Charaktere. Da I_μ eine Isometrie ist, ist die Matrix der Skalarprodukte zwischen den Elementen von **BS** und **PS** die Einheitsmatrix. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 2.1.6. ∎

Kapitel 3

Deligne–Lusztig-Theorie

In diesem Kapitel sollen diejenigen Begriffe der Deligne–Lusztig-Theorie wiederholt werden, die bei der Untersuchung der Blöcke und Zerlegungsmatrizen der Gruppen vom Lie-Typ wesentlich eingehen. Soweit möglich folgen die hier verwendeten Bezeichnungen dem Buch von Carter [10].

3.1 Die endlichen Gruppen vom Lie-Typ

Wir beginnen mit einer linearen algebraischen Gruppe $\mathbf{G}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ endlicher Charakteristik p. Wir sagen, daß p die *natürliche* oder *definierende Charakteristik* von $\mathbf{G}$ ist. Meistens betrachten wir nur zusammenhängende und reduktive Gruppen $\mathbf{G}$. Dies stellt keine wesentliche Beschränkung der Theorie dar. Oft fordern wir jedoch zusätzlich, daß das Zentrum von $\mathbf{G}$ zusammenhängend ist. Dann wird zwar die Formulierung der meisten Sätze vereinfacht, dafür aber die angestrebte Allgemeinheit etwas eingeschränkt. Eine zusammenhängende, reduktive Gruppe $\mathbf{G}$ ist das Produkt $\mathbf{G} = [\mathbf{G}, \mathbf{G}]Z(\mathbf{G})^\circ$, wobei $Z(\mathbf{G})^\circ$ für die Zusammenhangskomponente der 1 im Zentrum von $\mathbf{G}$ steht. Die Kommutatorgruppe $[\mathbf{G}, \mathbf{G}]$ ist halbeinfach, und der Durchschnitt $[\mathbf{G}, \mathbf{G}] \cap Z(\mathbf{G})^\circ$ ist endlich. Schließlich läßt sich $[\mathbf{G}, \mathbf{G}]$ in eine zusammenhängende, lineare algebraische Gruppe mit zusammenhängendem Zentrum einbetten. In diesem Sinne ist der Fall von Gruppen mit zusammenhängendem Zentrum ein natürlicher Ausgangspunkt der Theorie.

Eine lineare algebraische Gruppe $\mathbf{G}$ ist stets isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $GL_n(\mathbb{F})$. Die Elemente von $\mathbf{G}$ besitzen eine Zerlegung in ein Produkt aus einem halbeinfachen und einem unipotenten Element. Diese sogenannte Jordan-Zerlegung der Elemente ist von grundlegender Bedeutung, und soll deshalb besonders herausgestellt werden.

Zu diesem Zwecke folgt eine Zusammenfassung von [10, Section 1.4]. Sei φ ein injektiver Homomorphismus $\varphi : \mathbf{G} \to GL_n(\mathbb{F})$, so daß das Bild von φ abgeschlossen ist.

Definition 3.1.1 Ein Element s aus $\mathbf{G}$ heißt *halbeinfach (semisimple)*, wenn $\varphi(s)$ diagonalisierbar ist. Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Einbettung φ.

Ein Element u aus $\mathbf{G}$ heißt *unipotent*, wenn alle Eigenwerte von $\varphi(u)$ gleich 1 sind. Auch diese Eigenschaft ist unabhängig von φ.

Es gilt nun:

Proposition 3.1.2 (Jordan-Zerlegung der Elemente): *Sei $x \in \mathbf{G}$. Dann existiert ein halbeinfaches Element $x_s \in \mathbf{G}$ und ein unipotentes Element $x_u \in \mathbf{G}$ mit*

$$x = x_s\, x_u = x_u\, x_s.$$

Darüberhinaus sind x_s und x_u durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt.
■

Der Begriff der Frobenius-Abbildung liegt der Einführung der endlichen Gruppen vom Lie-Typ zugrunde und soll deshalb an dieser Stelle aus [10, Section 1.17] übernommen werden. Es sei $\mathbf{G}$ isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $GL_n(\mathbb{F})$. Weiter sei $q = p^e$, $e \geq 1$ eine Potenz von p und F_q der Endomorphismus von $GL_n(\mathbb{F})$, der gegeben ist durch

$$F_q : (a_{ij}) \longmapsto (a_{ij}^q).$$

Definition 3.1.3 Ein Homomorphismus $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ heißt *Standard Frobenius-Abbildung*, wenn eine Einbettung $\varphi : \mathbf{G} \to GL_n(\mathbb{F})$ existiert mit

$$\varphi(F(g)) = F_q(\varphi(g))$$

für ein $q = p^e$ und alle $g \in \mathbf{G}$. Ein Homomorphismus $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ heißt *Frobenius-Abbildung*, wenn eine Potenz von F eine Standard Frobenius-Abbildung ist.

Ist die $\mathbf{G}$ zugrundeliegende algebraische Varietät definiert über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}$, dann ist der dazugehörige Frobenius-Morphismus (siehe z.B. [87, S. 8]) eine Standard Frobenius-Abbildung. Von den wichtigen Eigenschaften einer Frobenius-Abbildung von $\mathbf{G}$ sei besonders hervorgehoben, daß die Menge ihrer Fixpunkte $\mathbf{G}^F = \{g \in \mathbf{G} \mid F(g) = g\}$ endlich ist. Wir schreiben auch $G = \mathbf{G}^F$. Wir können nun die endlichen Gruppen vom Lie-Typ definieren.

Definition 3.1.4 (a) Eine Gruppe heißt *endliche Gruppe vom Lie-Typ*, wenn sie von der Form $G = \mathbf{G}^F$ ist, wobei $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende, reduktive algebraische Gruppe, und F eine Frobenius-Abbildung von $\mathbf{G}$ ist.

Endliche Gruppen vom Lie-Typ werden gelegentlich auch *endliche reduktive Gruppen* genannt.

(b) Sei $\mathbf{G}$ eine einfache algebraische Gruppe. Operiert F trivial auf dem Dynkin-Diagramm von $\mathbf{G}$ (vgl. [10, Abschnitt 1.19]), dann heißt G *Chevalley-Gruppe*. Haben alle einfachen Wurzeln von $\mathbf{G}$ die gleiche Länge, werden aber nicht alle von F festgehalten, dann heißt G *Steinberg-Gruppe*. In den übrigen Fällen ist G eine *Suzuki-* oder *Ree-Gruppe*.

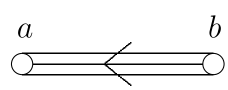
(c) Die *definierende* oder *natürliche Charakteristik* von G ist die Charakteristik des $\mathbf{G}$ zugrundeliegenden Körpers.

Die Bedeutung der endlichen Gruppen vom Lie-Typ rührt vor allem daher, daß bis auf die alternierenden und die 26 sporadischen Gruppen, jede endliche einfache Gruppe in leicht überschaubarer Weise aus einer endlichen Gruppe vom Lie-Typ hervorgeht. Bis auf die Suzuki- und Ree-Gruppen erhält man diese sogar mittels Standard Frobenius-Abbildungen.

Da wir vorher die Jordan-Zerlegung der Elemente besonders hervorgehoben haben, ist ein kleiner Kommentar zur Jordan-Zerlegung in den endlichen Gruppen vom Lie-Typ angebracht. Die unipotenten Elemente in G sind genau die p-Elemente, die halbeinfachen die p'-Elemente, so daß die Jordan-Zerlegung eines Elementes in G nichts anderes ist als seine Zerlegung in den p- und den p'-Anteil.

Eine endliche Gruppe vom Lie-Typ erfüllt das Axiomensystem von Tits für eine Gruppe mit zerfallendem (split) BN-Paar (siehe z.B. [14, Definitions 65.1, 69.1]). Viele Eigenschaften der endlichen Gruppen vom Lie-Typ, insbesondere auch solche ihrer Darstellungstheorie, können direkt aus diesen Axiomen hergeleitet werden. Dies erspart oft eine Fall-zu-Fall Analyse, die auf der anderen Seite bei einigen Aussagen bisher noch nicht umgangen werden kann. Die üblichen Bezeichnungen rund um Gruppen mit BN-Paaren, z.B. W für die Weylgruppe, werden übernommen.

Beispiel 3.1.5 Sei $\mathbf{G}$ vom Typ G_2. Das Dynkin-Diagramm von $\mathbf{G}$ ist



In Anhang A ist das Wurzelsystem von $\mathbf{G}$ abgebildet. Alle ständig benötigten Diagramme, Tabellen und sonstigen Aussagen über G_2 sind dort gesammelt, um eine einfache Referenz darauf zu ermöglichen.

Die Weylgruppe von $\mathbf{G}$ wird von den beiden (fundamentalen) Spiegelungen w_a und w_b erzeugt und ist isomorph zu einer Diedergruppe mit 12 Elementen.

Die zu einer Standard Frobenius-Abbildung $F = F_q$ gehörige endliche Gruppe der Fixpunkte G wird mit $G_2(q)$ bezeichnet. Es ist

$$|G_2(q)| = q^6(q-1)^2(q+1)^2(q^2+q+1)(q^2-q+1).$$

Die Boreluntergruppe von $G_2(q)$ hat die Ordnung $q^6(q-1)^2$.

Sei $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende, reduktive Gruppe und F eine Frobenius-Abbildung von $\mathbf{G}$. Dann existiert eine zu $\mathbf{G}$ *duale Gruppe* $\mathbf{G}^*$, die wieder zusammenhängend und reduktiv ist, und eine zu F *duale Frobenius-Abbildung* F^*. Die zu $\mathbf{G}$ duale Gruppe $\mathbf{G}^*$ entsteht aus $\mathbf{G}$ durch Übergang zum dualen Wurzel-Datum. Zwischen zwei zu $\mathbf{G}$ dualen Gruppen existiert eine natürliche Klasse von Isomorphismen, von denen je zwei durch Komposition mit einem inneren Automorphismus auseinander hervorgehen (siehe [66, § 7]). Die Definition der dualen Gruppe und der dualen Frobenius-Abbildung, sowie auch die wichtigsten Eigenschaften zweier Paare $(\mathbf{G}, F)$ und $(\mathbf{G}^*, F^*)$ in Dualität finden sich in den Abschnitten 4.2–4.5 des Buches von Carter [10]. Sind zwei duale Paare wie oben gegeben, dann sagen wir für die zugehörigen endlichen Gruppen $G = \mathbf{G}^F$ und $G^* = \mathbf{G}^{*F^*}$, daß sie dual zueinander seien.

Beispiel 3.1.6 Die Gruppen $G_2(q)$ und ${}^2F_4(2^{2m+1})$ sind jeweils selbstdual. Die spezielle lineare Gruppe $SL_n(q)$ ist dual zur projektiven linearen Gruppe $PGL_n(q)$, die symplektische Gruppe $Sp_{2n}(q)$ dual zur speziellen orthogonalen $SO_{2n+1}(q)$.

Die Beispiele zeigen, daß sich die Eigenschaft, ein zusammenhängendes Zentrum zu haben, nicht notwendig auf die duale Gruppe überträgt.

3.2 Maximale Tori und reguläre Untergruppen

Definition 3.2.1 Ein *maximaler Torus* von G ist eine Untergruppe von der Form $T = \mathbf{T}^F$, wobei $\mathbf{T}$ ein F-stabiler maximaler Torus von $\mathbf{G}$ ist. Ein F-stabiler maximaler Torus $\mathbf{T}$ von $\mathbf{G}$ heißt *maximal zerfallend (maximally split)*, wenn $\mathbf{T}$ in einer F-stabilen Boreluntergruppe von $\mathbf{G}$ liegt.

Eine Untergruppe $\mathbf{L}$ von $\mathbf{G}$ heißt *regulär*, wenn $\mathbf{L}$ ein F-stabiles Levi-Komplement einer parabolischen Untergruppe von $\mathbf{G}$ ist, die ihrerseits nicht F-stabil sein muß. Die Gruppe der Fixpunkte $L = \mathbf{L}^F$ heißt dann auch *reguläre Untergruppe von G*. Ein reguläre Untergruppe $\mathbf{L}$ von $\mathbf{G}$ heißt *maximal zerfallend (maximally split)*, wenn $\mathbf{L}$ in einer F-stabilen parabolischen Untergruppe von $\mathbf{G}$ liegt. In diesem Falle ist L ein Levi-Komplement einer parabolischen Untergruppe von G.

Die G-Konjugiertenklassen maximaler Tori von G sind durch die F-Konjugiertenklassen der Weylgruppe W (vgl. [10, Section 3.3]) parametrisiert. Sei Π ein Fundamentalsystem von Wurzeln. Die G-Klassen regulärer Untergruppen sind dann parametrisiert durch Äquivalenzklassen von Paaren (Δ, w), wobei $\Delta \subseteq \Pi$ und $w \in W$ mit $(wF)(\Delta) = \Delta$ ist. Dabei sind zwei solche Paare (Δ, w) und (Δ', w') äquivalent, wenn ein $x \in W$ existiert mit $x(\Delta) = \Delta'$ und $xwF(x^{-1}) = w'$ (siehe [66, § 7]).

Beispiel 3.2.2 In G_2 sei $\Pi = \{a, b\}$. Die für dieses Beispiel relevante Information über $W = D_{12}$, sowie die Operation von W auf dem Wurzelsystem, kann leicht aus den Tabellen des Anhangs A abgeleitet werden.

Die Frobenius-Abbildung operiert trivial auf der Weylgruppe, so daß die F-Konjugiertenklassen nichts anderes als gewöhnliche Konjugiertenklassen sind. Die leere Teilmenge von Π führt zu den 6 maximalen Tori, die mit $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_a$, $\mathcal{H}_b$, $\mathcal{H}_3$ und $\mathcal{H}_6$ bezeichnet werden, ensprechend den 6 Repräsentanten $\{1 = w_1, w_2, w_a, w_b, w_3, w_6\}$ der Konjugiertenklassen von W.

Die Teilmenge $\{a\}$ von Π führt zu den zwei regulären Untergruppen $GL_2(q)_a$ und $U_2(q)_a$, die den beiden Elementen 1 bzw. w_{3a+2b} des Stabilisators von $\{a\}$ entsprechen. Dabei ist $GL_2(q)_a$ das Levi-Komplement einer parabolischen Untergruppe von $G_2(q)$. Diese wird mit $P_{\{a\}}$ bezeichnet und hat die Ordnung $q^6(q-1)^2(q+1)$.

Analog führt die Teilmenge $\{b\} \subset \Pi$ zu zwei regulären Untergruppen vom Isomorphietyp $GL_2(q)_b$ respektive $U_2(q)_b$, wobei wieder eine davon, nämlich $GL_2(q)_b$ das Levi-Komplement der parabolischen Untergruppe $P_{\{b\}}$ ist. Die ganze Menge Π führt natürlich zur Gruppe $G_2(q)$.

Wir sehen an diesem Beispiel, daß die regulären Untergruppen allesamt Zentralisatoren gewisser halbeinfacher Elemente von $G_2(q)$ sind. Auf der anderen Seite ist nicht jeder Zentralisator eines halbeinfachen Elementes eine reguläre Untergruppe. Ist q nicht durch 3 teilbar, dann existiert ein Element $h(\omega, \omega, \omega)$, dessen Zentralisator, entsprechend der Kongruenz von q modulo 3, entweder zu $SL_3(q)$ oder zu $SU_3(q^2)$ isomorph ist. Keine dieser Untergruppen ist regulär.

Die maximalen Tori bzw. die regulären Untergruppen von G können mit denen der dualen Gruppe G^* verglichen werden. Dazu wählen wir zunächst einen Isomorphismus

$$\mathbb{F}^* \longrightarrow \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \tag{3.1}$$

(vgl. [10, Proposition 3.1.3]), den wir für den Rest der Arbeit festhalten. Wir erhalten dann für jeden F-stabilen maximalen Torus $\mathbf{T}$ eine $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})^F/\mathbf{T}^F$-Klasse von Gruppenisomorphismen

$$T^* \longrightarrow \mathrm{Irr}(T), \tag{3.2}$$

wobei $\mathbf{T}^*$ der zu $\mathbf{T}$ duale Torus in $\mathbf{G}^*$ ist (siehe [10, Proposition 4.4.1]).

Wir betrachten nun Paare $(\mathbf{T}, \vartheta)$, $\mathbf{T}$ maximaler F-stabiler Torus und $\vartheta \in \mathrm{Irr}(T)$. Für die Bahn von $(\mathbf{T}, \vartheta)$ unter G schreiben wir dann $[\mathbf{T}, \vartheta]$. Auf der anderen Seite operiert G^* auf den Paaren $(\mathbf{T}^*, t)$, wobei $\mathbf{T}^*$ ein maximaler F^*-stabiler Torus von $\mathbf{G}^*$ und $t \in T^*$ ist. Die Bahn eines solchen Paares werde mit $[\mathbf{T}^*, t]$ bezeichnet. Die Isomorphismen (3.2) liefern nun eine Bijektion:

$$\begin{gathered} \{[\mathbf{T}, \vartheta] \mid \mathbf{T}\ \ F\text{-stabiler maximaler Torus, } \vartheta \in \mathrm{Irr}(T)\} \\ \updownarrow \\ \{[\mathbf{T}^*, t] \mid \mathbf{T}^*\ \ F^*\text{-stabiler maximaler Torus, } t \in T^*\}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Wir schreiben $[\mathbf{T}^*, t] \leftrightarrow [\mathbf{T}, \vartheta]$, wenn die beiden Klassen gemäß (3.3) korrespondieren. Weil diese Bijektion mittels der Gruppenisomorphismen (3.2) definiert wurde, gilt offensichtlich der folgende Sachverhalt, der später von Bedeutung sein wird.

Lemma 3.2.3 (Hiss [49]):

(a) Ist $[\mathbf{T}, \vartheta] \leftrightarrow [\mathbf{T}^*, t]$*, dann ist* $|\vartheta| = |t|$.

(b) Ist $[\mathbf{T}, \vartheta] \leftrightarrow [\mathbf{T}^*, t]$*, dann ist* $[\mathbf{T}, \vartheta^n] \leftrightarrow [\mathbf{T}^*, t^n]$ *für jede natürliche Zahl* n.

(c) Seien $s, t \in G^*$ *mit* $ts = st$ *und* $\mathrm{ggT}(|s|, |t|) = 1$*. Es gelte* $[\mathbf{T}^*, st] \leftrightarrow [\mathbf{T}, \sigma\tau]$*, mit* $|\sigma| = |s|$ *und* $|\tau| = |t|$*. Dann ist* $[\mathbf{T}^*, s] \leftrightarrow [\mathbf{T}, \sigma]$.

■

Die beiden Mengen, die die regulären Untergruppen von $\mathbf{G}$ bzw. $\mathbf{G}^*$ parametrisieren, können offensichtlich identifiziert werden. Also existiert eine Bijektion (vgl. [66, § 7])

$$\begin{gathered} \{\mathbf{L} \mid \mathbf{L} \leq \mathbf{G} \text{ regulär } \}/G \\ \updownarrow \\ \{\mathbf{L}' \mid \mathbf{L}' \leq \mathbf{G}^* \text{ regulär } \}/G^* \end{gathered} \tag{3.4}$$

Ähnlich wie oben schreiben wir $\mathbf{L} \leftrightarrow \mathbf{L}'$, wenn die G-Bahn von $\mathbf{L}$ gemäß (3.4) zu der G^*-Bahn von $\mathbf{L}'$ korrespondiert. Sind $\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}'$ reguläre Untergruppen von $\mathbf{G}$ bzw. $\mathbf{G}^*$, und ist $\mathbf{L} \leftrightarrow \mathbf{L}'$, so ist $\mathbf{L}'$ in natürlicher Weise zu $\mathbf{L}^*$ isomorph (vgl. [66, § 7]).

Beispiel 3.2.4 Da $G_2(q)$ eine selbstduale Gruppe ist, werden die regulären Untergruppen unter der Dualität permutiert. Wir erhalten:

$$\begin{gathered} \mathcal{H}_1 \leftrightarrow \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \leftrightarrow \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{H}_a \leftrightarrow \mathcal{H}_b \\ \mathcal{H}_3 \leftrightarrow \mathcal{H}_3 \\ \mathcal{H}_6 \leftrightarrow \mathcal{H}_6 \\ GL_2(q)_a \leftrightarrow GL_2(q)_b \\ U_2(q)_a \leftrightarrow U_2(q)_b \end{gathered}$$

3.3 Deligne–Lusztig-Charaktere

Sei $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende, reduktive algebraische Gruppe der Charakteristik p und F eine Standard Frobenius-Abbildung von $\mathbf{G}$. Wir wählen ein Primzahl $\ell \neq p$ und setzen $K = \bar{\mathbb{Q}}_\ell$, den algebraischen Abschluß der ℓ-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_\ell$. Sei weiter $\mathbf{L}$ eine reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$, und $\mathbf{P}$ eine parabolische Untergruppe, die $\mathbf{L}$ enthält. In seiner Arbeit (siehe [65, Abschnitt 1]) definiert Lusztig den Funktor

$$R_{L,\mathbf{P}}^G : \mathcal{R}_K(L) \longrightarrow \mathcal{R}_K(G). \tag{3.5}$$

Die Erweiterung dieses Funktors auf Klassenfunktionen $\mathcal{C}(L)$ werde mit dem gleichen Symbol bezeichnet. Es wird vermutet, daß dieser Funktor von der speziellen parabolischen Untergruppe $\mathbf{P}$, die $\mathbf{L}$ enthält, unabhängig ist. Diese Vermutung ist aber bisher nur für gute Primzahlen p und große q bewiesen. Wenn die Unabhängikeit von $\mathbf{P}$ klar ist, dann schreiben wir einfach R_L^G statt $R_{L,\mathbf{P}}^G$. Falls $\mathbf{L} = \mathbf{T}$ ein maximaler Torus ist, dann ist $R_T^G = R_{T,\mathbf{P}}^G$ unabhängig von $\mathbf{P}$. In diesem Fall ist es der berühmte Deligne–Lusztig-Funktor, den sie in [15] eingeführt haben. Falls $\mathbf{L}$ maximal zerfallend ist, ist R_L^G die Harish-Chandra-Induktion. Die Abbildung $R_{L,\mathbf{P}}^G$ heißt deshalb auch *verschränkte Induktion (twisted induction)*. Wir wollen nun einige ihrer wichtigsten Eigenschaften auflisten. Zunächst haben wir die

(1) Gradformel (siehe [18, Proposition 3.10]):

$$\varepsilon_G \varepsilon_L R_{L,\mathbf{P}}^G(\vartheta)(1) = \vartheta(1)\,|G : L|_{p'}. \tag{3.6}$$

Hierbei steht ε_G für $(-1)^{\rho_G}$, wobei ρ_G den relativen Rang von $\mathbf{G}$ bezeichnet (vgl. [10, Seite 197]). Das Skalarprodukt eines Deligne–Lusztig-Charakters mit einem durch verschränkte Induktion erhaltenen ist gegeben durch die folgende

(2) Skalarpoduktformel (siehe [16, (7.1)]):

$$\langle R_{L,\mathbf{P}}^G(\mu), R_T^G(\vartheta)\rangle_G = \frac{1}{|L|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}\mathbf{T}x \leq \mathbf{L}}} \langle \mu, R_{x^{-1}Tx}^L({}^x\vartheta)\rangle_L. \tag{3.7}$$

Für den Fall, daß $\mathbf{L}$ ein maximaler Torus ist, erhalten wir hieraus die bekannte Formel für das Skalarprodukt zweier Deligne–Lusztig-Charaktere:

$$\langle R_T^G(\vartheta), R_{T'}^G(\vartheta')\rangle = |T|^{-1}|\{g \in G \mid \mathbf{T}^g = \mathbf{T}', {}^g\vartheta' = \vartheta\}|. \tag{3.8}$$

Aus dieser Skalarproduktformel sieht man sofort, daß $\pm R_T^G(\vartheta)$ ein irreduzibler Charakter ist, wenn ϑ *in allgemeiner Lage* ist, d.h. wenn die Bahn von ϑ unter $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})^F/\mathbf{T}^F$ regulär ist.

Weiter benötigen wir des öfteren die folgende Regel der

(3) Transitivität (siehe [18, Proposition 1.9]):

$$R^G_{L,\mathbf{P}}(R^L_{M,\mathbf{Q}\cap\mathbf{L}}(\vartheta)) = R^G_{M,\mathbf{Q}}(\vartheta), \tag{3.9}$$

wenn $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{L}$ zwei reguläre Untergruppen sind, die in den parabolischen Untergruppen $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ liegen.

Schließlich benötigen wir noch eine Vertauschungsregel, wie sie ähnlich für die gewöhnliche Induktion und die Einschränkung von Charakteren gilt.

(4) Produktregel (siehe [18, Proposition 3.8]):

$$R^G_{L,\mathbf{P}}(\zeta) \cdot \vartheta = R^G_{L,\mathbf{P}}(\zeta \cdot \mathrm{Res}^G_L(\vartheta)), \tag{3.10}$$

wenn ζ irgendeine Klassenfunktion von L und ϑ eine p-konstante Klassenfunktion von G ist. Dabei heißt eine Klassenfunktion ϑ *p-konstant*, wenn für alle $g \in G$ gilt: $\vartheta(g) = \vartheta(g_s)$, wobei g_s den halbeinfachen Anteil von g bezeichnet.

In den folgenden Anwendungen werden wir für den Funktor $R^G_{L,\mathbf{P}}$ einfach nur R^G_L schreiben, wenn keine Unklarheiten zu befürchten sind. Zur Einführung der Deligne–Lusztig-Charaktere R^G_T benötigt man nicht, daß F Standard ist. Sämtliche oben angeführte Regeln sind dann in diesem etwas allgemeineren Zusammenhang gültig. Wir werden deshalb von jetzt an nicht mehr grundsätzlich annehmen, daß F eine Standard Frobenius-Abbildung ist, sondern dies gegebenenfalls stillschweigend voraussetzen.

Um später die geometrischen Konjugiertenklassen von Charakteren bequemer einführen zu können, wählen wir eine andere Bezeichnung für die Deligne–Lusztig-Charaktere $R^G_T(\vartheta)$. Offensichtlich hängt $R^G_T(\vartheta)$ nur von der G-Klasse $[\mathbf{T},\vartheta]$ von $(\mathbf{T},\vartheta)$ ab, und nicht von dem speziell daraus gewählten Repräsentanten. Ist nun $[\mathbf{T},\vartheta] \leftrightarrow [\mathbf{T}^*,t]$, so schreiben wir statt $R^G_T(\vartheta)$ auch $R^G_{T^*}(t)$. Für die $R^G_{T^*}(t)$ gilt eine zu (3.8) analoge Skalarproduktformel ([66, (7.51)]). Weiter gilt: Haben $R^G_{T_1^*}(t_1)$ und $R^G_{T_2^*}(t_2)$ einen gemeinsamen Konstituenten, so sind t_1 und t_2 in G^* konjugiert ([66, (7.5.2)]).

3.4 Charaktere in geometrischen Konjugiertenklassen

Definition 3.4.1 Sei $s \in G^*$ ein halbeinfaches Element.

(a) (vgl. [66])

$$\mathcal{E}(G,s) = \bigcup_{\mathbf{T}^*} \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \langle \chi, R^G_{T^*}(s)\rangle_G \neq 0\},$$

wobei $\mathbf{T}^*$ die maximalen F^*-stabilen Tori von $\mathbf{G}^*$ durchläuft, die s enthalten. Diese Menge, die nur von der G^*-Konjugiertenklasse von s abhängt, heißt *rationale Klasse* von Charakteren.

(b)
$$\bigcup_{s' \in ((s)) \cap G^*} \mathcal{E}(G, s')$$

heißt *geometrische Konjugiertenklasse* von Charakteren. Dabei steht $((s))$ für die $\mathbf{G}^*$-Konjugiertenklasse von s.

Ist das Zentrum von $\mathbf{G}$ zusammenhängend, so sind alle F-stabilen Elemente aus der $\mathbf{G}^*$-Konjugiertenklasse von s bereits in G^* konjugiert ([10, Theorem 4.5.9]), und die geometrischen Konjugiertenklassen von Charakteren stehen in Bijektion zu den G^*-Konjugiertenklassen halbeinfacher Elemente von G^*. Ist der irreduzible Charakter ϑ des maximalen Torus T in allgemeiner Lage, dann ist $\pm R_T^G(\vartheta)$ ein irreduzibler Charakter von G und bildet eine geometrische Konjugiertenklasse für sich.

Die Elemente in $\mathcal{E}(G, 1)$ heißen *unipotente Charaktere*. Sie spielen eine herausragende Rolle in der Deligne–Lusztig-Theorie, bilden sie doch in gewisser Weise die Bausteine für alle irreduziblen Charaktere.

Beispiel 3.4.2 Sei $G = G_2(q)$. Die zehn Charaktere $X_{11}, X_{12}, \ldots, \bar{X}_{19}$ sind die unipotenten Charaktere von $G_2(q)$.

Falls q ungerade ist, bilden die Charaktere $X_{21}, \ldots, X_{24}$ die geometrische Konjugiertenklasse $\mathcal{E}(G, h(-1, -1, 1))$.

Für jede Klasse vom Typ h_{1a} gibt es eine zweielementige geometrische Konjugiertenklasse bestehend aus je einem Charakter vom Typ X_{1b} bzw. X'_{1b}.

Bemerkung 3.4.3 Der Lusztig-Funktor erhält rationale Klassen von Charakteren. Sei $\mathbf{L}$ eine reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$ und $s \in \mathbf{L}^* \leq \mathbf{G}^*$ ein halbeinfaches Element. Liegt ϑ in $\mathcal{E}(L, s)$, dann ist $R_L^G(\vartheta)$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Charakteren aus $\mathcal{E}(G, s)$. Insbesondere werden unipotente Charaktere auf $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von unipotenten abgebildet.

Ein Beweis dieser Bemerkung wird in [65] skizziert. Diesen Literaturhinweis verdanke ich J. Michel.

3.5 Der Gelfand–Graev-Charakter

Wir setzen voraus, daß das Zentrum von $\mathbf{G}$ zusammenhängend ist. Sei U die maximale unipotente Untergruppe von G. Der *Gelfand–Graev-Charakter* Γ von G ist ein Charakter der Form $\Gamma = \mathrm{Ind}_U^G(\sigma)$. Dabei ist σ ein bis auf die Operation von $N_G(U)$ wohldefinierter 1-dimensionaler Charakter von U. Für die exakte Definition von σ sowie die wichtigsten Eigenschaften von Γ wird der Leser auf [10, Section 8.1] verwiesen. Es stellt sich heraus, daß Γ vielfachheitsfrei ist. Aus jeder geometrischen Konjugiertenklasse von Charakteren

$\mathcal{E}(G,s)$ enthält Γ genau einen Konstituenten. Dieser heißt *regulärer Charakter* von $\mathcal{E}(G,s)$. Der reguläre Charakter darf nicht verwechselt werden mit dem Charakter der regulären Darstellung von G.

Neben dem regulären gibt es einen weiteren ausgezeichneten Charakter in jeder geometrischen Konjugiertenklasse, den *halbeinfachen Charakter*. Im generischen Fall ist der halbeinfache derjenige eindeutig bestimmte Charakter von $\mathcal{E}(G,s)$, dessen Grad nicht durch p geteilt wird. Der Leser möge diese Charakterisierung mit der Definition der halbeinfachen Elemente von G vergleichen. Von dieser generischen Beschreibung der halbeinfachen Charaktere gibt es allerdings Ausnahmen, wie in untenstehenden Beispielen gezeigt wird. Die präzise Definition des halbeinfachem Charakters findet sich in [10, Section 8.4].

Dort findet sich auch die genaue Definition des regulären Charakters, der generisch dadurch gekennzeichnet ist, daß sein Grad unter allen Graden der Elemente von $\mathcal{E}(G,s)$ den höchsten p-Anteil besitzt.

Beispiel 3.5.1 (a) In der geometrischen Konjugiertenklasse der unipotenten Charaktere ist der triviale Charakter der halbeinfache, der Steinbergcharakter der reguläre.

(a) Die generische Kennzeichnung der halbeinfachen bzw. regulären Charaktere ist in Ordnung für die Gruppe $G_2(q)$, wenn q weder von 2 noch von 3 geteilt wird. Dagegen ist z.B. für $q=3$ der Charakter X_{13} ein weiterer unipotenter mit zu p teilerfremdem Grad.

Für unsere Zwecke ist der Gelfand–Graev-Charakter deshalb von Bedeutung, weil er der Charakter eines projektiven Moduls der Charakteristik ℓ ist, wenn nur ℓ und p verschieden sind. In der Tat ist in diesem Fall σ der Charakter eines projektiven Moduls für U, also $\Gamma = \mathrm{Ind}_U^G(\sigma)$ ein solcher für G.

Kawanaka hat in [59] verallgemeinerte Gelfand–Graev-Charaktere definiert, die im allgemeinen ebenfalls projektiv sind. Diese hat M. Geck in [40] verwendet, um zu zeigen, daß die Zerlegungsmatrizen in $GL_n(q)$ und $U_n(q^2)$ für $\ell \neq p$ immer Dreiecksgestalt haben (siehe die Definition von Dreiecksgestalt in Kapitel 2). Es ist durchaus denkbar, daß sich seine Methoden auf andere Gruppen vom Lie-Typ übertragen lassen um analoge Aussagen zu erzielen.

3.6 Die Jordan-Zerlegung der Charaktere

Wir behalten weiter unsere Voraussetzung bei, daß $\mathbf{G}$ ein zusammenhängendes Zentrum hat. Dann sind die Zentralisatoren von halbeinfachen Elementen der dualen Gruppe auch zusammenhängend (siehe [10, Theorem 4.5.9]). In vollständiger Analogie zur Jordan-Zerlegung der Elemente in einer linearen algebraischen Gruppe existiert nun eine sogenannte Jordan-Zerlegung der

Charaktere in einer endlichen reduktiven Gruppe. Diese ergibt sich für Standard Frobenius-Abbildungen aus dem Hauptergebnis (Theorem 4.23) sowie für die Suzuki- und Ree-Gruppen aus dem abschließenden Kapitel von Lusztigs Buch [68].

Satz 3.6.1 (Jordan-Zerlegung der Charaktere, Lusztig): *Sei $Z(\mathbf{G})$ zusammenhängend und $s \in G^*$ halbeinfach. Dann existiert eine Bijektion*

$$\mathcal{L}'_s : \mathcal{E}(G, s) \longrightarrow \mathcal{E}(C_{G^*}(s)^*, 1). \tag{3.11}$$

Ist $\chi \in \mathcal{E}(G, s)$ und ist $\mathbf{T}^*$ ein maximaler Torus von $\mathbf{G}^*$, der s enthält, dann gilt

$$\langle \chi, R^G_{T^*}(s) \rangle = \varepsilon_G \varepsilon_{C_{G^*}(s)} \langle \mathcal{L}'_s(\chi), R^{C_{G^*}(s)^*}_{T^*}(1) \rangle \tag{3.12}$$

und

$$\chi(1) = \mathcal{L}'_s(\chi)(1) |G^* : C_{G^*}(s)|_{p'}. \tag{3.13}$$

■

Ist $\mathcal{L}'_s(\chi) = \lambda$, dann schreiben wir $\chi = \chi_{s,\lambda}$.

Beispiel 3.6.2 (a) Die Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von $G_2(q)$ mittels der „Jordan-Zerlegung der Charaktere“ ist in Anhang B.4 dargestellt.

(b) Der reguläre Charakter in $\mathcal{E}(G, s)$ ist $\chi_{s,\mathrm{St}}$, wobei St den Steinbergcharakter von $C_{G^*}(s)^*$ bezeichnet. Der halbeinfache Charakter ist $\chi_{s,1}$.

Im allgemeinen ist die Bijektion (3.11) schwierig zu beschreiben. Sie wurde von Lusztig in [68] bewiesen, und zwar Fall für Fall. In einem Spezialfall gibt es aber eine sehr einfache Beschreibung dieser Bijektion, nämlich dann, wenn $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ ein reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}^*$ ist.

Satz 3.6.3 (Siehe z.B. [18, Proposition 6.6–6.8]): *Es sei $Z(\mathbf{G})$ zusammenhängend und F eine Standard Frobenius-Abbildung von $\mathbf{G}$. Sei s ein halbeinfaches Element aus G^*, so daß $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ eine reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}^*$ ist. Unter der Bijektion (3.4) korrespondiere $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ zu $\mathbf{G}(s) \leq \mathbf{G}$. Sei $\mathbf{T}^*$ der maximal zerfallende Torus von $C_{\mathbf{G}^*}(s)$. Wegen $s \in Z(C_{\mathbf{G}^*}(s))$ korrespondiert zu s ein linearer Charakter $\hat{s}$, so daß gilt $[\mathbf{T}, \hat{s}] \leftrightarrow [\mathbf{T}^*, s]$. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}(\mathbf{G}(s)^F, 1) & \longrightarrow & \mathcal{E}(G, s) \\ \lambda & \longmapsto & \varepsilon_G \varepsilon_{G(s)} R^G_{\mathbf{G}(s)^F}(\hat{s}\lambda) \end{array} \tag{3.14}$$

eine Bijektion und induziert somit eine Isometrie zwischen den zugehörigen Charaktergruppen. ■

Kapitel 4

Blöcke

Die Einteilung der gewöhnlichen Charaktere in Brauer-Blöcke ist heute für die meisten Serien der „einfachen“ Gruppen vom Lie-Typ bekannt. Die klassischen Gruppen wurden von Fong und Srinivasan in mehreren Arbeiten behandelt [33, 34, 36]. Auch für die kleinen Serien der exzeptionellen Gruppen vom Lie-Typ liegen vollständige Ergebnisse vor, die jedoch noch nicht alle veröffentlicht sind ([71, 32, 80, 81, 82, 83, 17, 70]).

Es zeigt sich, daß in allen diesen Fällen die Blockeinteilung der Charaktere in bemerkenswerter Weise mit der Einteilung in rationale Serien von Charakteren verträglich ist. Dies hat Broué und Michel dazu motiviert, der Frage nach den Brauer-Blöcken ganz allgemein nachzugehen, also losgelöst von einer speziellen Serie. In [5] geben sie einen einfachen, allgemeinen Beweis für diese Verträglichkeit der beiden Partitionen. Weitere Resultate von Broué reduzieren dann in vielen Fällen die Frage nach der genauen Einteilung auf die entsprechende Frage bei unipotenten Blöcken. Zuvor hatte schon Schewe in seiner Dissertation [78] vergleichbare Ergebnisse bei den exzeptionellen Gruppen vom Lie-Typ erzielt. Seine Aussagen beruhen allerdings zum Teil auf noch unbewiesenen Vermutungen, und sollten deshalb vorwiegend als Leitfaden benutzt werden.

In diesem Kapitel möchte ich erstens diese bekannten Ergebnisse ohne Beweis vorstellen, und zweitens einige weitere Resultate ganz allgemeiner Natur herleiten. Diese sollen später bei der Bestimmung der Zerlegungsmatrizen der $G_2(q)$ und der Brauerbäume der Ree-Gruppen angewendet werden. Desweiteren werden einige noch offenen Fragen durch die Behandlung von Spezialfällen beleuchtet.

Die meisten der hier von mir bewiesenen Ergebnisse sowie der offenen Fragen wurden zuerst am Beispiel der $G_2(q)$ beobachtet. Später erkannte ich dann, auf welche Art viele Beweise verallgemeinert werden konnten, oder wie sich sinnvolle Fragen für alle Gruppen vom Lie-Typ ergaben. So hat also die Behandlung eines substantiellen Beispiels, in diesem Falle der $G_2(q)$, viele allgemeine Ergebnisse und Probleme motiviert. Dies rechtfertigt meiner Meinung nach die Bearbeitung solcher Beispiele, auch, wie es im vorliegenden

Fall teilweise geschehen ist, unter Zuhilfenahme von Computern.

Die im vorigen Kapitel eingeführten Bezeichnungen werden beibehalten. Stets sei (K, R, k) ein ℓ-modulares Zerfällungssystem für die endliche reduktive Gruppe G und deren Untergruppen. Dabei seien ℓ und p, die definierende Charakteristik von G, verschieden. Ist $\chi \in \mathcal{C}(G)$, dann wird mit $\breve{\chi}$ die Einschränkung von χ auf die ℓ'-Klassen von G bezeichnet.

4.1 Die Basisrelation

Sei $\mathbf{L}$ eine reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$ und $\sigma, \sigma' \in \mathcal{C}(L)$ mit $\breve{\sigma} = \breve{\sigma'}$. Für die Einschränkung der Deligne–Lusztig-Charaktere auf die ℓ'-Klassen von G gilt nun:

$$\breve{R}_L^G(\sigma) = \breve{R}_L^G(\sigma'). \tag{4.1}$$

Diese Beobachtung folgt etwa aus der Produktformel (3.10), indem man für die p-konstante Funktion ϑ die charakteristische Funktion auf den ℓ'-Klassen von G nimmt. Diese ist p-konstant, weil $\ell \neq p$ ist.

Eine leicht veränderte Formulierung dieser Relation für maximale Tori unter Berücksichtigung der Bijektion (3.3) soll im folgenden die *Basisrelation* heißen.

Proposition 4.1.1 (Hiss [49]): *Sei s ein halbeinfaches ℓ'-Element aus G^* und t ein ℓ-Element aus $C_{G^*}(s)$. Ist $\mathbf{T}^*$ ein F-stabiler Torus von $\mathbf{G}^*$, der st enthält, dann ist*

$$\breve{R}_{T^*}^G(st) = \breve{R}_{T^*}^G(s). \tag{4.2}$$

Beweis: Sei $[\mathbf{T}^*, st] \leftrightarrow [\mathbf{T}, \sigma\tau]$, mit $|\sigma| = |s|$ und $|\tau| = |t|$. Dies kann man nach Lemma 3.2.3 immer annehmen. Nach dem gleichen Lemma haben wir $[\mathbf{T}^*, s] \leftrightarrow [\mathbf{T}, \sigma]$. Also

$$\begin{aligned} \breve{R}_{T^*}^G(st) &= \breve{R}_T^G(\sigma\tau) \\ &= \breve{R}_T^G(\sigma) \\ &= \breve{R}_{T^*}^G(s) \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung aus (4.1) folgt. ■

4.2 Blöcke in geometrischen Konjugiertenklassen

Die Charaktere in $\mathcal{E}(G, s)$ sind per Definition genau die Konstituenten von $R_{T^*}^G(s)$ mit $s \in T^*$. Für ein ℓ'-Element $s \in G^*$ und ein ℓ-Element $t \in C_{G^*}(s)$ ist nach der Basisrelation $\breve{R}_{T^*}^G(st) = \breve{R}_{T^*}^G(s)$. Dies legt folgende Definition nahe.

Definition 4.2.1 (Broué–Michel [5]): Für ein halbeinfaches ℓ'-Element $s \in G^*$ sei

$$\mathcal{E}_\ell(G,s) = \bigcup_{t \in C_{G^*}(s)_\ell} \mathcal{E}(G,st), \tag{4.3}$$

wobei H_ℓ die Menge der ℓ-Elemente einer Gruppe H bezeichnet.

Der folgende Satz präzisiert nun die in der Einleitung zu diesem Kapitel angedeutete Verträglichkeit der rationalen Serien von Charakteren mit der Einteilung der Charaktere in ℓ-Blöcke.

Satz 4.2.2 (Broué–Michel [5]): *Ist F eine Standard Frobenius-Abbildung, dann ist $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ eine Vereinigung von ℓ-Blöcken.* ■

In Analogie zum Begriff der geometrischen Konjugiertenklasse von Charakteren nennen wir die Vereinigung von Blöcken

$$\bigcup_{s' \in ((s)) \cap G^*} \mathcal{E}_\ell(G,s')$$

eine *geometrische Konjugiertenklasse von ℓ-Blöcken*. Zum Beweis des obigen Satzes sei nur erwähnt, daß Broué und Michel zeigen, daß das zu $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ gehörige zentrale Idempotent von KG bereits in RG liegt. Es sei weiter betont, daß dieses Ergebnis vollkommen allgemein ist, also nicht nur etwa für Gruppen mit zusammenhängendem Zentrum gilt. Auch für die Suzuki- und Ree-Gruppen ist eine analoge Aussage richtig, wie später noch skizziert werden soll. Wir werden also für den Rest des Kapitels voraussetzen, daß $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ eine Vereinigung von ℓ-Blöcken ist.

Nach den Ausführungen in Kapitel 2 erhebt sich nun die Frage nach geeigneten Basissystemen für $\mathcal{E}_\ell(G,s)$. Die zahlreichen Beispiele und die Basisrelation lassen die folgende Aussage plausibel erscheinen:

Aussage 4.2.3 Die Elemente aus

$$\{\breve{\chi} \mid \chi \in \mathcal{E}(G,s)\} \tag{4.4}$$

erzeugen den $\mathbb{Z}$-Modul der Brauercharaktere von $\mathcal{E}_\ell(G,s)$.

Bei den allgemeinen linearen und den unitären Gruppen ist es sogar so, daß die Charaktere (4.4) ein Basissystem im Sinne von Kapitel 2 bilden (siehe [34, Theorem (8A)]). Das gleiche gilt auch für $G_2(q)$ im Falle $\ell > 3$. Für $\ell = 2$ oder 3 läßt sich aus (4.4) immerhin noch ein Basissystem auswählen. Auch für die anderen, bisher behandelten Gruppen ist die Aussage 4.2.3 richtig, insbesondere für ${}^3D_4(q^3)$ [41] und ${}^2F_4(q^2)$, wie Malle gezeigt hat. Aussage 4.2.3 ist dagegen nicht richtig für den Hauptblock von $Sp_4(q)$, q ungerade und $\ell = 2$ (siehe White [93]). Es erhebt sich also die Frage, unter welchen Zusatzvoraussetzungen aus Aussage 4.2.3 ein Satz wird. Eine Möglichkeit wäre es, für G nur Gruppen mit zusammenhängendem Zentrum zu betrachten. Dies wird etwa nahegelegt durch das obige Gegenbeispiel in der $Sp_4(q)$, die eben nicht von einer algebraischen Gruppe mit zusammenhängendem Zentrum herkommt. M. Geck hat vorgeschlagen, einen Beweis von Aussage 4.2.3 unter der Voraussetzung zu versuchen, daß ℓ eine „sehr gute Primzahl" (siehe [10, Seite 29]) für $\mathbf{G}$ ist. Bei der $GL_n(q)$ lassen sich die Charaktere des Basissystems (4.4) so anordnen, daß ihre Zerlegungsmatrix Dreiecksgestalt hat [20, Theorem 3.8]. Die Ordnung ist dabei auf natürliche Weise durch eine zugrundeliegende kombinatorische Struktur, nämlich Partitionen von n, vorgegeben. Auch in der $G_2(q)$ läßt sich für jeden Block ein Basissystem finden und so anordnen, daß Dreiecksgestalt entsteht.

In [40] benutzt Geck die verallgemeinerten Gelfand–Graev-Charaktere, um die Zerlegungsmatrizen der $U_n(q^2)$ auf Dreiecksgestalt zu bringen. Die dazu notwendige Anordnung der Charaktere entspringt einer Abbildung ξ, die Lusztig definiert hat: Jedem irreduziblen Charakter χ von G wird eine F-stabile unipotente Konjugiertenklasse $\xi(\chi)$ von $\mathbf{G}$ zugeordnet. Die Menge dieser Klassen besitzt eine natürliche Halbordnung, die auf $\mathrm{Irr}(G)$ mittels ξ zurückgezogen wird. Ließen sich seine Methoden auf beliebige Gruppen vom Lie-Typ verallgemeinern, dann hätte man nicht nur ein Basissystem gefunden, sondern darüberhinaus noch die Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix erreicht.

Es wäre wünschenswert, die Aussage 4.2.3 nicht nur Fall-für-Fall zu beweisen, sondern allgemein. Weiterhin wären allgemeine Resultate über die Relationen in $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ nützlich. Bevor wir in einem wichtigen Spezialfall die Aussage 4.2.3 beweisen, betrachten wir zunächst die irreduziblen Brauercharaktere in $\mathcal{E}_\ell(G,s)$.

Proposition 4.2.4 (Hiss [49]): *Jeder irreduzible ℓ-modulare Charakter von $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ ist ein Konstituent eines gewöhnlichen Charakters von $\mathcal{E}(G,s)$.*

Beweis: Sei φ ein irreduzibler Brauercharakter in $\mathcal{E}_\ell(G,s)$, und Φ_φ der zugehörige projektiv unzerlegbare Charakter. Weil $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ eine Vereinigung von ℓ-Blöcken ist, ist Φ_φ eine Linearkombination von Charakteren aus $\mathcal{E}_\ell(G,s)$. Also ist $\langle \Phi_\varphi, R^G_{T^*}(x)\rangle = 0$, außer x ist in G^* zu st für ein $t \in C_{G^*}(s)_\ell$ konjugiert.

Sei χ_{reg} der Charakter der regulären Darstellung von G, der nach [10, Corollary 7.5.6] eine Linearkombination von Deligne–Lusztig-Charakteren ist. Wegen $\langle \Phi_\varphi, \chi_{\mathrm{reg}}\rangle \neq 0$, existiert also ein F-stabiler maximaler Torus $\mathbf{T}$ und $\vartheta \in \mathrm{Irr}(T)$, so daß $\langle \Phi_\varphi, R^G_T(\vartheta)\rangle \neq 0$. Sei $[\mathbf{T},\vartheta] \leftrightarrow [\mathbf{T}^*, x]$. Nach obiger Bemerkung ist x konjugiert zu st für ein F^*-stabiles ℓ-Element t, welches s zentralisiert. Unter Ausnützung der Basisrelation (4.2) und der Projektivität von Φ_φ erhalten wir also:

$$0 \neq \langle \Phi_\varphi, R^G_{T^*}(st)\rangle$$

$$\begin{aligned} &= \langle \breve{\Phi}_\varphi, \breve{R}^G_{T^*}(st)\rangle' \\ &= \langle \breve{\Phi}_\varphi, \breve{R}^G_{T^*}(s)\rangle' \\ &= \langle \Phi_\varphi, R^G_{T^*}(s)\rangle. \end{aligned}$$

Also gibt es einen irreduziblen Charakter χ in $\mathcal{E}(G,s)$ mit $\langle \Phi_\varphi, \chi\rangle \neq 0$. Es folgt daß φ ein Konstituent von $\breve{\chi}$ ist. Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Definition 4.2.5 Ein ℓ-Block von G heißt unipotent, wenn er mindestens einen unipotenten Charakter enthält.

Auf die nachstehenden Folgerungen aus Proposition 4.2.4 wurde ich von M. Geck aufmerksam gemacht.

Korollar 4.2.6 (a) *Ein ℓ-Block von G ist genau dann unipotent, wenn er in $\mathcal{E}_\ell(G,1)$ liegt.*

(b) *Ist $A \subseteq \mathcal{E}_\ell(G,s)$ ein ℓ-Block mit $\mathcal{E}(G,s) \subseteq A$, dann ist $A = \mathcal{E}_\ell(G,s)$.*

Beweis: (a) Sei A ein unipotenter ℓ-Block. Da A in einem $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ liegt und unipotente Charaktere enthält, muß $s = 1$ sein.

Sei umgekehrt A ein Block in $\mathcal{E}_\ell(G,1)$ und φ ein irreduzibler Brauercharakter in A. Nach Proposition 4.2.4 existiert ein unipotenter Charakter χ, der φ als modularen Konstituenten enthält. Dann liegt auch χ in A, welcher somit ein unipotenter Block ist.

(b) Sei $\chi \in \mathcal{E}_\ell(G,s)$ und φ ein irreduzibler Konstituent von $\breve{\chi}$. Nach Proposition 4.2.4 existiert ein $\psi \in \mathcal{E}(G,s) \subseteq A$, so daß φ ein Konstituent von $\breve{\psi}$ ist. Damit liegt auch χ in A. ∎

Es stellt sich nun natürlich die Frage nach den Defektgruppen der Blöcke in $\mathcal{E}_\ell(G,s)$, auf die aber in dieser Arbeit nicht näher eingegangen wird.

4.3 Jordan-Zerlegung von Blöcken

Für den Rest des Kapitels nehmen wir nun an, daß $Z(\mathbf{G})$ zusammenhängend ist. Mit dem Schlagwort „Jordan-Zerlegung der Charaktere“ hatten wir die Existenz der Bijektion (3.11) zwischen $\mathcal{E}(G,s)$ und $\mathcal{E}(C_{G^*}(s),1)$ bezeichnet. Diese induziert in natürlicher Weise eine Bijektion zwischen den Mengen $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ und $\mathcal{E}_\ell(C_{G^*}(s)^*,1)$: Zunächst haben wir

$$\mathcal{E}_\ell(G,s) = \bigcup_{t \in C_{G^*}(s)_\ell} \mathcal{E}(G,st)$$

und

$$\mathcal{E}_\ell(C_{G^*}(s)^*,1) = \bigcup_{t \in C_{G^*}(s)_\ell} \mathcal{E}(C_{G^*}(s)^*,t).$$

Nach (3.11) gibt es für jedes $t \in C_{G^*}(s)_\ell$ Bijektionen:

$$\mathcal{E}(G,st) \longleftrightarrow \mathcal{E}(C_{G^*}(st)^*,1) \longleftrightarrow \mathcal{E}(C_{G^*}(s)^*,t) \qquad (4.5)$$

Aussage 4.3.1 (Jordan-Zerlegung von Blöcken): Die Bijektionen (4.5) sind mit der Einteilung in ℓ-Blöcke verträglich. Mit anderen Worten: Sie bilden Blöcke auf Blöcke ab.

Ist diese Aussage richtig, dann heißt die Bijektion zwischen den ℓ-Blöcken von $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ und den unipotenten Blöcken von $C_{G^*}(s)^*$ die „Jordan-Zerlegung von Blöcken". Es soll aber noch einmal betont werden, daß es sich hierbei noch nicht um einen Satz handelt, sondern nur um eine Beobachtung, die jedoch schon in den meisten Fällen bestätigt ist. Unter zusätzlichen Voraussetzungen an den Zentralisator von s hat Broué einen sehr schönen, einfachen Beweis für diese Jordan-Zerlegung von Blöcken gegeben.

Ist $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ eine reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}^*$, so korrespondiert dazu bis auf Konjugation mit Elementen aus G eine reguläre Untergruppe $\mathbf{G}(s)$ von $\mathbf{G}$ und ein linearer Charakter $\hat{s}$ von $\mathbf{G}(s)^F$. Für $\mathbf{G}(s)^F$ schreiben wir im folgenden einfach $G(s)$. Mit dieser Notation gilt nun der folgende bemerkenswerte Satz:

Satz 4.3.2 (Broué [3], Jordan-Zerlegung von Blöcken): *Sei F eine Standard Frobenius-Abbildung. Die Zuordnung $\lambda \mapsto R^G_{G(s)}(\hat{s}\lambda)$ zwischen $\mathcal{E}_\ell(G(s),1)$ und $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ induziert eine perfekte Isometrie zwischen den zugehörigen Charaktergruppen. Insbesondere bildet sie Blöcke auf Blöcke ab, und erhält die Anzahl der irreduziblen gewöhnlichen und die Anzahl der irreduziblen Brauercharaktere. Außerdem bleiben die Höhen der gewöhnlichen Charaktere erhalten.* ■

Satz 4.3.2 reduziert das Problem der Blockeinteilung von $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ auf das entsprechende Problem in $\mathcal{E}_\ell(G(s),1)$ (oder, falls sich die Jordan-Zerlegung als allgemeines Ergebnis erweisen sollte, auf das entsprechende Problem in $\mathcal{E}_\ell(C_{G^*}(s)^*,1)$).

Die Jordan-Zerlegung von Blöcken wurde zuerst von Fong und Srinivasan im Falle der $GL_n(q)$ und der $U_n(q^2)$ beobachtet [34]. Auch bei den übrigen klassischen Gruppen stellt sie sich als richtig heraus [36]. Schewe hat in seiner Dissertation [78] unter zusätzlichen Voraussetzungen an ℓ für die exzeptionellen Gruppen vom Lie-Typ die Richtigkeit der Aussage 4.3.1 bewiesen. Bei der $G_2(q)$ folgt diese durch direktes Bestimmen der Blöcke mittels zentraler Charaktere (siehe [80, 81, 82, 83]). Weiter ist die Jordan-Zerlegung von Blöcken vollständig bekannt für die Gruppen ${}^3D_4(q^3)$ durch die Arbeit von Deriziotis und Michler [17], für die Ree-Gruppen ${}^2F_4(q^2)$ durch die Arbeit von Malle [70], für die Suzuki-Gruppen durch Burkhardt [7] und Martineau [71] und schließlich für die Ree-Gruppen ${}^2G_2(q^2)$ in Charakteristik 2 durch Fong [32]. Es ist leicht zu sehen, daß sie für diese Gruppen auch in ungerader Charakteristik $\ell \neq 3$ richtig ist. Die einzigen Gruppen, für die die Richtigkeit von Aussage 4.3.1 noch nicht bekannt ist, sind also $F_4(q)$, ${}^2E_6(q^2)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$ und $E_8(q)$. Nach Satz 4.3.2 besteht das Problem in der Bestimmung der Blöcke innerhalb $\mathcal{E}_\ell(G,s)$, wenn $s=1$ oder ein halbeinfaches Element ist, dessen Zentralisator keine reguläre Untergruppe ist.

Wir sind nun auch in der Lage, Aussage 4.2.3 in wichtigen Spezialfällen zu beweisen.

Satz 4.3.3 *Es sei $Z(\mathbf{G})$ zusammenhängend und F eine Standard Frobenius-Abbildung. Für ein halbeinfaches ℓ'-Element $s \in G^*$ und jedes ℓ-Element t aus $C_{G^*}(s)$ sei $C_{\mathbf{G}^*}(st)$ eine reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}^*$. Sei $\mathbf{G}(s)$ die nach (3.4) zu $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ korrespondierende reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$, und $\hat{s}$ der lineare Charakter von $G(s)$, der s wie in Satz 3.6.3 zugeordnet ist. Sei weiter $\mathbf{L} \leftrightarrow C_{\mathbf{G}^*}(st)$ für ein halbeinfaches ℓ-Element $t \in C_{G^*}(s)$. Dann gilt:*

(a) Jeder Brauercharakter von $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ ist eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Charakteren aus $\{\breve{\chi} \mid \chi \in \mathcal{E}(G,s)\}$, d.h. in diesem Fall ist Aussage 4.2.3 *richtig.*

(b) Ist λ ein unipotenter Charakter von L, so ergibt die Zerlegung von $\varepsilon_G\varepsilon_L R_L^G(\hat{s}\lambda)$ in die Charaktere von $\mathcal{E}(G,s)$ eine Relation. (Dabei wird zur Vereinfachung der Notation die Einschränkung von $\hat{s}$ von $G(s)$ auf L mit dem gleichen Symbol bezeichnet.)

Beweis: Sei $\chi \in \mathcal{E}_\ell(G,s)$. Nach Satz 4.3.2 ist χ von der Gestalt

$$\chi = \varepsilon R_{G(s)}^G(\hat{s}\psi),$$

mit einem Charakter $\psi \in \mathcal{E}_\ell(G(s),1)$ und einem Vorzeichen ε. Sei γ die charakteristische Funktion auf den ℓ'-Klassen von G. Um eine unnötig komplizierte Notation zu vermeiden benutzen wir das gleiche Symbol auch für die Einschränkungen von γ auf verschiedene Untergruppen von G. Da γ eine p-konstante Funktion ist, haben wir nach der Produktregel (3.10):

$$\chi\gamma = \varepsilon R_{G(s)}^G(\hat{s}\gamma\psi).$$

Sei $\psi \in \mathcal{E}(G(s),t)$ mit einem ℓ-Element $t \in G(s)^* = C_G(s)$. Da $C_{\mathbf{G}^*}(st) \leq \mathbf{G}^*$ eine reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}^*$ ist, existiert $\mathbf{G}(st) \leq \mathbf{G}(s)$ mit $\mathbf{G}(st) = C_{\mathbf{G}^*}(st)^*$. Nach Satz 3.6.3 ist

$$\psi = \sigma R_{G(st)}^{G(s)}(\hat{t}\lambda)$$

mit einem unipotenten Charakter λ von $G(st)$ und einem Vorzeichen σ. Damit gilt nun:

$$\begin{aligned}
\chi\gamma &= \varepsilon\sigma R_{G(s)}^G(\hat{s}\gamma R_{G(st)}^{G(s)}(\hat{t}\lambda)) \\
&= \varepsilon\sigma R_{G(s)}^G(\hat{s} R_{G(st)}^{G(s)}(\gamma\hat{t}\lambda)) \\
&= \varepsilon\sigma R_{G(s)}^G(\hat{s} R_{G(st)}^{G(s)}(\gamma\lambda)) \\
&= \varepsilon\sigma\gamma R_{G(s)}^G(\hat{s} R_{G(st)}^{G(s)}(\lambda)).
\end{aligned}$$

Aus der Bemerkung 3.4.3 folgt, daß sich $R_{G(st)}^{G(s)}(\lambda)$ als $\mathbb{Z}$-Linearkombination von unipotenten Charakteren von $G(s)$ schreiben läßt. Also ist, wiederum nach Satz 3.6.3, $R_{G(s)}^{G}(\hat{s}R_{G(st)}^{G(s)}(\lambda))$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Charakteren aus $\mathcal{E}(G, s)$. Damit sind beide Teile des Satzes bewiesen. ∎

In analoger Art beweisen Fong und Srinivasan Satz (8A) von [34]. Da sie ihr Resultat jedoch von vorneherein blockweise formulieren und beweisen, ist ihr Beweis etwas komplizierter. Die blockweise Fassung des obigen Ergebnisses ist eine leichte Folgerung. M. Geck hat mittlerweile gezeigt, daß Aussage 4.2.3 unter erheblich schwächeren Voraussetzungen als oben richtig ist. Weiter kann er beweisen, daß (4.4) unter geeigneten Bedingungen sogar ein Basissystem ist. Dies soll an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Korollar 4.3.4 *Es gelten die Voraussetzungen von* Satz 4.3.3. *Ist A ein ℓ-Block in $\mathcal{E}_\ell(G, s)$, dann sind die Brauercharaktere in A $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von $\{\breve{\chi} \mid \chi \in A \cap \mathcal{E}(G, s)\}$. Bezeichnet $l(A)$ die Anzahl der irreduziblen Brauercharaktere in A, dann ist $l(A) \leq |A \cap \mathcal{E}(G, s)|$.* ∎

Es ist nun an der Zeit, den Geltungsbereich der Sätze 4.3.2 und 4.3.3 etwas zu beleuchten. Wie wir bereits in Kapitel 3 gesehen hatten, ist nicht jeder Zentralisator eines halbeinfachen Elementes eine reguläre Untergruppe. In der $GL_n(q)$ oder der $U_n(q^2)$ ist dies allerdings immer richtig. Allgemeiner gilt (siehe etwa [78, Lemma 1.1]): Ist s ein halbeinfaches Element von G, dessen Ordnung durch keine schlechte Primzahl teilbar ist, dann ist $C_{\mathbf{G}}(s)$ eine reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$. Die schlechten Primzahlen sind in [10, Seite 28] aufgelistet. Eine Primzahl größer 5 ist gut für jede algebraische Gruppe. Für die klassischen Gruppen ist nur 2 eine schlechte Primzahl.

4.4 Jordan-Zerlegung der Brauercharaktere

Wie wir zu Beginn des letzten Abschnittes gesehen haben, induzieren die Bijektionen (4.5) eine Bijektion zwischen $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ und $\mathcal{E}_\ell(C_{G^*}(s)^*, 1)$. Es liegt nun nahe, die Zerlegungsmatrizen dieser beiden Blockvereinigungen zu vergleichen. Der vermutete Zusammenhang ist sehr einfach:

Aussage 4.4.1 (Jordan-Zerlegung von Zerlegungsmatrizen): Die aus (3.11) und (4.5) resultierende Bijektion zwischen $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ und $\mathcal{E}_\ell(C_{G^*}(s)^*, 1)$. erhält die Zerlegungsmatrizen. Mit anderen Worten: Sie bildet die projektiv unzerlegbaren Charaktere auf ebensolche ab.

Die Gleichheit der Zerlegungsmatrizen von $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ und $\mathcal{E}_\ell(C_{G^*}(s)^*, 1)$, aus der natürlich die Jordan-Zerlegung von Blöcken folgt, soll in Analogie zu den bisherigen Begriffsbildungen die „Jordan-Zerlegung von Zerlegungsmatrizen" genannt werden. Sie wurde zum ersten Mal in [47] beobachtet. Sie wurde ebenfalls bestätigt am Beispiel der $Sp_4(q)$, q ungerade, $\ell = 2$, durch D. White in [93]. Dies ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil die Sp_4 in ungerader Charakteristik kein zusammenhängendes Zentrum hat. Aussage 4.4.1 ist außerdem richtig in klassischen Gruppen, wenn die Blöcke eine zyklische Defektgruppe haben (siehe [37, 35]). Außerdem folgt sie aus [22, Theorem 6.2] für alle Blöcke der allgemeinen linearen Gruppe.

In einem Spezialfall kann die Jordan-Zerlegung von Zerlegungsmatrizen allgemein bewiesen werden. Bevor wir dies zeigen, stellen wir zwei Hilfssätze bereit.

Lemma 4.4.2 *Sei* $\mathbf{L}$ *ein* F*-stabiles Levi-Komplement einer* F*-stabilen parabolischen Untergruppe* $\mathbf{P}$ *von* $\mathbf{G}$*, d.h.* $\mathbf{L}$ *ist eine maximal zerfallende reguläre Untergruppe von* $\mathbf{G}$*. Dann erhält der Funktor* R_L^G *Brauercharaktere. Sei weiter* χ *ein verallgemeinerter Charakter von* L*, so daß* $\breve{\chi}$ *ein echter Brauercharakter ist. Dann ist auch* $\breve{R}_L^G(\chi)$ *ein solcher.*

Beweis: Der Funktor „Harish-Chandra-Induktion“ ist auch für Brauercharaktere definiert, und bildet echte Brauercharaktere auf ebensolche ab. Die Einschränkung auf ℓ-reguläre Klassen ist mit der Harish-Chandra-Induktion vertauschbar. ■

Lemma 4.4.3 *Sei* $\mathbf{L}$ *ein* F*-stabiles Levi-Komplement einer* F*-stabilen parabolischen Untergruppe* $\mathbf{P}$ *von* $\mathbf{G}$*. Dann erhält der Funktor* R_L^G *projektive Charaktere, d.h. ist* Φ *der Charakter eines projektiven* RL*-Moduls, dann ist auch* $R_L^G(\Phi)$ *ein solcher.*

Beweis: Im vorliegenden Fall ist $R_L^G(\Phi)$ identisch zur Harish-Chandra-Induktion $\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{\Phi})$, wobei $\tilde{\Phi}$ für die Inflation von Φ von L auf P steht. Es genügt also zu zeigen, daß $\tilde{\Phi}$ der Charakter eines projektiven RP-Moduls ist. Dies ist jedoch klar, denn $\tilde{\Phi}$ ist wegen $|P : L| = p^m$ relativ L-projektiv, also ein direkter Summand von $\mathrm{Ind}_L^P(\mathrm{Res}_L^P(\tilde{\Phi})) = \mathrm{Ind}_L^P(\Phi)$. ■

Satz 4.4.4 *Sei* F *eine Standard Frobenius-Abbildung und* s *ein halbeinfaches* ℓ'*-Element von* G^**, so daß* $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ *das Levi-Komplement einer* F^**-stabilen parabolischen Untergruppe von* $\mathbf{G}^*$ *ist. Die korrespondierende reguläre Untergruppe von* $\mathbf{G}$ *werde wieder mit* $\mathbf{G}(s)$ *bezeichnet. Dann induziert die Zuordnung* $\lambda \mapsto R_{G(s)}^G(\hat{s}\lambda)$ *eine Bijektion zwischen den projektiv unzerlegbaren Charakteren von* $\mathcal{E}_\ell(G(s), 1)$ *und denen von* $\mathcal{E}_\ell(G, s)$*, und erhält somit nicht nur die Blöcke, sondern auch die Zerlegungsmatrizen.*

Beweis: Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ die irreduziblen Brauercharaktere von $\mathcal{E}_\ell(G(s), 1)$. Die zugehörigen projektiv unzerlegbaren Charaktere werden mit $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ bezeichnet. Außerdem wählen wir verallgemeinerte Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_m$ mit $\breve{\chi}_i = \varphi_i$. Weil $\hat{s}$ ein linearer Charakter von $G(s)$ ist, sind sowohl die $(\hat{s}\breve{\chi}_j)$ echte Brauercharaktere, als auch die $\hat{s}\Phi_j$ echte Projektive.

Wir setzen $\vartheta_j = \breve{R}^G_{G(s)}(\hat{s}\chi_j)$, $1 \leq j \leq m$, und $\Lambda_j = R^G_{G(s)}(\hat{s}\Phi_j)$, $1 \leq j \leq m$. Dann sind nach Lemma 4.4.2 die ϑ_j echte Brauercharaktere von $\mathcal{E}_\ell(G,s)$. Analog sind nach Lemma 4.4.3 die Λ_j echte projektive Charaktere von $\mathcal{E}_\ell(G,s)$.

Da die Zuordnung $\lambda \mapsto R^G_{G(s)}(\hat{s}\lambda)$ eine perfekte Isometrie ist, folgt die Behauptung nun aus Proposition 2.3.4. ■

In [3] geht Broué sogar soweit zu vermuten, daß die Isometrie aus (3.14) eine Morita-Äquivalenz bewirkt. In [4] beweist er diese Vermutung für den Fall, daß $G(s)$ ein Torus ist. Es ist übrigens nicht allzu schwer, den Beweis aus Satz 4.4.4 dahingehend zu modifizieren, um in diesem Spezialfall tatsächlich die Morita-Äquivalenz zu zeigen.

Sei nun wieder $s \in G^*$ ein halbeinfaches ℓ'-Element, für das Aussage 4.3.1 richtig ist. Weiter seien A und a dadurch korrespondierende Blöcke. Die Vermutung, daß dann A und a nicht nur Morita-äquivalent sind, sondern sogar isomorphe Quellen-Algebren haben, erweist sich leider als falsch. L. Puig hat ein Gegenbeispiel dafür angegeben. Allerdings sind in seinem Beispiel die beiden Quellen-Algebren von A und a eng miteinander verknüpft.

Sollte sich aufgrund allgemeiner Überlegungen herausstellen, daß die Jordan-Zerlegung von Zerlegungsmatrizen allgemeingültig ist dann müßte man diese nur noch für unipotente Blöcke berechnen.

Man hätte dann auch eine „Jordan-Zerlegung der Brauercharaktere“ in folgendem Sinne. Sei $\mathcal{B}(G,s)$ die Menge der irreduziblen Brauercharaktere in $\mathcal{E}_\ell(G,s)$. Die Elemente aus $\mathcal{B}(G,1)$ mögen *unipotente Brauercharaktere* heißen. Nach Proposition 4.2.4 sind die unipotenten Brauercharaktere genau die modularen Konstituenten der unipotenten Charaktere. Mit diesen Bezeichnungen haben wir dann den folgenden

Satz 4.4.5 (Jordan-Zerlegung der Brauercharaktere): *Es sei $Z(\mathbf{G})$ zusammenhängend und $s \in G^*$ ein halbeinfaches ℓ'-Element. Es gelte die Jordan-Zerlegung von Zerlegungsmatrizen für $\mathcal{E}_\ell(G,s)$. Dann existiert eine Bijektion*

$$\mathcal{B}(G,s) \longleftrightarrow \mathcal{B}(C_{G^*}(s)^*,1). \tag{4.6}$$

Sind $\varphi \in \mathcal{B}(G,s)$ und $\vartheta \in \mathcal{B}(C_{G^*}(s),1)$ in dieser Bijektion einander zugeordnet, dann gilt:

$$\varphi(1) = \vartheta(1)|G^* : C_{G^*}(s)|_{p'}, \tag{4.7}$$

■

4.5 Unipotente Blöcke

Nach den Ausführungen des vorstehenden Abschnittes liegt es nahe, die unipotenten Blöcke bevorzugt zu behandeln. Für $GL_n(q)$ und $U_n(q^2)$ haben Fong und Srinivasan in [34] eine sehr elegante Beschreibung davon gegeben. In völliger Analogie zur sogenannten Nakayama-Vermutung bei symmetrischen Gruppen werden hier die Blöcke mittels kombinatorischer Objekte, den Kernen von Partitionen, parametrisiert und bestimmt. Im Falle der unipotenten Blöcke der $GL_n(q)$ ist dieses Verfahren am leichtesten zu beschreiben, und soll deshalb hier nur für diesen Fall vorgeführt werden.

Beispiel 4.5.1 (Fong, Srinivasan): Die unipotenten Charaktere von $GL_n(q)$ sind parametrisiert durch die Partitionen von n (siehe [34, S. 115]). Viele Eigenschaften eines unipotenten Charakters können aus dieser Parametrisierung abgelesen werden, so z.B. sein Grad.

Sei nun ℓ eine Primzahl und e die Ordnung von q modulo ℓ. Das heißt e ist die kleinste natürliche Zahl, so daß $q^e - 1$ durch ℓ teilbar ist.

Eine Partition λ heißt e-Kern, wenn das zugehörige Young-Diagramm keinen e-Haken besitzt (siehe [58, Abschnitt 2.7]). Eine beliebige Partition μ besitzt einen eindeutig bestimmten e-Kern. Dieser ensteht aus dem Young-Diagramm von μ durch sukzessives Entfernen von e-Haken, bis ein e-Kern erreicht ist.

Die unipotenten Blöcke von $GL_n(q)$ sind nun parametrisiert durch die e-Kerne vom Inhalt höchstens n. Zwei unipotente Charaktere liegen genau dann im gleichen Block, wenn die zugehörigen Partitionen den gleichen e-Kern haben.

Eine ähnliche, jedoch wesentlich kompliziertere, Beschreibung existiert für die unipotenten Blöcke der anderen klassischen Gruppen [36]. Die Schwierigkeiten sind teilweise darauf zurückzuführen, daß die kombinatorischen Objekte, die die unipotenten Charaktere beschreiben, die sogenannten Symbole, nicht mehr ganz so leicht zu handhaben sind. Für die exzeptionellen Gruppen vom Lie-Typ, wie z.B. $G_2(q)$ müssen die unipotenten Blöcke bisher noch mittels der zentralen Charaktere bestimmt werden.

Für einige der exzeptionellen Gruppen vom Lie-Typ hat Schewe unter zusätzlichen Voraussetzungen an ℓ und p, wovon $\ell \not| |W|$ eine ist, die folgende Beschreibung der unipotenten Blöcke gegeben, die sich für die klassischen Gruppen übrigens auch aus der Arbeit von Fong und Srinivasan ergibt. Sei A ein unipotenter ℓ-Block mit Defektgruppe D. Dann ist $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T)$ für einen maximalen Torus $\mathbf{T}$. Weiter ist $C_{\mathbf{G}}(D) = \mathbf{L}$ eine reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$. Es gibt einen unipotenten Charakter ρ von L, der modulo D den Defekt Null hat. Die unipotenten Charaktere in A sind genau die Konstituenten von $R_L^G(\rho)$. Zur Klärung des Geltungsbereichs dieser Aussagen sei der Leser auf [78] verwiesen.

Die perfekte Isometrie zwischen $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ und $\mathcal{E}_\ell(G(s),1)$ aus Satz 4.3.2 erhält nicht nur die Blöcke, sondern auch die Höhen von Charakteren. Das ergibt eine erhebliche Erleichterung, will man z.B. für $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ die Brauersche Höhenvermutung nachweisen. Es genügt in diesem Fall, die unipotenten Blöcke von $\mathcal{E}_\ell(G(s),1)$ zu betrachten. Dies ist vor allem im Hinblick auf eine mögliche Induktion interessant.

4.6 Reguläre und halbeinfache Blöcke

In diesem Abschnitt wollen wir die Analogie zwischen ℓ-Blöcken von G und Konjugiertenklassen halbeinfacher ℓ'-Klassen, die wir durch das Schlagwort der „Jordan-Zerlegung“ erfaßt haben, um eine weitere Zutat bereichern. Zu diesem Zwecke setzen wir wieder voraus, daß das Zentrum von $\mathbf{G}$ zusammenhängend ist. Wie wir weiter oben gesehen haben, besitzt jede geometrische Konjugiertenklasse $\mathcal{E}(G,s)$ von Charakteren zwei Extreme, einen regulären und einen halbeinfachen Charakter. Wir wollen zeigen, daß auch jede Konjugiertenklasse $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ von ℓ-Blöcken zwei Extreme besitzt, einen Block, der alle regulären, sowie einen, der alle halbeinfachen Charaktere enthält.

Der Schlüssel zum Beweis dieses Ergebnisses ist der Nachweis, daß die Einschränkung des Gelfand–Graev-Charakters auf $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ der Charakter eines projektiv unzerlegbaren Moduls ist. Dieses Ergebnis hat noch andere Konsequenzen, wovon zwei dargestellt werden sollen. Mit Γ werde im folgenden der Gelfand–Graev-Charakter bezeichnet.

Satz 4.6.1 (Hiss [49]): *Sei $\Gamma_{\ell,s}$ die Einschränkung von Γ auf $\mathcal{E}_\ell(G,s)$. Dann ist $\Gamma_{\ell,s}$ der Charakter eines projektiv unzerlegbaren Moduls.*

Beweis: Weil $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ eine Vereinigung von ℓ-Blöcken ist, ist $\Gamma_{\ell,s}$ der Charakter eines projektiven Moduls M. Wenn M zerlegbar wäre, könnten wir schreiben:

$$\Gamma_{\ell,s} = \Phi + \Phi_0,$$

mit dem Charakter Φ eines projektiv unzerlegbaren Moduls, so daß $\langle \Phi, \chi_{s,\mathrm{St}}\rangle$ nicht 0 ist. Dabei steht $\chi_{s,\mathrm{St}}$ für den eindeutig bestimmten Konstituenten von Γ in $\mathcal{E}(G,s)$. Weil Γ vielfachheitsfrei ist, haben wir $\langle \Phi_0, \chi\rangle = 0$, für alle $\chi \in \mathcal{E}(G,s)$.

Wegen $\Phi_0 \neq 0$, existiert ein $t \in C_{G^*}(s)_\ell$ mit $\langle \Phi_0, \chi_{st,\mathrm{St}}\rangle \neq 0$. Nach [10, Proposition 8.4.7] ist $\chi_{st,\mathrm{St}}$ eine Linearkombination von Deligne–Lusztig-Charakteren der Form $R_{T^*}^G(st)$ mit $st \in T^*$. Also ist $\langle \Phi_0, R_{T^*}^G(st)\rangle \neq 0$ für ein $\mathbf{T}^*$ welches st enthält. Weil Φ_0 projektiv ist, können wir mit Hilfe der Basisrelation (4.2) schließen:

$$\begin{aligned}
0 &\neq \langle \Phi_0, R_{T^*}^G(st)\rangle \\
&= \langle \breve{\Phi}_0, \breve{R}_{T^*}^G(st)\rangle' \\
&= \langle \breve{\Phi}_0, \breve{R}_{T^*}^G(s)\rangle' \\
&= \langle \Phi_0, R_{T^*}^G(s)\rangle.
\end{aligned}$$

Also ist $\langle \Phi_0, \chi\rangle \neq 0$ für einen Konstituenten von $R_{T^*}^G(s)$. Dieser Widerspruch beschließt den Beweis. ∎

Korollar 4.6.2 (Hiss [49]): *Die Charaktere der Form $\chi_{st,\mathrm{St}}$, $t \in C_{G^*}(s)_\ell$ liegen in einem einzigen ℓ-Block von $\mathcal{E}_\ell(G,s)$.*

Beweis: Diese Charaktere sind genau die gewöhnlichen irreduziblen Konstituenten von $\Gamma_{\ell,s}$. ■

Weil dies genau die regulären Charaktere in $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ sind, nennen wir den Block, den sie nach obigem Korollar definieren, den *regulären Block* in $\mathcal{E}_\ell(G,s)$.

Korollar 4.6.3 (Hiss [49]): *Die Charaktere der Form $\chi_{st,1}$, $t \in C_{G^*}(s)_\ell$, liegen in einem einzigen ℓ-Block von $\mathcal{E}_\ell(G,s)$. Zwischen diesem und dem halbeinfachen Block besteht eine perfekte Isometrie.*

Beweis: Nach [3, Théorèm 2.4], permutiert die Curtis–Alvis-Dualität die ℓ-Blöcke. Sie ist eine perfekte Isometrie, also haben zwei konjugierte Blöcke die gleichen Invarianten. Der Duale eines Charakters $\chi_{st,\mathrm{St}}$ ist $\pm\chi_{st,1}$. Damit ist das Korollar bewiesen. ■

Die Charaktere der Form $\chi_{st,1}$ sind genau die halbeinfachen Charaktere. Also nennen wir den Block, den sie bestimmen, den *halbeinfachen Block* von $\mathcal{E}_\ell(G,s)$. Der halbeinfache Block von $\mathcal{E}_\ell(G,1)$ ist gerade der Hauptblock.

Natürlich können der halbeinfache und der reguläre Block einer geometrischen Konjugiertenklasse von ℓ-Blöcken zusammenfallen. In der Tat ist dies bei den ℓ-Blöcken der $G_2(q)$ immer der Fall. Wenn p ungerade und $\ell = 2$ ist, liegt der Steinberg-Charakter immer im Hauptblock. (Dies folgt etwa aus Fongs Lemma, welches impliziert, daß ein reellwertiger gewöhnlicher Charakter ungeraden Grades stets den trivialen Charakter als 2-modularen Konstituenten enthält.) Also sind auch in diesem Fall der reguläre und der halbeinfache Block identisch.

Auf der anderen Seite ist es leicht, Beispiele zu finden, wo die beiden Blöcke nicht zusammenfallen.

Beispiel 4.6.4 Sei $G = GL_5(q)$ und ℓ eine Primzahl, so daß die Ordnung von q modulo ℓ gerade 3 ist (also z.B. $q = 2$, $\ell = 7$). Dann liegen der triviale und der Steinberg-Charakter von G in verschiedenen ℓ-Blöcken. Dies folgt aus der Beschreibung der unipotenten Blöcke von $GL_n(q)$, weil die beiden Partitionen (1^5) und (5) verschiedenen 3-Kern haben.

Wir beschließen das Kapitel mit einem Ergebnis über den Brauerbaum des regulären Blocks, falls dieser eine zyklische Defektgruppe besitzt. Für eine umfassende Zusammenstellung der Eigenschaften von Blöcken mit zyklischen Defektgruppen und Brauerbäumen verweisen wir den Leser auf [28, Chapter VII].

Satz 4.6.5 (Hiss [49]): *Der reguläre Block in $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ besitze eine zyklische Defektgruppe und mehr als einen irreduziblen Brauercharakter. Dann gilt für den Brauerbaum dieses Blockes:*

(a) *Besitzt $\Gamma_{\ell,s}$ nur zwei Konstituenten, so sind diese am Brauerbaum verbunden.*

(b) *Besitzt $\Gamma_{\ell,s}$ mindestens 3 irreduzible Konstituenten, dann existieren exzeptionelle Charaktere. Dies sind dann genau die Charaktere der Form $\chi_{st,\mathrm{St}}$, $1 \neq t \in C_{G^*}(s)_\ell$. Der exzeptionelle Knoten des Brauerbaumes ist mit $\chi_{s,\mathrm{St}}$ verbunden.*

Beweis: Teil (a) folgt sofort aus der Projektivität von $\Gamma_{\ell,s}$. Wir können also im folgenden annehmen, daß $\Gamma_{\ell,s}$ mindestens 3 irreduzible Konstituenten besitzt. Nach (3.13) haben wir

$$\chi_{st,\mathrm{St}}(1) = |C_{G^*}(st)|_p |G^* : C_{G^*}(st)|_{p'}.$$

Weil in einem Block mit zyklischer Defektgruppe jeder Charakter die Höhe 0 hat, und weil $|G^*| = |G|$ ist, hat die Defektgruppe des Blockes die Ordnung $|C_{G^*}(s)|_\ell$. Insbesondere hat der Block Defekt größer 0 dann und nur dann, wenn $|C_{G^*}(s)|_\ell \neq 1$ ist.

Weil

$$\Gamma_{\ell,s} = \left(\sum_{(1)\neq(t)} \chi_{st,\mathrm{St}} \right) + \chi_{s,\mathrm{St}}$$

der Charakter eines projektiv unzerlegbaren Moduls ist und nach Voraussetzung mehr als zwei Konstituenten enthält, muß $\Gamma_{\ell,s}$ die Summe sein aus der Summe der exzeptionellen Charaktere und genau einem nicht exzeptionellen Charakter. Es bleibt zu zeigen, daß in der obigen Summe $\chi_{s,\mathrm{St}}$ der nicht exzeptionelle Charakter ist. Dies folgt jedoch aus [37, (3A)]. ■

Korollar 4.6.6 (Hiss [49]): *Ist die ℓ-Sylowgruppe von G zyklisch, dann gilt für den regulären unipotenten Block von G:*

(a) *Sind alle ℓ-Elemente in G konjugiert, und ist t ein solches, dann ist der Steinberg-Charakter zu $\chi_{t,\mathrm{St}}$ am Brauerbaum verbunden.*

(b) *Sind nicht alle ℓ-Elemente von G konjugiert, dann gibt es exzeptionelle Charaktere, und der Steinberg-Charakter ist am Brauerbaum mit dem exzeptionellen Knoten verbunden.*

Beweis: Die Voraussetzung, daß alle ℓ-Elemente in G konjugiert sind, ist gleichbedeutend damit, daß $\Gamma_{\ell,1}$ genau zwei irreduzible Konstituenten besitzt. ■

Kapitel 5

Hecke-Algebra Methoden

Sei A ein noetherscher Ring mit 1 und X ein endlich erzeugter A-Modul. Die Methode, Aussagen über die unzerlegbaren direkten Summanden von X über den Ring $\mathrm{End}_A(X)$ herzuleiten, geht bis auf Schur [79] zurück. Fitting hat in [30] die Zusammenhänge zwischen X und $\mathrm{End}_A(X)$ systematisch untersucht. Einen hervorragenden Abriß dieser Theorie findet der Leser in Grabmeiers Dissertation [42, Abschnitt 8]. Deshalb möchte ich an dieser Stelle nur sehr kurz die im folgenden benötigten Begriffe einführen und ihre Anwendungsmöglichkeiten skizzieren. Danach werden die vorgestellten Methoden verwendet, um Aussagen über die Zerlegungszahlen von endlichen reduktiven Gruppen zu erhalten.

5.1 Zerlegungsmatrizen

Sei also zuerst A ein kommutativer, noetherscher Ring mit 1, und X ein endlich erzeugter A-Rechtsmodul. Wir setzen $E = \mathrm{End}_A(X)$. Ist nun

$$X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$$

eine Zerlegung von X in unzerlegbare direkte Summanden, dann besitzt E eine korrespondierende Zerlegung

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$$

in die E-Linksmoduln

$$E_i = \mathrm{Hom}_A(X_i, X).$$

Die E_i sind unzerlegbar und es ist $X_i \cong X_j$ als A-Rechtsmoduln, genau dann, wenn $E_i \cong E_j$ als E-Linksmoduln. Diesen Zusammenhang zwischen den X_i und den E_i wollen wir im folgenden mit dem Begriff *Fitting-Korrespondenz* bezeichnen.

Wir verlassen sogleich diese allgemeine Situation, und wählen ein ℓ-modulares System (K, R, k). Sei weiter A eine endlich erzeugte R-Ordnung und X

ein endlich erzeugtes A-Gitter. Dann ist $E = \mathrm{End}_A(X)$ eine endlich erzeugte R-Ordnung. Mit X^K wird die Konstantenerweiterung $X \otimes_R K$ bezeichnet, und für die Reduktion modulo π schreiben wir $\bar{X} = X \otimes_R k$. Diese Bezeichnungen werden natürlich insbesondere auf die Ordnung A angewendet. Wir vermerken, daß unter den gegebenen Voraussetzungen der Satz von Krull-Schmidt-Azumaya für die A-Gitter erfüllt ist.

Wir setzen zusätzlich voraus, daß A^K eine halbeinfache K-Algebra ist, und daß K groß genug, nämlich ein Zerfällungskörper für A^K ist. In dieser Situation definieren wir zunächst die Zerlegungsmatrix des A-Gitters X (siehe [21, Definition 4.1]).

Definition 5.1.1 Sei $\{X_1, \ldots, X_s\}$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der unzerlegbaren direkten Summanden von X und $\{Y_1, \ldots, Y_t\}$ ein System von Repräsentanten der einfachen A^K-Moduln, die in X^K vorkommen. Sei

$$d_{ij} = [Y_i, X_j^K]_{A^K},$$

also die Vielfachheit von Y_i im KG-Modul X_j^K. Dann heißt die Matrix $D_X = (d_{ij})$ die *Zerlegungsmatrix* von X. Sie ist bis auf Vertauschen von Zeilen und Spalten eindeutig durch X bestimmt.

Die Zerlegungsmatrix D_A der Algebra A erlaubt nach Brauers Reziprozitätsgesetz eine weitere Interpretation. Sei $X = A$ und die Bezeichnungen wie in obiger Definition. Dann sind $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_s$ Repräsentanten der projektiv unzerlegbaren $\bar{A}$-Moduln. Deren einfache Köpfe sollen mit $M_1, \ldots, M_s$ bezeichnet werden. Für jedes Y_i wählen wir ein volles A-Gitter Z_i in Y_i d.h. $Z_i \subseteq Y_i$ und $Z_i^K = Y_i$. Dann ist d_{ij} die Vielfachheit von M_j als Kompositionsfaktor in $\bar{Z}_i$. Also ist obige Definition der Zerlegungsmatrix von A identisch mit der klassischen Definition von Brauer.

Ist X ein projektives A-Gitter, dann ist die Zerlegungsmatrix von X in folgendem Sinne in der Zerlegungsmatrix von A enthalten: Bei geeigneter Numerierung der Zeilen und Spalten hat D_A die Gestalt:

$$D_A \quad = \quad \left(\begin{array}{c|c} D_X & \\ \hline 0 & \end{array} \; D' \right) .$$

Die Zerlegungsmatrix von X kann mit derjenigen von $E = \mathrm{End}_A(X)$ verglichen werden. Sind die Bezeichnungen wie in Definition 5.1.1, dann sind aufgrund der Fitting-Korrespondenz die E-Gitter $E_i = \mathrm{Hom}_A(X_i, X)$, $1 \leq i \leq s$, ein Repräsentantensystem für die Isomorphietypen unzerlegbarer direkter Summanden von E. Die Anwendung der Fitting-Korrespondenz auf die Moduln X^K und $E^K = \mathrm{End}_{A^K}(X^K)$ liefert analog, daß $\mathrm{Hom}_{A^K}(Y_j, X^K)$, $1 \leq j \leq t$, ein Repräsentantensystem der einfachen E^K-Moduln ist. Ist nun $D_E = (d'_{ij})$ die Zerlegungsmatrix von E bezüglich dieser beiden Repräsentantensysteme, dann gilt offensichtlich $(d_{ij}) = (d'_{ij})$. Mit anderen Worten:

Die Zerlegungsmatrix eines A-Gitters X ist gleich der Zerlegungsmatrix von $\mathrm{End}_A(X)$, wenn Repräsentantensysteme in Fitting-Korrespondenz zugrundeliegen.

Wie wir oben gesehen haben, enthalten die Zerlegungsmatrizen spezieller A-Gitter, etwa projektiver, Information über die Zerlegungszahlen von A. An diesen ist man in erster Linie interessiert. Man versucht nun diese Information mittels der Zerlegungsmatrix von $E = \mathrm{End}_A(X)$ zu erhalten. Diese Methode ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn E bestimmt werden kann und leichter zu handhaben ist als A. Daß dies bei den endlichen Gruppen vom Lie-Typ in der Tat der Fall ist, wurde in eindrucksvoller Weise schon bei der Bestimmung der gewöhnlichen Charaktere dieser Gruppen bewiesen. Daß mit dieser Methode auch Ergebnisse in der modularen Darstellungstheorie erzielt werden können, haben Sawada, Dipper und James gezeigt; Sawada im Fall gleicher Charakteristik $\ell = p$ in [77] und Dipper und James im Fall ungleicher Charakteristik $\ell \neq p$ in ihren Arbeiten über die Zerlegungsmatrizen der $GL_n(q)$.

Die Projektivität von X ist nicht unbedingt notwendig, um brauchbare Resultate zu erzielen. Das folgende Ergebnis zeigt, wie diese Voraussetzung erheblich abgeschwächt werden kann. Es erscheint in dieser Formulierung zum ersten Mal bei Dipper [21, Corollary 4.10], dürfte aber schon vorher in der einen oder anderen Version bekanntgewesen und auch benutzt worden sein. Ich gebe hier einen einfachen Beweis an, der von W. Plesken vorgeschlagen wurde.

Satz 5.1.2 (Dipper, [21]): *Sei G eine endliche Gruppe und (K, R, k) ein ℓ-modulares Zerfällungssystem für G. Seien Y, X RG-Gitter mit:*

(i) *Y ist projektiv.*

(ii) *Es gibt einen Epimorphismus $\beta : Y \to X$.*

(iii) $[(\mathrm{Kern}\,\beta)^K, X^K] = 0$.

Sei $E = \mathrm{End}_{RG}(X)$. Dann gilt:

(a) *Ist Z ein unzerlegbarer direkter Summand von X, dann ist Z ein Faktormodul eines unzerlegbaren direkten Summandes von Y und $\bar{Z}$ ist unzerlegbar.*

(b) *Sei $\{V_1, \dots, V_t\}$ ein Vertretersystem der einfachen KG-Moduln, die in X^K vorkommen. Sei weiter D_E die Zerlegungsmatrix von E, deren Zeilen indiziert sind durch die E^K-Moduln $\mathrm{Hom}_{KG}(V_i, X^K)$. Bezeichnet D_{RG} die Zerlegungsmatrix von RG gemäß der Numerierung $(V_1, \dots, V_t, V_{t+1}, \dots, V_n)$ der Zeilen, dann gilt bei geeigneter Anordnung der Spalten:*

$$D_{RG} = \left(\begin{array}{c|c} D_E & \\ \hline * & \end{array} \!\! D' \right) .$$

(c) *Seien Z_1 und Z_2 direkte Summanden von X. Dann sind die kG-Homomorphismen zwischen $\bar{Z}_1$ und $\bar{Z}_2$ liftbar.*

Beweis: (Nach W. Plesken): Wir denken uns Y und X in Y^K bzw. X^K eingebettet. Nach Voraussetzung (iii) existiert ein zentrales Idempotent f von KG, welches $(\operatorname{Kern}\beta)^K$ annulliert und auf X^K als Identität operiert. Dann ist $Xf = X$. Aus der Surjektivität von β folgt darüberhinaus: $Yf \cong X$.

Sei nun $Y = Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_s$ eine direkte Zerlegung von Y in unzerlegbare Summanden. Da Y_i projektiv unzerlegbar ist, also einen einfachen Kopf hat, ist Y_if unzerlegbar. Seien $Y_1, \ldots, Y_u$ diejenigen direkten Summanden von Y, die nicht von f annulliert werden. Dann ist $X \cong Y_1f \oplus \ldots \oplus Y_uf$ eine direkte Zerlegung von X in unzerlegbare. Daraus folgt Teil (a).

Die Zerlegungsmatrix von E ist nach den vorangehenden Betrachtungen gleich der Zerlegungsmatrix von X. Sei nun V ein einfacher KG-Modul in X^K. Nach Voraussetzung (iii) ist die Vielfachheit von V als direkter Summand von $(Y_if)^K$ gleich der Vielfachheit von V als direkter Summand von Y_i^K. Da die Y_i projektiv unzerlegbare RG-Gitter sind, ist die Zerlegungsmatrix von RG von der angegebenen Gestalt. Dies beweist Teil (b).

Zum Beweis von (c) setzen wir $A = RGf$. Dann sind Z_1 und Z_2 projektive A-Moduln. Damit haben wir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{RG}(Z_1, Z_2) \otimes_R k &= \operatorname{Hom}_A(Z_1, Z_2) \otimes_R k \\
&\cong \operatorname{Hom}_{A \otimes_R k}(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2) \\
&= \operatorname{Hom}_A(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2) \\
&= \operatorname{Hom}_{RG}(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2) \\
&= \operatorname{Hom}_{kG}(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2)
\end{aligned}$$

Damit ist auch Teil (c) bewiesen. ■

5.2 Zerlegungszahlen und Harish-Chandra-Induktion

Wir wollen uns nun überlegen, daß Satz 5.1.2 besonders gut bei endlichen Gruppen mit BN-Paar angewendet werden kann. Hier sind nämlich seine Voraussetzungen in der Situation der *Harish-Chandra-Induktion* von kuspidalen Charakteren erfüllt. Genau dieser Funktor spielte schon eine herausragende Rolle bei der Bestimmung der gewöhnlichen Charaktere der endlichen Gruppen vom Lie-Typ.

Sei G eine beliebige endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar der Charakteristik p. Wir schreiben auch $G = (G, B, N, U, H, W)$, wenn wir die ausgezeichneten Untergruppen bzw. Sektionen von G besonders hervorheben möchten. In den folgenden Ausführungen verwenden wir diese Begriffe stets im Sinne von [14, Definitions 65.1, 69.1]. Insbesondere ist $B \cap N = H$ ein Normalteiler in N, $W = N/H$, $B = UH$ ist das semidirekte Produkt der sogenannten unipotenten Untergruppe U mit H. Darüberhinaus ist U eine

p-Sylowgruppe und H ist abelsch. Das *Wurzelsystem* von G werde mit Φ bezeichnet und ein fest gewähltes *Fundamentalsystem* daraus mit Π. Die Weylgruppe W werde erzeugt von den fundamentalen Spiegelungen $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$. Für die Länge eines Elementes $w \in W$ schreiben wir $l(w)$. Es sei w_0 das längste Element in W. Für jedes $w \in W$ wählen wir ein beliebiges, aber festes Element $\dot{w} \in N$ mit $H\dot{w} = w$. Für $\alpha \in \Phi$ sei $X_\alpha = U \cap U^{\dot{w}_0 \dot{s}_\alpha}$ die zu α gehörige *Wurzeluntergruppe* von U.

Sei $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ und $I = \{1, \ldots, n\}$. Für jede Teilmenge $J \subseteq I$ setzen wir

$$\begin{aligned} \Pi_J &= \{\alpha_j \mid j \in J\}, \\ W_J &= \langle s_{\alpha_j} \mid j \in J\rangle, \\ \Phi_J &= W_J(\Pi_J) = \{w(\alpha) \mid w \in W_J, \alpha \in \Pi_J\}, \\ L_J &= \langle H, X_\alpha \mid \alpha \in \Phi_J\rangle. \end{aligned}$$

Die Gruppen L_J heißen *Standard-Levi-Untergruppen* von G. Bezeichnet w_J das längste Element in W_J, dann setzen wir $U_J = U \cap U^{\dot{w}_J}$. Dann ist U_J das *unipotente Radikal* der *parabolischen Standard-Untergruppe* $P_J = \langle B, X_\alpha \mid \alpha \in \Phi_J\rangle$. Für die Menge der Standard-Levi-Untergruppen von G schreiben wir $\mathcal{L}$. Für $L_J \in \mathcal{L}$ setzen wir $M_J = N_N(L_J)L_J$.

Wir wollen nun den Begriff der Harish-Chandra-Serie von Charakteren einführen. Ein irreduzibler Charakter χ von G heißt kuspidal, wenn $\langle \chi, \mathbf{1}_{U_J}^G\rangle = 0$ ist, für alle $J \neq I$. Die Weylgruppe operiert auf den Paaren (J, ϑ), wobei $J \subseteq I$ und ϑ ein kuspidaler Charakter von L_J ist (siehe [10, Proposition 9.2.3 (i)]). Für die Inflation von ϑ auf P_J schreiben wir $\tilde{\vartheta}$. Der Funktor, der ϑ auf $\tilde{\vartheta}^G$ abbildet, heißt *Harish-Chandra-Induktion*. Eine analoge Bezeichnung wird für L_J-Moduln verwendet.

Definition 5.2.1 Sei $J \subseteq I$ und ϑ ein kuspidaler Charakter von L_J.

(a) Die *Harish-Chandra-Serie* zum Paar (J, ϑ) ist die folgende Menge von Charakteren:

$$\mathcal{E}(G, (J, \vartheta)) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \langle \chi, \tilde{\vartheta}^G\rangle_G \neq 0\}.$$

(b) Ein irreduzibler Charakter χ liegt in der *J-Serie*, wenn ein kuspidaler Charakter ϑ von L_J existiert, so daß χ in $\mathcal{E}(G, (J, \vartheta))$ liegt. Wir schreiben

$$\mathcal{E}(G, J) = \bigcup_{\substack{\vartheta \in \mathrm{Irr}(L_J) \\ \vartheta \text{ kuspidal}}} \mathcal{E}(G, (J, \vartheta)).$$

Der Satz von Harish-Chandra (siehe [10, Theorem 9.2.3]) besagt, daß die Mengen $\mathcal{E}(G, (J, \vartheta))$ und $\mathcal{E}(G, (J', \vartheta'))$ genau dann übereinstimmen, wenn (J, ϑ)

und (J', ϑ') unter W konjugiert sind. Andernfalls sind sie disjunkt. Jeder irreduzible Charakter von G liegt in genau einer J-Serie.

Für die folgenden Betrachtungen wählen wir ein ℓ-modulares Zerfällungssystem (K, R, k) für G mit $\ell \neq p$. Zunächst geben wir eine kleine Anwendung des Begriffes des kuspidalen Charakters. Es erklärt in gewisser Weise, warum kuspidale Charaktere die Tendenz haben, bei der Reduktion modulo ℓ irreduzibel zu bleiben.

Lemma 5.2.2 *Sei χ ein gewöhnlicher, irreduzibler, nicht-kuspidaler Charakter, dessen Einschränkung $\breve{\chi}$ auf die ℓ-regulären Klassen ebenfalls irreduzibel sei. Ist ψ ein kuspidaler Charakter, dann ist $\breve{\chi}$ kein Konstituent von $\breve{\psi}$.*

Beweis: Sei $\mu = \breve{\psi} - \breve{\chi}$ ein verallgemeinerter Brauercharakter. Da χ nicht-kuspidal ist, existiert eine Untergruppe $V = U_J$ mit $\langle \chi_V, \mathbf{1}_V \rangle > 0$. Da ψ kuspidal ist, ist $\langle \psi_V, \mathbf{1}_V \rangle = 0$. Nun ist V eine p-Untergruppe und $\ell \neq p$, so daß $\breve{\chi}_V = \chi_V$ und $\breve{\psi}_V = \psi_V$ ist. Dann ist $\langle \mu_V, \mathbf{1}_V \rangle < 0$, d.h. μ kann kein echter Brauercharakter sein. ∎

Wir untersuchen nun, unter welchen Voraussetzungen die Ergebnisse des vorigen Abschnittes anwendbar sind.

Lemma 5.2.3 *Sei G eine endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar, $P = QL$ eine parabolische Standard-Untergruppe von G. Dabei sei Q das unipotente Radikal und L das Standard-Levi-Komplement von P. Sei χ_0 ein gewöhnlicher, irreduzibler Charakter von L mit $\chi_0 \in \mathcal{E}(L, (J, \vartheta))$. Es gebe einen projektiven Charakter Φ_0 von L mit:*

(i) $\langle \chi_0, \Phi_0 \rangle = 1$.

(ii) *Ist $\psi \in \mathrm{Irr}(L)$, etwa $\psi \in \mathcal{E}(L, (J', \vartheta'))$, und ist $\psi \neq \chi_0$ und $\langle \psi, \Phi_0 \rangle \neq 0$, dann sind (J, ϑ) und (J', ϑ') nicht in W konjugiert.*

Sei Y_0 das RL-Gitter mit Charakter Φ_0. Dann existiert ein RL-Gitter X_0 mit Charakter χ_0, so daß das Paar $Y = \mathrm{Ind}_P^G(\tilde{Y}_0)$ und $X = \mathrm{Ind}_P^G(\tilde{X}_0)$ die Voraussetzungen von Satz 5.1.2 *erfüllt.*

Beweis: Wegen $\langle \chi_0, \Phi_0 \rangle \neq 0$ existiert ein RL-Gitter X_0 mit Charakter χ_0 und ein surjektiver RL-Homomorphismus

$$\beta_0 : Y_0 \longrightarrow X_0.$$

Nach Lemma 4.4.2 ist Y projektiv und wir erhalten einen surjektiven Homomorphismus

$$\beta : Y \longrightarrow X.$$

Es ist $(\mathrm{Kern}\,\beta)^K = \mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Infl}_L^P((\mathrm{Kern}\,\beta_0)^K))$. Wegen der Transitivität der Harish-Chandra-Induktion liegt jeder Konstituent von $(\mathrm{Kern}\,\beta)^K$ in einem $\mathcal{E}(G, (J', \vartheta'))$, während jeder Konstituent von X^K in $\mathcal{E}(G, (J, \vartheta))$ enthalten ist; nach Voraussetzung (ii) ist dabei (J', ϑ') nicht zu (J, ϑ) in W konjugiert. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Korollar 5.2.4 *Die Bezeichnungen seien wie in* Lemma 5.2.3. *Sei zusätzlich χ_0 kuspidal. Statt der* Voraussetzung (ii) *gelte:*

(ii′) $\langle \chi_0^x, \Phi_0 \rangle = 0$ *für alle* $x \in N_G(L)$ *mit* $\chi_0^x \neq \chi_0$.

Sei Y_0 das RL-Gitter mit Charakter Φ_0. Dann existiert ein RL-Gitter X_0 mit Charakter χ_0, so daß das Paar $Y = \mathrm{Ind}_P^G(\tilde{Y}_0)$ und $X = \mathrm{Ind}_P^G(\tilde{X}_0)$ die Voraussetzungen von Satz 5.1.2 *erfüllt.*

Beweis: Da χ_0 kuspidal ist, impliziert Voraussetzung (ii′), daß die Voraussetzung (ii) von Lemma 5.2.3 erfüllt ist. ■

Die Voraussetzungen in Korollar 5.2.4 sind insbesondere erfüllt für den trivialen Charakter von H, dem Levi-Komplement der Boreluntergruppe $B = UH$. In allen bisher bekannten Beispielen ist es übrigens so, daß zu jedem kuspidalen irreduziblen Charakter χ_0 von L immer mindestens ein projektiv Unzerlegbarer Φ_0 existiert, der die Voraussetzungen von Korollar 5.2.4 erfüllt.

Wenn χ_0 kuspidal ist, kann man hoffen, mit Hilfe der Howlett–Lehrer-Theorie etwas über $\mathrm{End}_{RG}(\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{X}_0))$ auszusagen. Daraus kann man mit Hilfe von Satz 5.1.2 Aussagen über die Zerlegungsmatrix von G gewinnen. Ist χ_0 nicht kuspidal, kann man sich mit der in Kapitel 2 entwickelten Theorie der Basissysteme wie folgt behelfen.

Proposition 5.2.5 *Sei* $\mathbf{G}$ *eine zusammenhängende algebraische Gruppe mit Frobenius-Abbildung F. Sei* $\mathbf{L}^*$ *eine Standard-Levi-Untergruppe von* $\mathbf{G}^*$ *und s ein halbeinfaches ℓ'-Element in* $\mathbf{L}^*$. *Sei* $\mathbf{L}$ *die zu* $\mathbf{L}^*$ *gehörige Standard-Levi-Untergruppe von* $\mathbf{G}$.

Wir nehmen an, daß $\mathcal{E}(G,s)$ ein Basissystem $\mathbf{BS} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ *von $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ enthält. Sei* $\mathbf{PA} = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ *das dazu duale System von projektiven Atomen.*

Sei Φ_0 ein projektiver Charakter von $\mathcal{E}_\ell(L,s)$ und $\chi_0 \in \mathcal{E}(L,s)$ mit

(i) $\langle \chi_0, \Phi_0 \rangle = 1$.

(ii) $\langle \psi, \Phi_0 \rangle = 0$ *für alle* $\chi_0 \neq \psi \in \mathcal{E}(L,s)$.

Setzen wir $\chi = \tilde{\chi}_0^G$, dann ist

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \langle \chi, \chi_i \rangle \Phi_i$$

ein projektiver Charakter. Mit anderen Worten: Wir erhalten aus χ_0 einen projektiven Charakter, ausgedrückt in $\mathbf{PA}$, *indem wir die Skalarprodukte der Harish-Chandra-Induktion von χ_0 mit den Charakteren des Basissystems* $\mathbf{BS}$ *bilden.*

Beweis: Nach Lemma 4.4.2 ist $R_L^G(\Phi_0) = \tilde{\Phi}_0^G$ projektiv. Aus den Voraussetzungen folgt, daß jeder Konstituent von $\Phi_0 - \chi_0$ in einer rationalen Klasse $\mathcal{E}(L, st)$ liegt, wobei $1 \neq t$ ein ℓ-Element in $C_{L^*}(s)$ ist. Keines dieser Elemente st ist in G^* zu s konjugiert. Da nach Bemerkung 3.4.3 die Harish-Chandra-Induktion die rationalen Klassen erhält, sind also $R_L^G(\chi_0)$ und $R_L^G(\Phi_0 - \chi_0)$ disjunkt. Die Behauptung ergibt sich nun aus Lemma 2.2.2. ∎

Beispiel 5.2.6 In folgenden Spezialfällen sind die Voraussetzungen von Proposition 5.2.5 erfüllt:

(a) $s = 1$, $\chi_0 = \mathrm{St}_L$ und $\Phi_0 = \Gamma_{\ell,1}$ der Gelfand–Graev-Charakter, eingeschränkt auf die unipotenten Blöcke.

(b) $s = 1$, und jeder unipotente Charakter von L ist irreduzibel modulo ℓ (im nächsten Kapitel werden spezielle Primzahlen ℓ betrachtet, für die dies immer gilt).

Beispiel 5.2.7 Sei $G = G_2(q)$, q ungerade, und $\ell \mid q+1$, $\ell \neq 2$. Sei $s = h(-1,-1,1)$ und $B_2 = \mathcal{E}_\ell(G, s)$. Es ist leicht zu sehen, daß B_2 in der Tat ein ℓ-Block ist. Er besitzt das Basisystem $\mathbf{BS} = \{X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}\}$. Wir betrachten die drei echten Levi-Untergruppen $\mathcal{H}_1$, $L_{\{2a+b\}}$ und $L_{\{b\}}$. Sei L eine davon. Zu $s \in Z(L)$ korrespondiert ein linearer Charakter $\hat{s}_L$ von L. Es ist $\mathcal{E}_\ell(L, s) = \hat{s}_L \otimes \mathcal{E}_\ell(L, 1)$. Für $\chi_L = \hat{s}_L \cdot \mathrm{St}_L$ sind die Voraussetzungen von Proposition 5.2.5 erfüllt. Daraus erhalten wir die folgende Menge von projektiven Charakteren von $\mathcal{E}_\ell(G, s)$, die wir gleich im zu $\mathbf{BS}$ dualen System der projektiven Atome ausgedrückt haben. Der letzte davon ist der Gelfand–Graev-Charakter von G. Die Reihenfolge der ersten drei Projektiven entspricht obiger Reihenfolge der Levi-Untergruppen.

Char.	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4
X_{22}	1			
X_{23}	1	1		
X_{24}	1		1	
X_{21}	1	1	1	1

Bemerkung 5.2.8 Dipper und James betrachten in $G = GL_n(q)$ die Charaktere $\widetilde{\mathrm{St}}_L^G$, wobei sie L die Menge der Standard-Levi-Untergruppen durchlaufen lassen. Auf diese Weise erhalten sie eine Menge Information über die Zerlegungsmatrix von G, z.B. deren Dreiecksgestalt.

Die bisher entwickelte Theorie macht es insbesondere notwendig, Endomorphismenringe von RG-Gittern X zu bestimmen, wobei X die Harish-Chandra-Induktion eines Gitters ist, das die Voraussetzungen von Korollar 5.2.4 erfüllt. Dank der Theorie von Howlett und Lehrer sind die Endomorphismenringe der Moduln X^K bekannt. Es stellt sich nun die Frage, inwieweit man die Theorie von Howlett–Lehrer auf RG-Gitter X der obigen Form verallgemeinern kann. Erste Ansätze dazu finden sich bei Dipper in seiner Arbeit über die Zerlegungszahlen der $GL_n(q)$ (siehe [19, Theorem 3.6]). Da nach Satz 5.1.2 (c) $\mathrm{End}_{kG}(\bar{X})$ liftbar ist, ist es ziemlich wahrscheinlich, daß sich die Theorie von Howlett–Lehrer direkt auf die kG-Moduln $\bar{X}$ anwenden läßt. Mit anderen Worten: Es sieht so aus, als wäre die Reduktion modulo ℓ der Howlett–Lehrer-Algebra zu X^K, deren Strukturkonstanten bekanntlich in R liegen, nichts anderes als $\mathrm{End}_{kG}(\bar{X})$. Es ist sogar denkbar, daß die Howlett–Lehrer-Algebra über R gerade $\mathrm{End}_{RG}(X)$ ist.

Der Spezialfall $X = \mathrm{Ind}_B^G(R)$ wurde schon von Iwahori [57] und Matsumoto [72] in der notwendigen Allgemeinheit behandelt. Im nächsten Abschnitt möchte ich einen kurzen Beweis für diesen Fall geben.

5.3 Hecke-Algebren

Hier sei G wieder eine beliebige endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar. Wir behalten die zu Beginn des vorigen Abschnitts eingeführten Bezeichnungen bei. Allerdings werden noch eine Reihe von Ergänzungen benötigt:

$$\begin{array}{lcl} U^- & = & U^{\dot{w}_0}, \\ U_w & = & U \cap U^{\dot{w}_0 \dot{w}}, \quad w \in W, \\ U'_w & = & U_{w_0 w} = U \cap U^{\dot{w}}, \quad w \in W, \\ X_\alpha & = & U_{s_\alpha}, \quad \alpha \in \Pi, \\ p_w & = & |U_w|, \quad w \in W, \\ p_\alpha & = & |X_\alpha|, \quad \alpha \in \Pi. \end{array} \tag{5.1}$$

Wir erwähnen, daß für jedes $w \in W$ gilt:

$$U = U_w U'_w, \quad U_w \cap U'_w = 1. \tag{5.2}$$

Wir haben die Bruhat-Zerlegung von G:

$$G = \bigcup_{w \in W} BwB, \tag{5.3}$$

die mit (5.2) noch verfeinert werden kann zu:

$$G = \bigcup_{w \in W} BwU_w. \tag{5.4}$$

Nun sind wir in der Lage, die berühmten Formeln von Iwahori für die Hecke-Algebra auf recht einfache Weise herzuleiten.

Satz 5.3.1 (Iwahori, Matsumoto): *Sei G eine endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar. Sei $X = \mathrm{Ind}_B^G(\mathbb{Z})$ der Permutationsmodul auf den Nebenklassen von B über $\mathbb{Z}$. Dann besitzt* $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(X)$ *eine $\mathbb{Z}$-Basis T_w, $w \in W$. Es gelten die folgenden Multiplikationsformeln:*

$$\text{(i)} \quad T_{s_\alpha} T_w = \begin{cases} T_{s_\alpha w}, & \text{falls } l(s_\alpha w) > l(w) \\ p_\alpha T_{s_\alpha w} + (p_\alpha - 1) T_w, & \text{falls } l(s_\alpha w) < l(w) \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad T_w T_{s_\alpha} = \begin{cases} T_{w s_\alpha}, & \text{falls } l(s_\alpha w) > l(w) \\ p_\alpha T_{w s_\alpha} + (p_\alpha - 1) T_w, & \text{falls } l(s_\alpha w) < l(w) \end{cases}$$

Beweis: Nach der Bruhat-Zerlegung bilden die Elemente aus W ein Vertretersystem der (B,B)-Doppelnebenklassen. Sei $\Omega = G/B$. Einem Element $w \in W$ ordnen wir nun eine Matrix S_w, deren Zeilen und Spalten durch die Elemente von Ω indiziert sind, wie folgt zu. Zu $w \in W$ betrachten wir die Doppelnebenklasse $B\dot{w}B$. Dieser entspricht in natürlicher Weise eine Bahn $\mathcal{O}_w$ von G auf $\Omega \times \Omega$. Die Matrix S_w ist nun diejenige $(0,1)$-Matrix, die an Position (ω_1, ω_2) genau dann den Wert 1 hat, wenn (ω_1, ω_2) in $\mathcal{O}_w$ liegt. Identifizieren wir X mit der zugehörigen Matrixdarstellung bezüglich der Basis Ω, dann bilden die S_w, $w \in W$ die Schurbasis oder Standardbasis von $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(X)$ (siehe [44, Theorem 2.1]). Wir setzen $T_w = S_w^t$. Da das Transponieren ein Automorphismus des $\mathbb{Z}$-Gitters $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(X)$ ist, bildet $\{T_w \mid w \in W\}$ wieder eine $\mathbb{Z}$-Basis. Schreiben wir

$$T_x T_y = \sum_{z \in W} a_{xyz} T_z,$$

dann ist nach [44, S. 21]

$$a_{xyz} = |Bx^{-1}Bz \cap ByB : B|.$$

Damit können wir nun im vorliegenden Fall die Strukturkonstanten berechnen.

(i) Sei zuerst $l(s_\alpha w) > l(w)$. Wir suchen $|Bs_\alpha Bv \cap BwB : B|$ für alle $v \in W$. Es ist $Bs_\alpha Bv \cap BwB \subseteq (Bs_\alpha vB \cup BvB) \cap BwB$. Also ist $Bs_\alpha Bv \cap BwB \neq \emptyset$ höchstens für $v = w$ oder $s_\alpha v = w$.

Sei zunächst $v = w$. Wegen $l(s_\alpha w) > l(w)$ ist $Bs_\alpha Bw \subseteq Bs_\alpha wB$, also $Bs_\alpha Bw \cap BwB \subseteq Bs_\alpha wB \cap BwB = \emptyset$. Also bleibt nur $v = s_\alpha w$ übrig. Wir haben

$$\begin{aligned} Bs_\alpha Bs_\alpha w \cap BwB &= (Bs_\alpha Bs_\alpha)w \cap BwB \\ &\subseteq (B \cup Bs_\alpha B)w \cap BwB \\ &= (Bw \cup Bs_\alpha Bw) \cap BwB, \end{aligned}$$

also hat $Bs_\alpha Bs_\alpha w$ mit BwB nur eine Nebenklasse von B, nämlich Bw gemeinsam. Damit ist der Beweis für den Fall $l(s_\alpha w) > l(w)$ erbracht.

Als nächstes betrachten wir $T_{s_\alpha}T_{s_\alpha}$ und haben dazu $a_{s_\alpha s_\alpha v} = |Bs_\alpha Bv \cap Bs_\alpha B : B|$ zu berechnen. Es ist $Bs_\alpha Bv \cap Bs_\alpha B \subseteq (Bs_\alpha vB \cup BvB) \cap Bs_\alpha B$. Also ist $a_{s_\alpha s_\alpha v} \neq 0$ höchstens für $v = 1$ oder $v = s_\alpha$. Wir haben

$$\begin{aligned} a_{s_\alpha s_\alpha 1} &= |Bs_\alpha B : B| \\ &= |B : B \cap B^{s_\alpha}| \\ &= |U : U \cap U^{s_\alpha}| \\ &= |U : U'_{s_\alpha}| \\ &= |U_{s_\alpha}| \\ &= p_\alpha. \end{aligned}$$

Offensichtlich enthält $Bs_\alpha Bs_\alpha$ genau p_α Nebenklassen von B, wovon B selbst eine ist. Wegen $Bs_\alpha Bs_\alpha \subseteq B \cup Bs_\alpha B$, ist also $a_{s_\alpha s_\alpha s_\alpha} = |Bs_\alpha Bs_\alpha \cap Bs_\alpha B : B| = p_\alpha - 1$. Wir haben demnach

$$T_{s_\alpha}T_{s_\alpha} = p_\alpha T_1 + (p_\alpha - 1)T_{s_\alpha}.$$

Sei nun $w \in W$ mit $l(s_\alpha w) < l(w)$. Dann ist $l(w') < l(w) = l(s_\alpha w')$ für $w' = s_\alpha w$, also

$$\begin{aligned} T_{s_\alpha}T_w &= T_{s_\alpha}T_{s_\alpha w'} \\ &= T_{s_\alpha}T_{s_\alpha}T_{w'} \\ &= p_\alpha T_{w'} + (p_\alpha - 1)T_{s_\alpha}T_{w'} \\ &= p_\alpha T_{s_\alpha w} + (p_\alpha - 1)T_w. \end{aligned}$$

(ii) Sei $w \in W$ und s_α mit $l(ws_\alpha) > l(w)$. Wir beweisen durch Induktion über $l(w)$ und mit Hilfe von Teil (i), daß $T_wT_{s_\alpha} = T_{ws_\alpha}$ ist:

Für $l(w) = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei also $l(w) \geq 1$. Dann ist $w = s_\beta w'$ mit $l(w') < l(w)$ und $l(w's_\alpha) > l(w')$. Wir schließen

$$\begin{aligned} T_wT_{s_\alpha} &= T_{s_\beta w'}T_{s_\alpha} \\ &= T_{s_\beta}T_{w'}T_{s_\alpha} \\ &= T_{s_\beta}T_{w's_\alpha} \\ &= T_{s_\beta w's_\alpha} \\ &= T_{ws_\alpha}. \end{aligned}$$

Die Gleichung für den Fall $l(ws_\alpha) < l(w)$ wird analog zu (i) bewiesen. ■

Für den Rest des Abschnittes halten wir wieder ein ℓ-modulares System (K, R, k) fest.

Korollar 5.3.2 (Puig [74], Hiss [46], Fleischmann [31]): *Sei ℓ eine Primzahl mit $\ell \nmid |W|$ und $p_\alpha \equiv 1 (\operatorname{mod} \ell)$ für alle $\alpha \in \Pi$. Dann sind die direkten Summanden X_i von $\operatorname{Ind}_B^G(R)$ irreduzible RG-Gitter (d.h. daß die X_i^K irreduzible KG-Moduln sind). Enthalten diese darüberhinaus ein Basissystem im Sinne von* Kapitel 2*, dann bleiben sie bei der Reduktion modulo ℓ irreduzibel.*

Beweis: Nach Satz 5.1.2 (b), dessen Voraussetzungen nach Korollar 5.2.4 erfüllt sind, ist die Zerlegungsmatrix von X ein Teil der Zerlegungsmatrix von RG. Die Zerlegungsmatrix von X ist gleich der Zerlegungsmatrix von $\mathrm{End}_{RG}(X)$. Da $p_\alpha \equiv 1 (\mathrm{mod}\, \ell)$ für alle α, ist nach Satz 5.3.1 $\mathrm{End}_{kG}(\bar{X}) \cong kW$. Wegen $\ell \not| \, |W|$ ist kW halbeinfach, d.h. die Cartanmatrix von $\mathrm{End}_{kG}(\bar{X})$ ist die Einheitsmatrix. Dann ist auch die Zerlegungsmatrix von $\mathrm{End}_{RG}(X)$ eine Einheitsmatrix.

Die Behauptung über die Irreduzibilität der $\bar{X}_i$ folgt aus Satz 5.1.2 (b). Die Voraussetzung, daß die Menge der X_i^K ein Basissystem enthält, impliziert nämlich, daß die in jenem Satz auftretende Matrix D' die Nullmatrix ist. ∎

Sei nun $G = G(q)$ eine Chevalley-Gruppe über dem Körper $\mathbb{F}_q$. Dann sind die Parameter aus Satz 5.3.1 alle gleich q. Sei θ ein kommutativer Ring mit 1. Wir definieren

$$\mathcal{H}_{\theta,q}(W) = \mathrm{End}_{\theta G}(\mathrm{Ind}_B^G(\theta)).$$

Dabei wird der triviale θG-Modul mit θ bezeichnet. Die Algebra $\mathcal{H}_{\theta,q}(W)$ heißt *Hecke-Algebra* über θ zur Weylgruppe W und zum Parameter q.

Wir benötigen noch den Begriff der *generischen Hecke-Algebra* zur Weylgruppe W (oder allgemeiner zur Coxeter-Gruppe W). Dies ist eine assoziative Algebra $\mathcal{H}_X(W)$ über $\theta = \mathbb{Z}\,[X^{1/2}, X^{-1/2}]$, wobei X eine Unbestimmte ist. Die generische Hecke-Algebra besitzt eine $\mathbb{Z}$-Basis $\{e_w \mid w \in W\}$, so daß die Multiplikationsformeln aus Satz 5.3.1 mit e_w statt T_w und X statt q erfüllt sind. Manche Autoren (z.B. Dipper und James) betrachten die generische Hecke-Algebra über dem Grundring $\mathbb{Z}\,[X, X^{-1}]$. Lusztig hat einen kanonischen Isomorphismus zwischen $\mathcal{H}_X(W) \otimes \mathbb{Q}\,[X^{1/2}, X^{-1/2}]$ und $\mathbb{Q}\,[X^{1/2}, X^{-1/2}]W$ angegeben, der nicht ohne den Koeffizienten $X^{1/2}$ auskommt. Da wir später diesen Isomorphismus anwenden wollen, ist die hier gewählte Definition für unsere Zwecke günstiger.

Unter der Voraussetzung $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, \ell)$ gilt insbesondere $\mathcal{H}_{k,q}(W) \cong kW$. Es ist wohlbekannt, daß stets $\mathcal{H}_{K,q}(W) \cong KW$ ist. Wir werden später ein Beispiel sehen, wo zwar $\mathcal{H}_{k,q}(W) \cong kW$ und $\mathcal{H}_{K,q}(W) \cong KW$ ist, aber $\mathcal{H}_{R,q}(W)$ nicht zu RW isomorph ist. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\ell \not| \, |W|$ gilt natürlich immer, daß $\mathcal{H}_{R,q}(W) \cong RW$ ist. Dies folgt aus der Tatsache, daß dann sowohl $\mathcal{H}_{R,q}(W)$ als auch RW die Einheitsmatrix als Zerlegungsmatrix haben. Also sind beide Algebren isomorph zu einer Summe von vollen Matrixringen über R, ist doch in diesem Fall jeder Block ein Defekt Null Block. Aus der Tatsache, daß sie über K isomorph sind, folgt dann, daß sie schon über R isomorph sind.

An dieser Stelle sei erwähnt, daß Fleischmann in [31] ein Kriterium angegeben hat, wann ein gewöhnlicher irreduzibler Charakter der Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{K,q}(W)$ in einem Block vom Defekt Null liegt. Dieses Kriterium benutzt die sogenannten *generischen Grade* der generischen Hecke-Algebra. Im Falle einer Chevalley-Gruppe $G = G(q)$ kann aus Fleischmanns Satz das Ergebnis 5.3.2 gewonnen werden. Falls ℓ ein Teiler von $|G : B|$ ist, ist ein Konstituent von $\mathrm{Ind}_B^G(K)$ genau dann vom ℓ-Defekt Null, wenn die korrespondierende K-Darstellung von $\mathcal{H}_{K,q}(W)$ in einem Block vom Defekt Null liegt. Im Falle, daß ℓ kein Teiler von $|G : B|$ ist, können mit Hilfe von Fleischmanns Ergebnissen und Satz 5.1.2 weitere Erkenntnisse über die Zerlegungsmatrix von G gewonnen werden. Fleischmann gibt weiterhin ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß $\mathcal{H}_{k,q}(W)$ halbeinfach ist.

5.4 Die Anzahl der trivialen Kompositionsfaktoren im Steinberg-Modul

Sei weiterhin G eine endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar der Charakteristik p und sei ℓ eine Primzahl (die hier sogar gleich p sein kann). In diesem Abschnitt bestimmen wir die Vielfachheit des trivialen Moduls im Steinberg-Modul über einem Körper der Charakteristik ℓ. Als Beispiel bestimmen wir diese Vielfachheit für jede endliche Gruppe vom Lie-Typ, die von einer einfachen algebraischen Gruppe herkommt. Die Ergebnisse sind dann auch für die einfachen Varianten dieser Gruppen gültig.

Sei (K, R, k) ein ℓ-modulares System. Obwohl das Ergebnis vollständig innerhalb der Kategorie der kG-Moduln formuliert werden kann, benutzt der Beweis die Charakteristik 0 Theorie mittels Satz 5.1.2. Der Brauercharakter des Steinberg-Moduls in Charakteristik ℓ, so wie er von Steinberg in [88] eingeführt wurde, ist der Steinberg-Charakter, eingeschränkt auf die ℓ'-Klassen. Mit anderen Worten: Wir bestimmen die Zerlegungszahl $d_{\mathrm{St},1}$ in jeder Charakteristik ℓ. Nach Brauers Reziprozitätsgesetz ist die Vielfachheit des trivialen Moduls im Steinberg-Modul gleich der Vielfachheit des Steinberg-Charakters in der projektiven Hülle des trivialen Moduls.

Das Problem, die modularen Konstituenten des Steinberg-Charakters zu finden, ergab sich aus der Frage nach den Zerlegungszahlen der $G_2(q)$ [47]. Könnte man alle modularen Bestandteile des Steinberg-Charakters sowie deren Vielfachheiten bestimmen, dann könnte man auch die dort noch offenen Fragen lösen. Die Bestimmung der trivialen Konstituenten ist ein erster Schritt in diese Richtung. Allerdings kann hiermit keines der offenen Probleme aus [47] gelöst werden.

Die folgende Beobachtung ergibt sich aus der Betrachtung der Zerlegungszahlen von $G_2(q)$ (siehe Anhang C): Der triviale Charakter kommt im Steinberg-Charakter modulo ℓ genau dann vor, wenn ℓ die Zahl $q + 1$ teilt. In diesem Falle ist seine Vielfachheit gleich 1. Das folgende Ergebnis zeigt, daß diese Aussage für alle Chevalley-Gruppen richtig ist. Es ist eine weitere Anwendung von Satz 5.1.2.

Wir behalten die Notation aus den vorstehenden Abschnitten bei. Ferner setzen wir $[B] = \sum_{b \in B} b$. Sei e das Steinberg-Element im ganzzahligen

Gruppenring von G:

$$e = [B] \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} \dot{w}.$$

Ohne weitere Bemerkungen werden wir e als Element von θG für jeden Ring θ von Koeffizienten auffassen.

Der Steinberg-Modul von kG ist das Rechtsideal $I = ekG$. In [88] zeigt Steinberg, daß I die Dimension $|U|$ hat, und daß I genau dann irreduzibel ist, wenn ℓ relativ prim zu $|G : B| = \sum_{w \in W} p_w$ ist.

Mit d_ℓ bezeichnen wir die Vielfachheit des trivialen kG-Moduls als Kompositionsfaktor von I. Da I über dem Primkörper $\mathbb{F}_\ell$ definiert ist, hängt d_ℓ nur von ℓ und nicht von der Größe von k ab. Wir werden deshalb im folgenden annehmen, daß (K, R, k) ein Zerfällungssystem für G ist. Wir können nun das erste Ergebnis dieses Abschnittes formulieren.

Satz 5.4.1 (Hiss, [48, Theorem A]): *Sei G eine endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar. Mit den obigen Bezeichnungen gilt dann:*

(a) $d_\ell \in \{0, 1\}$.

(b) $d_\ell = 1$ *genau dann, wenn* $p_\alpha \equiv -1 (\operatorname{mod} \ell)$ *ist, für alle* $\alpha \in \Pi$.

(c) *Ist* $d_\ell = 1$, *dann besteht der Sockel von I aus dem trivialen Modul.*

Beweis: In Charakteristik p ist der Steinberg-Charakter vom Defekt Null, d.h. $d_p = 0$, und der Satz ist richtig für $\ell = p$. Wir können also $\ell \neq p$ annehmen.

(a) Es ist $\langle \mathbf{1}_U^G, \mathrm{St} \rangle_G = \langle \mathbf{1}, \mathrm{St}_U \rangle_U = 1$, weil St_U der reguläre Charakter von U ist. Auf der anderen Seite ist $\mathbf{1}_U^G$ der Charakter eines projektiven Moduls, der die projektive Hülle des trivialen Moduls enthält. Hieraus folgt $d_\ell \leq 1$. (Dasselbe Argument kann natürlich auch für andere Konstituenten χ von $\mathbf{1}_U^G$ angewendet werden, um die Schranke $d_{\chi,1} \leq \chi(1)$ zu erhalten.)

(b) Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R = \mathrm{End}_{RG}(\mathrm{Ind}_B^G(R))$ (wobei wir den trivialen RB-Modul mit R bezeichnet haben). Wir wollen Satz 5.1.2 anwenden. Dazu müssen wir diejenigen K-Darstellungen von $\mathcal{H}^K = \mathrm{End}_{KG}(\mathrm{Ind}_B^G(K))$ bestimmen, die unter der Fitting-Korrespondenz dem Steinberg-Charakter und dem trivialen Charakter entsprechen. Nach [14, §§ 67A, 67B]) hat $\mathcal{H}$ zwei 1-dimensionale Darstellungen, nämlich:

$$\mathrm{ind} : \mathcal{H} \to R \quad (T_{w_\alpha} \mapsto p_\alpha)$$

und

$$\mathrm{sgn} : \mathcal{H} \to R \quad (T_{w_\alpha} \mapsto -1).$$

Dabei korrespondiert ind zum trivialen und sgn zum Steinberg-Charakter.

Nun ist d_ℓ genau dann gleich 1, wenn die Zerlegungsmatrix von RG eine Spalte wie folgt besitzt:

$$\begin{array}{c|c} 1_G & 1 \\ \mathrm{St} & 1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Nach Satz 5.1.2 (b) ist dies genau dann der Fall, wenn die Zerlegungsmatrix von $\mathcal{H}$ eine Spalte wie folgt besitzt:

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{ind} & 1 \\ \mathrm{sgn} & 1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Weil sowohl ind als auch sgn 1-dimensional sind, ist dies genau dann der Fall, wenn ind und sgn modulo ℓ gleich sind. Dies beweist (b).

(c) Es gelte $p_\alpha \equiv -1 (\mathrm{mod}\, \ell)$ für alle $\alpha \in \Pi$. Dann sind die beiden k-Charaktere $\overline{\mathrm{ind}}$ und $\overline{\mathrm{sign}}$ von $\mathcal{H} \otimes_R k$ identisch und wir haben in k:

$$(-1)^{l(w)} = p_w = |U_w|, \qquad \text{für alle } w \in W.$$

Damit gilt nun in kG:

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in U} eu &= [B] \sum_{w \in W} \sum_{u \in U} (-1)^{l(w)} \dot{w}u \\
&= \sum_{w \in W} |U_w| \sum_{u' \in U_{w_0 w}} \sum_{u'' \in U_w} [B] \dot{w}u'\dot{w}^{-1}\dot{w}u'' \\
&= \sum_{w \in W} |U_w| \sum_{u' \in U_{w_0 w}} \sum_{u'' \in U_w} [B] \dot{w}u'' \\
&= |U| \sum_{w \in W} \sum_{u \in U_w} [B] \dot{w}u
\end{aligned}$$

Nach Theorem 4.10 und dessen Beweis in [90] ist der Sockel des Steinberg-Moduls einfach und wird von $\sum_{u \in U} eu$ erzeugt. Auf der anderen Seite erzeugt nach der Bruhat-Zerlegung 5.4 das Element $\sum_{w \in W} \sum_{u \in U_w} [B]\dot{w}u$ den trivialen Modul. Das vorliegende Argument kann auch verwendet werden, um eine Richtung von Teil (b) zu zeigen. ■

Wir wenden nun Satz 5.4.1 auf die endlichen Gruppen vom Lie-Typ an.

Satz 5.4.2 (Hiss, [48, Theorem B]): *Sei $G = G(q)$ eine endliche Gruppe vom Lie-Typ, die von einer einfachen algebraischen Gruppe $\mathbf{G}$ herrührt.*

Wird d_ℓ wie oben definiert, dann ist $d_\ell \in \{0, 1\}$. Ist G eine Chevalley-Gruppe, dann ist d_ℓ genau dann gleich 1, wenn ℓ ein Teiler von $q+1$ ist.

Ist G eine Steinberg-, eine Suzuki- oder Ree-Gruppe, dann ist $d_\ell = 0$ außer für die Paare (G, ℓ) in der folgenden Liste.

$G(q)$	ℓ teilt
${}^2A_2(q^2)$	q^3+1
${}^2A_n(q^2), \quad n \geq 3$	$\mathrm{ggT}(2, q+1)$
${}^2D_n(q^2), \quad n \geq 4$	$\mathrm{ggT}(2, q+1)$
${}^3D_4(q^3)$	$q+1$
${}^2E_6(q^2)$	$\mathrm{ggT}(2, q+1)$
${}^2B_2(q^2), \quad q^2 = 2^{2m+1}$	q^4+1
${}^2G_2(q^2), \quad q^2 = 3^{2m+1}$	q^6+1

Beweis: Nach Satz 5.4.1 müssen wir die Zahlen p_α für die verschiedenen Möglichkeiten von $G(q)$ berechnen. Dies kann so geschehen, wie es Carter in [10, Section 2.9] vorgeführt hat. Ist G eine Chevalley-Gruppe, so sind alle p_α gleich q, womit der Satz in diesem Fall bewiesen ist. Die p_α für die übrigen Gruppen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

$G(q)$	p_α	Anzahl von p_α
${}^2A_2(q^2)$	q^3	1
${}^2A_{2m+1}(q^2), \quad m \geq 1$	q	1
	q^2	m
${}^2A_{2m}(q^2), \quad m \geq 2$	q^3	1
	q^2	$m-1$
${}^2D_n(q^2), \quad n \geq 4$	q^2	1
	q	$n-2$
${}^3D_4(q^3)$	q^3	1
	q	1
${}^2E_6(q^2)$	q^2	2
	q	2
${}^2B_2(q^2), \quad q^2 = 2^{2m+1}$	q^4	1
${}^2G_2(q^2), \quad q^2 = 3^{2m+1}$	q^6	1
${}^2F_4(q^2), \quad q^2 = 2^{2m+1}$	q^4	1
	q^2	1

Damit ist der Beweis vollständig erbracht. ■

Bemerkung 5.4.3 (a) In einer Ree-Gruppe vom Typ ${}^2F_4$ ist der triviale Charakter niemals ein Konstituent des Steinberg-Charakters. Die Ree-Gruppen dieses Typs sind die einzigen einfachen Gruppen vom Lie-Typ mit dieser Eigenschaft.

(b) Sei $\ell = 2$. Nach Fongs Lemma hat dann ein nichttrivialer, selbstdualer, irreduzibler kG-Modul eine gerade Dimension. Wenn p ungerade ist, hat der Steinberg-Charakter eine ungerade Dimension. Da er außerdem einen reellen Brauercharakter hat, muß er mindestens einen trivialen Konstituenten enthalten. Ist dagegen $p = 2$, dann ist der Steinberg-Charakter natürlich irreduzibel modulo 2. Dies ist eine andere Erklärung für die Tatsache, daß 2 immer in der obigen Liste auftaucht, wenn q ungerade ist.

(c) Das Ergebnis von Satz 5.4.2 war bekannt im Falle von ${}^2A_2$ durch die Untersuchungen von M. Geck in [39] und im Falle der Suzuki-Gruppen durch Burkhardt [7]. In diesen beiden Fällen kann es allerdings auch ebenso leicht aus der Tatsache abgeleitet werden, daß hier die Permutationsdarstellung auf den Nebenklassen der Boreluntergruppe zweifach transitiv ist.

5.5 Die Hecke-Algebra zur Weylgruppe D_{12}

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels bestimmen wir an dem Beispiel der Weylgruppe W von G_2 für jeden Ring R, wann die Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{R,q}(W)$ isomorph zum Gruppenring RW ist. Die Weylgruppe von G_2 ist eine Diedergruppe der Ordnung 12. Sie wird im folgenden mit D_{12} bezeichnet. Die Elemente von W sind im Anhang aufgelistet. Daraus kann man ohne Schwierigkeiten die reguläre Darstellung von $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{Z},q}(W)$ berechnen. Das Aufstellen der Matrizen für T_a und T_b wird dem Leser überlassen.

Mit Hilfe dieser beiden Matrizen können wir nun die Diskriminante von $\mathcal{H}$ berechnen. Diese ist definiert durch $\delta(\mathcal{H}) = \det[(\operatorname{Spur} T_v T_w)_{v,w\in W}]$. Wir finden:

$$\delta(\mathcal{H}) = 2^{16} \cdot 3^6 \cdot q^{20}(q+1)^8(q^4+q^2+1)^6.$$

Sei (K, R, k) ein ℓ-modulares System. Wir nehmen an, daß R eine Quadratwurzel $\sqrt{q}$ von q enthält. Wir bestimmen nun diejenigen Tripel (p, q, ℓ), für die $\mathcal{H}_{R,q}(D_{12})$ isomorph zu RD_{12} ist.

Satz 5.5.1 *Genau in den folgenden Fällen ist $\mathcal{H}_{R,q}(D_{12}) \cong RD_{12}$:*

(a) $\ell = 2$ *und* $4 \mid q-1$.

(b) $\ell > 2$ *und* $\ell \mid q-1$.

(c) $\ell \nmid |G_2(q)|$.

Beweis: Die Diskriminante von RD_{12} ist $12^{12} = 2^{24} \cdot 3^{12}$. Ist $\mathcal{H}_{R,q}(D_{12}) \cong RD_{12}$, dann ist der Quotient der Diskriminanten

$$\frac{1}{2^8 \cdot 3^6} q^{20}(q+1)^8(q^4+q^2+1)^6$$

das Quadrat einer Einheit in R. Das zeigt sofort, daß die beiden Algebren höchstens in den angegebenen Fällen isomorph sein können. Den Beweis, daß sie in diesen Fällen auch tatsächlich isomorph sind, führen wir mit Hilfe von Lusztigs kanonischem Isomorphismus.

In [67] definiert Lusztig für jede endliche Weylgruppe W einen kanonischen Isomorphismus zwischen den Algebren $\mathcal{H}_X(W) \otimes \mathbb{Q}[X^{1/2}, X^{-1/2}]$ und $\mathbb{Q}[X^{1/2}, X^{-1/2}]W$. Es ist nicht allzu schwierig, diesen Isomorphismus ϕ für den Fall $W = D_{12}$ zu berechnen (siehe die Beispiele im Buch von Shi [84, Examples 2.2.5]). Für beliebige endliche Diedergruppen wurden diese Isomorphismen explizit auch in [27] angegeben. Wir finden:

$$\begin{aligned}\phi(T_a) \quad = \quad & \frac{1}{2}(X-1)\,1 + \frac{1}{2}(X+1)w_a + \\ & \frac{1}{3}(X^{1/2}-1)^2(-w_b + w_aw_b - w_bw_a + w_aw_bw_a) + \\ & \frac{1}{6}(X^{1/2}-1)^2(-w_bw_aw_b + w_aw_bw_aw_b - w_bw_aw_bw_a + w_aw_bw_aw_bw_a).\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen haben wir ebenso:

$$\begin{aligned}\phi(T_b) \quad = \quad & \frac{1}{2}(X-1)\,1 + \frac{1}{2}(X+1)w_b + \\ & \frac{1}{3}(X^{1/2}-1)^2(-w_a + w_bw_a - w_aw_b + w_bw_aw_b) + \\ & \frac{1}{6}(X^{1/2}-1)^2(-w_aw_bw_a + w_bw_aw_bw_a - w_aw_bw_aw_b + w_bw_aw_bw_aw_b).\end{aligned}$$

Daraus läßt sich ϕ vollständig bestimmen. Sei M_ϕ die Matrix von ϕ bezüglich der kanonischen Basen der beiden betrachteten Algebren. Für die Determinante von M_ϕ erhalten wir

$$\det(M_\phi) = \frac{1}{2^4 \cdot 3^3} X^{10}(X+1)^4(X^4+X^2+1)^3,$$

und bemerken:

$$\det(M_\phi) = \left[\frac{\delta(\mathcal{H}_X(D_{12}))}{\delta(RD_{12})}\right]^{1/2}.$$

Spezialisieren wir $X^{1/2}$ zu $\sqrt{q}$ oder $-\sqrt{q}$, dann erhalten wir einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{H}_{K,q}(D_{12})$ und KD_{12}.

Sei $\ell > 3$ und $\ell \mid q-1$ oder $\ell \nmid |G_2(q)|$. Dann liegt jeder Eintrag von M_ϕ nach Spezialisieren von $X^{1/2}$ zu $\sqrt{q}$ in R. Die Determinante von M_ϕ ist in R invertierbar. Also liefert ϕ einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{H}_{R,q}(D_{12})$ und RD_{12}.

Im Falle $\ell = 3$ betrachten wir zunächst den Ring der ganzen Zahlen R_0 von $\mathbb{Q}_3(\sqrt{q})$. Wegen $3 \mid q-1$ folgt aus $q-1 = (\sqrt{q}-1)(\sqrt{q}+1)$, daß 3 in R_0 ein Teiler von $\sqrt{q}-1$ oder von $\sqrt{q}+1$ ist. Im ersten Fall spezialisieren wir $X^{1/2}$ zu $\sqrt{q}$, im zweiten Fall zu $-\sqrt{q}$. In jedem Fall liegen dann die

Einträge von M_ϕ in R, $\det(M_\phi)$ ist eine Einheit in R, und wir erhalten den gewünschten Isomorphismus.

Sei nun $\ell = 2$ und $4 \mid q-1$. Dann ist M_ϕ wieder invertierbar in R. Auch liegt $\frac{\sqrt{q}-1}{2}$ in R. Somit liegen wieder alle Einträge von M_ϕ nach Spezialisieren in R, und ϕ ist ein Isomorphismus über R. ∎

Bemerkung 5.5.2 Im Falle $\ell = 2$ und $4 \mid q+1$, sind $\mathcal{H}_{K,q}(D_{12})$ und $\mathcal{H}_{k,q}(D_{12})$ jeweils isomorph zu den Gruppenringen über den entsprechenden Körpern, aber $\mathcal{H}_{R,q}(D_{12})$ ist nicht isomorph zu RD_{12}.

Kapitel 6

Spezielle Charakteristik

Beim Betrachten der bekannten Beispiele von Zerlegungsmatrizen endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik fällt auf, daß die Zerlegungsmatrizen für gewisse Primzahlen ℓ eine besonders einfache Gestalt haben. So ist z.B. in speziellen Charakteristiken jeder irreduzible Brauercharakter liftbar.

Zur Beschreibung dieser Phänomene sei zunächst $G = G(q)$ eine klassische Gruppe über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$. Sei ℓ eine Primzahl mit $\ell \mid q-1$. Fong und Srinivasan haben bemerkt, daß dann jeder ℓ-Block eine Vereinigung von Harish-Chandra-Serien ist. Sie vermissen jedoch einen direkten Beweis, der ohne Fall-zu-Fall-Analyse auskommt. Gilt zusätzlich auch noch, daß ℓ nicht die Ordnung der Weylgruppe teilt, dann soll ℓ hier streng linear heißen. (Die allgemeinen Definitionen folgen.) Für streng lineare Primzahlen können die Zerlegungsmatrizen ausgerechnet werden.

Als erstem ist dies L. Puig in einem Spezialfall gelungen [74]: Er konnte die Quellen-Algebren für Blöcke mit maximalem Defekt in streng linearer Charakteristik ausrechnen. Später verallgemeinerte er seine Resultate auch auf Blöcke mit nicht-maximalem Defekt [76]. Bekanntlich enthalten die Quellen-Algebren alle blocktheoretische Information, insbesondere die Zerlegungszahlen (siehe [75]).

Unabhängig von Puig entdeckte ich etwas später einen anderen Zugang zu den Zerlegungszahlen von Blöcken in streng linearer Charakteristik. Zwar erhalte ich nicht alle Folgerungen, die die Kenntnis der Quellen-Algebra nach sich zieht. Dafür macht die relative Bescheidenheit der verwendeten Hilfsmittel meine Ergebnisse allgemeiner zugänglich.

Ich wähle hier einen axiomatischen Aufbau. Zunächst werden streng lineare Primzahlen für Gruppen mit zerfallendem BN-Paar eingeführt. Mit Hilfe eines Induktionsarguments werden dann sämtliche Blöcke für diese Primzahlen bestimmt. Es zeigt sich, daß jeder solche Block die Vereinigung von Harish-Chandra-Serien ist. Die Blockeinteilung für streng lineare Primzahlen kann auch aus Schewes Dissertation [78, Theorem 5.1] abgeleitet werden. Ebenso erlauben Puigs Ergebnisse die Bestimmung der Blöcke.

Der zweite Abschnitt behandelt dann Blöcke, wie sie für streng lineare Primzahlen auftreten. Es werden insbesondere die Zerlegungsmatrizen bestimmt. Dazu wird Green-Korrespondenz verwendet. Als weiteres Ergebnis erhält man die Green-Korrespondenten der einfachen Moduln.

Im dritten Abschnitt schließlich werden die Ergebnisse auf endliche Gruppen vom Lie-Typ angewandt. Diese Anwendungen ergeben sich im wesentlichen daraus, daß die streng linearen Primzahlen für solche Gruppen bestimmt werden. Weiterhin werden Brauers Höhenvermutung und Alperins Gewichtsvermutung in dieser speziellen Situation bewiesen.

6.1 Lineare Primzahlen für Gruppen mit BN-Paar

In diesem Abschnitt sei $G = (G, B, N, U, H, W)$ eine endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar der Charakteristik p. Für die verwendeten Bezeichnungen siehe Abschnitt 5.3 sowie das Buch von Carter, [10, Section 1.10, und Chapter 2].

Definition 6.1.1 Eine Primzahl ℓ heißt *linear* für G, wenn sie die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

(1) Für alle $J \subseteq I$ und $D \in \mathrm{Syl}_\ell(Z(L_J))$ ist $C_G(D) = L_J$.

(2) Für alle $J \subseteq I$ und und alle ℓ-Untergruppen $D \leq H$ ist $C_{L_J}(D)$ in N_J konjugiert zu $L_{J'}$ für ein $J' \subseteq J$.

Gilt zusätzlich $\ell \not| \, |W|$, dann heißt ℓ *streng linear für* G.

Der hier verwendete Begriff der linearen Primzahl ist ein Spezialfall des von Fong und Srinivasan in [36, S. 142] eingeführten.

Lemma 6.1.2 *Die* Bedingung (2) *ist äquivalent zu*

(2′) *Für alle $J \subseteq I$ und alle ℓ-Elemente $t \in H$ ist $C_{L_J}(t)$ in N_J konjugiert zu $L_{J'}$ für ein $J' \subseteq J$.*

Beweis: Sei $D \leq H$ eine ℓ-Gruppe. Es gelte (2′). Wir beweisen (2) durch Induktion über den ℓ-Rang $\mathrm{rank}_\ell(D)$ von D. Ist $\mathrm{rank}_\ell(D) = 0$, dann ist nichts zu beweisen. Sei also $\mathrm{rank}_\ell(D) \geq 1$. Dann ist $D = D_1 \times \langle t \rangle$, mit $\mathrm{rank}_\ell(D_1) < \mathrm{rank}_\ell(D)$. Wir haben dann:

$$\begin{aligned} C_{L_J}(\langle t \rangle \times D_1) &= C_{L_J}(t) \cap C_{L_J}(D_1) \\ &= [C_{L_J}({}^n t) \cap C_{L_J}({}^n D_1)]^n \\ &= [L_{J'} \cap C_{L_J}({}^n D_1)]^n \\ &= [C_{L_{J'}}({}^n D_1)]^n \\ &= L_{J''}^{mn}. \end{aligned}$$

Dabei ist $n \in N_J$ und $m \in N_{J'}$, also $mn \in N_J$. ■

Wir vermerken als nächstes, daß sich die Bedingungen (1)–(3) auf Standard-Levi-Untergruppen von G vererben.

Lemma 6.1.3 *Sei $L = L_M$ eine Standard-Levi-Untergruppe von G, und ℓ eine lineare Primzahl für G. Dann ist ℓ auch linear für L. Eine analoge Aussage gilt auch für streng lineare Primzahlen.*

Beweis: Hier gibt es nichts zu beweisen. ■

Wir werden im übernächsten Abschnitt sehen, welche Primzahlen für endliche reduktive Gruppen streng linear sind. Bevor wir fortfahren, stellen wir nun die erste Grundvoraussetzung heraus, die für den Rest dieses Abschnittes gelten soll.

Voraussetzung 6.1.4 Sei G eine Gruppe mit zerfallendem BN-Paar der Charakteristik p. Wir halten eine Teilmenge $J \subseteq I$ und eine Primzahl $\ell \neq p$ fest. Sei (K, R, k) ein ℓ-modulares Zerfällungssystem für G.

(a) Sei $P = P_J = V_J L_J = VL$ eine parabolische Standard-Untergruppe von G. Dabei bezeichne V das unipotente Radikal und L die Standard-Levi-Untergruppe von P.

(b) Sei $D \in \mathrm{Syl}_\ell(Z(L))$ mit $C_G(D) = L$.

Lemma 6.1.5 *Es ist $N_P(D) = L$ und $N_G(D) = N_G(L)$.*

Beweis: Sei $x \in N_P(D)$ und $t \in D$. Wir schreiben $x = sv$, mit $s \in L = C_G(D)$ und $v \in V$. Dann haben wir $[sv, t] = [v, t] \in D \cap V = 1$, also $x \in C_G(D) = L$.

Da D charakteristisch in L ist, ist $N_G(L) \leq N_G(D)$. Andererseits ist $L = C_G(D) \lhd N_G(D)$, d.h. $N_G(D) \leq N_G(L)$. ■

Sei $\theta \in \{K, R, k\}$. Die Inflation eines θL-Moduls X auf P werde im folgenden mit $\tilde{X}$ bezeichnet. Eine analoge Bezeichnung verwenden wir für Charaktere.

Lemma 6.1.6 *Sei $\theta \in \{R, k\}$. Es bezeichne f, g die Green-Korrespondenz bezüglich $(\theta, P, D, L = N_P(D))$. Damit gilt:*

(a) *Ist Y ein unzerlegbarer θL-Modul mit $\mathrm{vtx}(Y) = D$, dann ist $g(Y) = \tilde{Y}$.*

(b) *Ist X ein unzerlegbarer θP-Modul mit $\mathrm{vtx}(X) = D$, dann ist $X = \tilde{Y}$ mit einem geeigneten θL-Modul Y, und es gilt $f(X) = Y$.*

Beweis:

(a) Sei Y ein unzerlegbarer θL-Modul mit $\mathrm{vtx}(Y) = D$. Wegen $\mathrm{Res}^P_L(\tilde{Y}) = Y$, hat auch $\tilde{Y}$ den Vertex D (siehe Landrock, [62, Theorem II 3.10]). Damit ist $f(\tilde{Y}) = Y$ und $g(Y) = g(f(\tilde{Y})) = \tilde{Y}$.

(b) Sei nun X ein unzerlegbarer θP-Modul mit $\mathrm{vtx}(X) = D$. Dann ist $Y = f(X)$ ein unzerlegbarer θL-Modul mit Vertex D und es gilt nach Teil (a): $X = g(f(X)) = g(Y) = \tilde{Y}$.

■

Lemma 6.1.7 *Sei D die Defektgruppe eines ℓ-Blockes A von G. Sei X ein unzerlegbares RG-Gitter in A mit* $\mathrm{vtx}(X) = D$*. Der Charakter von X sei χ. Dann existiert $\psi \in \mathrm{Irr}(L)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *ψ liegt in einem Block a mit Defektgruppe D; a ist eine Wurzel von A.*

(b) *χ ist ein Konstituent von $\tilde{\psi}^G$.*

Beweis: Sei b der Brauer-Korrespondent von A in $N_G(D)$. Ist Z der Green-Korrespondent von X in $N_G(D) = N_G(L)$, dann liegt Z in b und es ist $\mathrm{vtx}(Z) = D$ (siehe [43, Corollary to Conlon's Theorem]). Sei Y ein unzerlegbarer direkter Summand von $\mathrm{Res}_L^{N_G(L)}(Z)$ mit Vertex D. Ein solcher existiert immer (siehe Landrock, [62, Theorem II 3.3(iii)]). Der Charakter von Y liege in einem Block a. Da a von b überlagert wird, ist a eine Wurzel von A in $C_G(D)$.

Nach Konstruktion ist $Y \mid \mathrm{Res}_L^G(X)$ und nach Lemma 6.1.5 ist $N_P(D) = L$. Nach einem Satz von Burry [8, Theorem 1.1] existiert nun ein unzerlegbarer direkter Summand $Y_0 \mid \mathrm{Res}_P^G(X)$ mit $\mathrm{vtx}(Y_0) = D$ und $f(Y_0) = Y$, wobei f die Green-Korrespondenz bezüglich $(R, P, D, L = N_P(D))$ bezeichnet. Aus Lemma 6.1.6 folgt nun $Y_0 = \tilde{Y}$.

Sei ψ ein irreduzibler Konstituent des Charakters von Y. Dann ist $\tilde{\psi}$ ein Konstituent des Charakters von $\tilde{Y} = Y_0$. Das heißt aber $0 \neq \langle \tilde{\psi}, \chi_P \rangle_P = \langle \tilde{\psi}^G, \chi \rangle_G$. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Lemma 6.1.8 *Sei ψ ein irreduzibler kuspidaler Charakter von L, der in einem Block mit Defektgruppe D liegt. Es sei weiter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ein Konstituent von $\tilde{\psi}^G$. Die Defektgruppe des ℓ-Blockes, der χ enthält, sei D_0 ($D_0 = 1$ ist zugelassen). Dann ist entweder $G = L$ oder $D_0 \not\leq Z(G)$.*

Beweis: Wir nehmen an, daß $G \neq L$ ist, und daß D_0 in $Z(G)$ liegt. Dann ist $D_0 \leq Z(L) \leq P$.

Sei X ein RG-Gitter mit Charakter χ. Da $\tilde{\psi}$ ein Konstituent von χ_P ist, existiert ein unzerlegbarer direkter Summand Z von $\mathrm{Res}_P^G(X)$ mit $\mathrm{ch}(Z) = \zeta$, so daß gilt: $\langle \tilde{\psi}, \zeta \rangle_P \neq 0$. Da Z unzerlegbar ist, liegt Z, und damit auch alle Konstituenten von ζ, in demjenigen Block $\tilde{a}$ von P, der auch $\tilde{\psi}$ enthält. Da V ein ℓ'-Normalteiler von P ist, ist jeder Modul aus $\tilde{a}$ die Inflation eines Moduls von L, der mit ψ in einem Block a von L liegt. (siehe Feit, [28, Lemma V 4.3]). Also ist $\zeta = \tilde{\xi}$, wobei jeder Konstituent von ξ in a liegt.

Nun liegt χ, und damit auch X, in einem Block von G mit Defektgruppe D_0. Damit ist $\mathrm{vtx}(X) \leq D_0$. Dann gilt aber auch $\mathrm{vtx}(Z) \leq D_0$ (siehe Landrock, [62, Theorem II 3.3(i)]). Wegen $D_0 \leq Z(G)$ ist kein Element $t \in D \setminus D_0$ zu einem Element aus D_0 konjugiert. Aus einem bekannten Ergebnis über Vertizes (siehe Landrock, [62, Proposition II 3.6]) folgt nun $\zeta(t) = \xi(t) = 0$ für alle $t \in D \setminus D_0$.

Da D eine zentrale Defektgruppe von a ist, können die Charaktere von a leicht beschrieben werden (siehe Feit, [28, Theorem V 4.7]). Sei zuerst ψ der kanonische Charakter von a und $t \in D \setminus D_0$. Dann ist $\psi(t) = \psi(1)$. Wegen $\xi(t) = 0$ existieren weitere, von ψ verschiedene Konstituenten von ξ. Sei ξ_0 ein solcher. Da ψ der kanonische Charakter in a ist, ist ξ_0 nicht zu ψ konjugiert in $N_G(L)$. Da $\tilde{\xi}_0$ ein Konstituent von $\tilde{\xi} = \zeta$ ist, haben wir $\langle \chi, \tilde{\xi}_0^G \rangle_G \neq 0$. Dies widerspricht der Theorie von Harish-Chandra (vgl. den Beweis von Proposition 5.2.4).

Sei nun ψ_0 der kanonische Charakter von a und $\psi \neq \psi_0$. Immer noch gilt $\breve{\psi} = \breve{\psi}_0$, wenn $\breve{\psi}$ die Einschränkung von ψ auf die ℓ'-Klassen von L bezeichnet. Dann gilt aber auch $(\tilde{\psi}^G)^\smile = (\tilde{\psi}_0^G)^\smile$. Es folgt, daß $\tilde{\psi}_0^G$ einen gewöhnlichen irreduziblen Konstituenten χ_0 besitzt, der im gleichen Block wie χ liegt. Wie oben erhalten wir nun einen Widerspruch mit dem Paar (ψ_0, χ_0). Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Lemma 6.1.9 *Es sei ℓ eine streng lineare Primzahl für G. Weiter nehmen wir an, daß $N_G(H) = N$ ist. Dann ist eine ℓ-Sylowgruppe S von H auch eine ℓ-Sylowgruppe von G. Für jede Standard-Levi-Untergruppe $L = L_J$ ist $N_G(L) = N_N(L)L$.*

Beweis: Die Nummern (n) in den folgenden Ausführungen beziehen sich auf die entsprechenden Nummern in Definition 6.1.1. Nach (1) ist $C_G(S) = H$, und nach Voraussetzung ist $N_G(H) = N$. Aus Lemma 6.1.5 folgt daraus $N_G(S) = N$. Wegen $\ell \nmid |W|$ ist nun $S \in \mathrm{Syl}_\ell(N) = \mathrm{Syl}_\ell(N_G(S))$. Also ist $S \in \mathrm{Syl}_\ell(G)$.

Der zweite Teil des Lemmas folgt aus dem Frattiniargument: Sei $x \in N_G(L)$. Da S, und damit auch S^x ℓ-Sylowgruppen von L sind, existiert $z \in L$ mit $S^{xz} = S$. Damit ist $xz \in N_G(S) \cap N_G(L) = N_N(L)$. ■

Wir können nun das Hauptergebnis dieses Abschnittes beweisen. Es zeigt, daß für streng lineare Primzahlen ℓ die Einteilung in ℓ-Blöcke mit der Einteilung in Harish-Chandra-Serien verträglich ist. Für die Menge der Standard-Levi-Untergruppen von G schreiben wir $\mathcal{L}$. Für $L_J \in \mathcal{L}$ setzen wir $M_J = N_G(L_J)$.

Satz 6.1.10 *Sei G eine endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar und ℓ eine streng lineare Primzahl für G. Zusätzlich sei $N_G(H) = N$ erfüllt. Dann gilt:*

(a) *Ist D Defektgruppe eines ℓ-Blocks, dann ist D zu einer Untergruppe von H konjugiert.*

(b) *Ist $D \leq H$ Defektgruppe eines ℓ-Blocks, dann ist $D \in \mathrm{Syl}_\ell(Z(L_J))$ für ein $L \in \mathcal{L}$, und $C_G(D) = L$.*

(c) *Ist $L = L_J \in \mathcal{L}$ und $D \in \mathrm{Syl}_\ell(Z(L_J))$, dann ist D genau dann Defektgruppe eines ℓ-Blocks, wenn L_J kuspidale Charaktere enthält. Sei $A = A_J$ die Summe der ℓ-Blöcke mit Defektgruppe D. Dann sind die gewöhnlichen Charaktere in A genau die Charaktere der J-Serie. Insbesondere gilt für $J = I$: Die Blöcke mit Defektgruppe $D \in \mathrm{Syl}_\ell(Z(G))$ enthalten genau die kuspidalen Charaktere. Ist ℓ kein Teiler von $|Z(G)|$, dann sind die kuspidalen Charaktere genau die Defekt Null Charaktere.*

(d) *Sei $A = A_J$ wie oben. Dann permutiert $M = M_J = N_G(L_J)$ die kuspidalen Charaktere von L. Die Blöcke in A stehen in Bijektion zu den M-Bahnen auf den kuspidalen Charakteren von L, die D im Kern haben. Sei $\mathcal{O}_0$ eine solche Bahn, ψ_0 ein Repräsentant daraus und a_0 der Block, der ψ_0 enthält. Ist A_0 der zu $\mathcal{O}_0$ korrespondierende Block in A, dann ist*

$$A_0 = \bigcup_{\vartheta \in \mathrm{Irr}(a_0)} \mathcal{E}(G, (J, \vartheta)).$$

Beweis: Der Beweis erfolgt über den Rang von G. Ist dieser gleich 0, dann ist G eine abelsche p'-Gruppe, und alle Aussagen sind trivialerweise erfüllt. Weiter ist zu beachten, daß sich die Voraussetzungen auf jede Standard-Levi-Untergruppe vererben (Lemma 6.1.3).

(a) Dies ist klar, da H nach Lemma 6.1.9 eine ℓ-Sylowgruppe von G enthält.

(b) Sei $D \leq S \leq H$ Defektgruppe eines ℓ-Blocks. Die Nummern in den folgenden Ausführungen beziehen sich wieder auf die entsprechenden Nummern in Definition 6.1.1. Nach (2) können wir $C_G(D) = L_J = L \in \mathcal{L}$ annehmen. Insbesondere ist $D \leq Z(L)$. Da D auch Defektgruppe für einen Block von L ist, muß $D \in \mathrm{Syl}_\ell(Z(L))$ sein. Nach (1) ist $C_G(D) = L$.

(c) Sei zuerst $L = L_J \neq G$, d.h. $J \neq I$. Sei $D \in \mathrm{Syl}_\ell(Z(L))$. Da $L = C_G(D)$ eine ℓ-Sylowgruppe von G enthält, ist $N_G(D)/C_G(D)$ eine ℓ'-Gruppe. Nach Brauers erweitertem 1. Hauptsatz hat G genau dann Blöcke mit Defektgruppe D, wenn L solche hat. Nach Induktionsvoraussetzung ist dies genau dann der Fall, wenn L kuspidale Charaktere enthält.

Wir setzen nun voraus, daß L kuspidale Charaktere enthält. Nach Induktionsvoraussetzung liegen alle diese in ℓ-Blöcken mit Defektgruppe D. Sei A die Vereinigung der Blöcke von G mit Defektgruppe D und $\chi \in \mathrm{Irr}(A)$. Da D abelsch ist, hat nach einem Satz von Knörr (siehe Landrock, [62, Corollary III 9.7]) jedes RG-Gitter X mit Charakter χ den Vertex D. Nach Lemma 6.1.7 liegt χ in der J-Serie. Sei nun ϑ ein beliebiger Charakter der J-Serie. Sei D_0 die Defektgruppe des Blockes, der ϑ enthält. Nach Teil (b) ist $D_0 \in \mathrm{Syl}_\ell(Z(L_0))$ für ein $L_0 = L_{J_0} \in \mathcal{L}$. Nach Lemma 6.1.8 ist $D_0 \not\leq Z(G)$, d.h. $L_0 = C_G(D_0) \neq G$. Aus der Induktionsvoraussetzung, auf L_0 angewandt, und Lemma 6.1.7 folgt nun, daß ϑ in der J_0-Serie liegt. Dann ist aber J_0 zu J assoziiert, d.h. L_0 zu L konjugiert. Folglich ist D_0 zu D konjugiert, also liegt ϑ in A.

Für jedes $L_J \in \mathcal{L}$ mit $L_J \neq G$ bilden die Charaktere der J-Serie gerade die Summe der Blöcke mit Defektgruppe $D \in \mathrm{Syl}_\ell(Z(L_J))$. Jede J-Serie ist somit eine Vereinigung von ℓ-Blöcken, falls $J \neq I$ ist. Dann bilden aber auch die kuspidalen Charaktere eine Vereinigung von ℓ-Blöcken. Nach dem bereits bewiesenen ist deren Defektgruppe die ℓ-Sylowgruppe des Zentrums von G.

(d) Sei $L = L_J \in \mathcal{L}$, $J \neq I$. Sei $D \in \mathrm{Syl}_\ell(Z(L))$. Die Blöcke mit Defektgruppe D stehen in Bijektion zu $N_G(L)$-Bahnen von Blöcken von L mit Defektgruppe D. Die Blöcke von L mit Defektgruppe D bestehen gerade aus den kuspidalen Charakteren. Sie werden bestimmt durch ihren kanonischen Charakter.

Sei nun A_0 ein Block in A und $\chi \in \mathrm{Irr}(A_0)$. Nach Lemma 6.1.7 (a) ist $\langle \tilde{\psi}^G, \chi \rangle \neq 0$, wobei ψ in einer Wurzel von A_0 liegt. Diese bilden eine Bahn $\mathcal{O}_0$ unter $N_G(L)$. Sind zwei Charaktere aus $\mathcal{O}_0$ unter $N_N(L)L$ konjugiert, dann liefert deren Harish-Chandra–Induktion denselben Charakter ([10, Proposition 9.1.5]). Nach Lemma 6.1.9 ist aber $N_G(L) = N_N(L)L$. Damit ist auch der letzte Teil des Satzes bewiesen.

■

6.2 Blöcke in streng linearer Charakteristik

Wir wollen nun solche ℓ-Blöcke von G untersuchen, die in Satz 6.1.10 vorkommen. Dazu erweitern wir zunächst Voraussetzung 6.1.4.

Voraussetzung 6.2.1 Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 6.1.4. Wir setzen $M = N_G(L)$. Weiter setzen wir voraus, daß $N_G(L) = N_N(L)L$ ist. Für $\psi \in \mathrm{Irr}(L)$ schreiben wir $M_\psi = \{x \in M \mid \psi^x = \psi\}$ für die Trägheitsgruppe von ψ in M. Wir setzen $W_\psi = M_\psi/L$. Es sei a ein ℓ-Block von L mit Defektgruppe D, der die folgenden beiden Bedingungen erfülle:

(a) Jeder irreduzible Charakter aus a ist kuspidal.

(b) Jeder irreduzible Charakter ψ aus a ist auf M_ψ fortsetzbar.

Wir bemerken, daß wegen $N_G(L) = N_N(L)L$ für $\psi \in \mathrm{Irr}(a)$ die Verzweigungsgruppe $W^{J,\psi}$ gleich M_ψ/L ist (siehe Carter [10, Proposition 9.2.4]). Puig beweist die Ergebnisse von [74, 76] unter den Voraussetzungen 6.2.1. Deshalb können die Ergebnisse dieses Abschnittes auch aus seinen Sätzen gewonnen werden. Hier kommen wir jedoch mit wesentlich klassischeren Methoden aus. Dafür erhält Puig zusätzliche Informationen, etwa über die verallgemeinerten Zerlegungszahlen.

Definition 6.2.2 Es gelte die Voraussetzung 6.2.1. Sei ψ der kanonische Charakter von a. Dann setzen wir

$$\mathcal{E}_\ell(G,(J,\psi)) = \bigcup_{\vartheta\in \mathrm{Irr}(a)} \mathcal{E}(G,(J,\vartheta)).$$

Lemma 6.2.3 *Die* Voraussetzungen 6.2.1 *seien erfüllt. Es sei* $\psi \in \mathrm{Irr}(a)$ *und* Z *ein irreduzibles* RL*-Gitter mit Charakter* ψ*. Dann ist* $\mathrm{vtx}(Z) = D$*. Sei zusätzlich eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

(a) $\psi(1) = 1$, $M_\psi \lhd M$ *und* $|M : M_\psi|$ *ist* ℓ*-Potenz.*

(b) $\ell \nmid |W_\psi|$.

Dann gilt:

$$\mathrm{Ind}_L^M(Z) = \bigoplus_{\varphi\in \mathrm{IBr}(W_\psi)} \varphi(1)\, Y_{\varphi,\psi}. \tag{6.1}$$

Die $Y_{\varphi,\psi}$ *sind nicht isomorph für verschiedene* φ*. (Die Schreibweise* $n\,X$ *bezeichnet die direkte Summe von* n *Kopien des Moduls* X*.) Weiter gilt:* $\mathrm{vtx}(Y_{\varphi,\psi}) = D$*, und* $\mathrm{rank}_R(Y_{\varphi,\psi})_\ell = |M : D|_\ell$ *für alle* φ*. Im Falle* (b) *sind die Charaktere der* $Y_{\varphi,\psi}$ *irreduzibel.*

Beweis: Da ψ in einem Block mit zentraler Defektgruppe liegt, hat ψ die Höhe Null, woraus $\mathrm{vtx}(Z) = D$ folgt. Sei Z' eine Fortsetzung von Z auf M_ψ. Wir haben dann:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_L^{M_\psi}(Z) &= Z' \otimes_R \mathrm{Ind}_L^{M_\psi}(R)\\ &= \bigoplus_{\varphi\in \mathrm{IBr}(W_\psi)} \varphi(1)\,(Z' \otimes_R Y'_{\varphi,\psi}),\end{aligned}$$

wobei R wie üblich den trivialen Modul über R bezeichnet, und $Y'_{\varphi,\psi}$ das projektiv unzerlegbare RW_ψ-Gitter, welches zum Brauercharakter φ gehört.

Im Falle (a) ist $Z' \otimes_R Y'_{\varphi,\psi}$ unzerlegbar, weil Z' den Rang 1 hat. Im Falle (b) folgt dies aus dem Satz von Clifford der gewöhnlichen Charaktertheorie. Wir setzen

$$Y_{\varphi,\psi} = \mathrm{Ind}_{M_\psi}^M(Z' \otimes Y'_{\varphi,\psi}). \tag{6.2}$$

Im Falle (a) ist $Y_{\varphi,\psi}$ nach dem Satz von Green unzerlegbar, im Falle (b) wieder nach dem Satz von Clifford. Dieser zeigt darüberhinaus, daß die $Y_{\varphi,\psi}$ irreduzible Charaktere haben.

Aus der Konstruktion folgt sofort $\mathrm{rank}_R(Y_{\varphi,\psi})_\ell = |M : D|_\ell$. Da jedes $Y_{\varphi,\psi}$ einen Vertex in D hat, ist $\mathrm{vtx}(Y_{\varphi,\psi}) = D$. ∎

Lemma 6.2.4 *Die* Voraussetzungen 6.2.1 *seien erfüllt. Die übrige Notation sei wie in* Lemma 6.2.3. *Wir setzen* $\tilde{Z} = \mathrm{Infl}_L^P(Z)$. *Dann ist* $\mathrm{vtx}(\tilde{Z}) = D$ *und es gilt:*

$$\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{Z}) = \left[\bigoplus_{\varphi \in \mathrm{IBr}(W_\psi)} \varphi(1)\ X_{\varphi,\psi} \right] \oplus Y \tag{6.3}$$

mit $\mathrm{vtx}(X_{\varphi,\psi}) = D$ *für alle* φ, *und* $\mathrm{vtx}(Y_i) \neq D$ *für alle direkten Summanden* Y_i *von* Y. *Weiter ist* $X_{\varphi,\psi}$ *der Green-Korrespondent von* $Y_{\varphi,\psi}$ *bezüglich* $(R, G, D, N_G(D) = M)$.

Beweis: Nach Lemma 6.1.5 ist $N_G(D) = M$ und $N_P(D) = L$. Nach Lemma 6.1.6 ist $\mathrm{vtx}(\tilde{Z}) = D$. Wir verwenden nun einen Satz von Burry (siehe [8, Theorem 4.2 (1)]). Danach induziert die Green-Korrespondenz eine vielfachheitserhaltende Bijektion zwischen den direkten Summanden von $\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{Z})$ mit Vertex D, und denen von $\mathrm{Ind}_{N_P(D)}^{N_G(D)}(\mathrm{Res}_{N_P(D)}^P(\tilde{Z})) = \mathrm{Ind}_L^M(\mathrm{Res}_L^P(\tilde{Z})) = \mathrm{Ind}_L^M(Z)$ mit Vertex D. Die letzteren haben wir bereits in Lemma 6.2.3 bestimmt. ∎

Lemma 6.2.5 *Es gelten die Voraussetzungen von* Lemma 6.2.3 (b). *Dann ist* $Y = 0$ *in* Lemma 6.2.4, *d.h.*

$$\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{Z}) = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Irr}(W_\psi)} \varphi(1)\ X_{\varphi,\psi}. \tag{6.4}$$

Die $X_{\varphi,\psi}$ *sind irreduzible* RG*-Gitter.*

Beweis: Da $\ell \nmid |W_\psi|$, ist $\mathrm{IBr}(W_\psi) = \mathrm{Irr}(W_\psi)$. Aus (6.3) folgt nun:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}^G, \tilde{\psi}^G \rangle &= \mathrm{rank}_R(\mathrm{End}_{RG}(\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{Z}))) \\ &\geq \sum_{\varphi \in \mathrm{Irr}(W_\psi)} \varphi(1)^2 + \mathrm{rank}(\mathrm{End}(Y)) \\ &\geq |W_\psi| = |W^{J,\psi}| = \langle \tilde{\psi}^G, \tilde{\psi}^G \rangle. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus Carter, [10, Proposition 9.2.4]. Es folgt, daß überall Gleichheit gilt. Insbesondere ist $\mathrm{rank}(\mathrm{End}(X_{\varphi,\psi})) = 1$, d.h. $X_{\varphi,\psi}$ ist irreduzibel. ∎

Lemma 6.2.6 *Es gelte* Voraussetzung 6.2.1. *Sei* ψ *der kanonische und* ψ_1 *irgendein irreduzibler Charakter von* a. *Dann ist* $M_{\psi_1} \leq M_\psi$.

Beweis: Nach [28, Theorem V 4.7] ist $\psi_1(xy) = \psi(x)\zeta_1(y)$, wobei $xy = yx$, y ein ℓ-Element in D ist, x ein ℓ'-Element in L und ζ_1 ein irreduzibler Charakter von D. Daraus folgt offensichtlich $M_{\psi_1} \leq M_\psi$. ∎

Korollar 6.2.7 *Sei ψ der kanonische Charakter von a. Es gelte die Voraussetzung von* Lemma 6.2.5. *Dann ist $A = \mathcal{E}_\ell(G,(J,\psi))$ ein ℓ-Block mit Wurzel a.*

Beweis: Weil $|N_M(a)/L| = |W_\psi|$ nicht von ℓ geteilt wird, ist $b = a^M$ ein Block von M mit Defektgruppe D. Sei $A = b^G$ der Brauer-Korrespondent von b. Dann ist $A = \mathcal{E}_\ell(G,(J,\psi))$:

Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(A)$. Nach dem Satz von Knörr und Lemma 6.1.7 ist χ ein Konstituent von $\tilde{\psi}_1^G$, wobei ψ_1 in einer Wurzel von A liegt. Da diese unter M konjugiert sind, können wir ψ_1 in a hineinkonjugieren. Konjugation mit $M = N_N(L)L$ führt kuspidale Charaktere in kuspidale (siehe [10, Lemma 9.1.4]). Deshalb liegt χ in $\mathcal{E}_\ell(G,(J,\psi))$.

Sei umgekehrt $\chi \in \mathcal{E}_\ell(G,(J,\psi))$, etwa $\langle \chi, \tilde{\psi}_1^G \rangle_G \neq 0$. Nach Lemma 6.2.6 ist $W_{\psi_1} \leq W_\psi$, d.h. die Voraussetzungen von Lemma 6.2.3 (b) sind auch für ψ_1 erfüllt. Nach Lemma 6.2.5 ist χ der Charakter eines RG-Gitters der Form X_{ϑ,ψ_1}, wobei ϑ ein irreduzibler Charakter von W_{ψ_1} ist. Bezeichnet g die Green-Korrespondenz bezüglich $(R, G, D, M = N_G(D))$, dann ist $X_{\vartheta,\psi_1} = g(Y_{\vartheta,\psi_1})$. Da Y_{ϑ,ψ_1} in b liegt, ist X_{ϑ,ψ_1} in A (siehe [43, Corollary to Conlon's Theorem]). Damit ist das Korollar bewiesen. ■

Dieses Korollar erlaubt offensichtlich einen anderen Beweis für Satz 6.1.10. Sein Vorteil gegenüber jenem Satz besteht darin, daß hier ℓ nicht unbedingt eine streng lineare Primzahl für G zu sein braucht. Es genügt, wenn ℓ streng linear für L ist. Im nachfolgenden Satz werden die irreduziblen Brauercharaktere von $\mathcal{E}_\ell(G,(J,\psi))$ in dieser Situation bestimmt.

Satz 6.2.8 *Es gelten die Voraussetzungen von* Lemma 6.2.3 (b). *Es sei ψ der kanonische Charakter von a. Dann bilden die Charaktere in $\mathcal{E}(G,(J,\psi))$ ein Basissystem von $A = \mathcal{E}_\ell(G,(J,\psi))$. Sie bleiben bei der Reduktion modulo ℓ irreduzibel. Die kG-Moduln $\bar{X}_{\varphi,\psi}$, $\varphi \in \mathrm{Irr}(W_\psi)$, sind genau die einfachen Moduln in A. Der Green-Korrespondent von $\bar{X}_{\varphi,\psi}$ ist der einfache kM/D-Modul $\bar{Y}_{\varphi,\psi}$, wobei $Y_{\varphi,\psi}$ durch* (6.2) *definiert ist.*

Beweis: Da D unter $N_G(L) = M$ invariant bleibt, ist ψ^x für $x \in M$ entweder gleich ψ, oder liegt in einem anderen ℓ-Block. Bezeichnet Φ_ψ den PIM zu ψ, dann sind die Voraussetzungen von 5.2.4 für das Paar (ψ, Φ_ψ) erfüllt. Nach Satz 5.1.2 ist die Zerlegungsmatrix von $\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{Z})$ in der Zerlegungsmatrix von G enthalten. Nach Lemma 6.2.5 ist dies die Einheitsmatrix. Außerdem sind, ebenfalls nach Satz 5.1.2, die $\bar{X}_{\varphi,\psi}$ unzerlegbar.

Sei nun ψ_1 ein weiterer Charakter aus a und Z_1 ein RL-Gitter von ψ_1. Dann gilt $\mathrm{Ind}_P^G(\bar{\tilde{Z}}) = \mathrm{Ind}_P^G(\bar{\tilde{Z}}_1)$. Aus Lemma 6.2.5 folgt

$$\bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Irr}(W_\psi)} \bar{X}_{\varphi,\psi} = \bigoplus_{\vartheta \in \mathrm{Irr}(W_{\psi_1})} \bar{X}_{\vartheta,\psi_1}.$$

Da die $\bar{X}_{\varphi,\psi}$ unzerlegbar sind, ist $\bar{X}_{\vartheta,\psi_1}$ eine direkte Summe von solchen. Es folgt, daß sich jeder Konstituent von $\tilde{\psi}_1{}^G$, eingeschränkt auf die ℓ'-Klassen, durch die Konstituenten von $\tilde{\psi}^G$ ausdrücken läßt. Da alle Charaktere in A Konstituenten von solchen $\tilde{\psi}_1^G$ sind, bildet also $\mathcal{E}(G,(J,\psi))$ ein Basissystem. Aus Satz 5.1.2 folgt nun auch, daß die $\bar{X}_{\varphi,\psi}$ einfache kG-Moduln sind.

Die Aussage über die Green-Korrespondenten und die Vertizes der $\bar{X}_{\varphi,\psi}$ folgt aus dem nachfolgenden Lemma 6.2.9. ■

Lemma 6.2.9 *Die Voraussetzungen seien wie in* Satz 6.2.8. *Sei Y ein unzerlegbarer direkter Summand von* $\mathrm{Ind}_L^M(Z_1)$. *Dann ist $\bar{Y}$ halbeinfach. Jeder direkte Summand davon hat Vertex D. Mit g bezeichnen wir die Green-Korrespondenz bezüglich (R,G,D,M), mit $\bar{g}$ diejenige bezüglich (k,G,D,M). Wir setzen $\bar{g}$ linear auf solche kM-Moduln fort, deren Komponenten sämtliche den Vertex D haben. Dann ist $\overline{g(Y)} = \bar{g}(\bar{Y})$.*

Beweis: Nach Lemma 6.2.3 hat Y den Vertex D. Wir schreiben zunächst

$$\mathrm{Ind}_M^G(Y) = g(Y) \oplus \text{ Summanden mit Vertex } < D.$$

Aufgefaßt als kL/D-Modul, hat $\bar{Z}$ den Defekt Null. Deshalb ist $\mathrm{Ind}_L^M(\bar{Z})$ halbeinfach. Jeder direkte Summand davon hat Vertex D. Wir verwenden wieder den Satz von Burry ([8, Theorem 4.2 (1)]), um zu zeigen, daß dann auch jeder direkte Summand von $\mathrm{Ind}_P^G(\bar{\tilde{Z}})$ den Vertex D hat.

Nun ist $\bar{Z}_1 = \bar{Z}$, also $\bar{Y}$ ein direkter Summand von $\mathrm{Ind}_L^M(\bar{Z})$, demnach halbeinfach. Jede Komponente davon hat Vertex D. Schreiben wir

$$\bar{Y} = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n,$$

dann ist

$$\mathrm{Ind}_M^G(\bar{Y}) = \bar{g}(S_1) \oplus \ldots \oplus \bar{g}(S_n) \oplus \text{ Summanden mit Vertex } < D.$$

Auf der anderen Seite ist

$$\mathrm{Ind}_M^G(\bar{Y}) = \overline{\mathrm{Ind}_M^G(Y)} = \overline{g(Y)} \oplus \text{ Summanden mit Vertex } < D.$$

Nach Lemmas 6.2.4, und 6.2.5 ist $g(Y)$ ein direkter Summand von $\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{Z}_1)$. Damit ist $\overline{g(Y)}$ ein direkter Summand von $\mathrm{Ind}_P^G(\bar{\tilde{Z}})$. Jeder direkte Summand davon hat Vertex D. Daraus folgt nun die Behauptung. ■

Gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 6.2.8, dann schreiben wir $\mu_{\varphi,\psi}$ für den Brauercharakter des einfachen kG-Moduls $\bar{X}_{\varphi,\psi}$ von $\mathcal{E}_\ell(G,(J,\psi))$. Wir können nun die Zerlegungsmatrizen von $\mathcal{E}_\ell(G,(J,\psi))$ beschreiben.

Satz 6.2.10 *Es gelten die gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in* Satz 6.2.8. *Sei $\chi \in \mathcal{E}_\ell(G,(J,\psi))$, etwa $\chi \in \mathcal{E}(G,(J,\psi_1))$. Dann ist $W_{\psi_1} \leq$*

W_ψ. Es existiert ein eindeutig bestimmter Charakter $\vartheta \in \mathrm{Irr}(W_{\psi_1})$, so daß X_{ϑ,ψ_1} den Charakter χ hat. Sei

$$\mathrm{Ind}_{W_{\psi_1}}^{W_\psi}(\vartheta) = \sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(W_\psi)} d_{\vartheta\varphi}\,\varphi. \tag{6.5}$$

Dann ist

$$\breve{\chi} = \sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(W_\psi)} d_{\vartheta\varphi}\,\mu_{\varphi,\psi}. \tag{6.6}$$

Beweis: Die Inklusion $W_{\psi_1} \leq W_\psi$ wurde schon in Lemma 6.2.6 bewiesen.

Seien Z_1 und Z wieder die zu ψ_1 bzw. ψ gehörigen RG-Gitter. Wir wählen Fortsetzungen Z_1' von Z_1 auf M_{ψ_1} und Z' von Z auf M_ψ derart, daß $\bar{Z}'$ eine Fortsetzung von $\bar{Z}_1'$ ist. Dies ist möglich, da W_{ψ_1} eine ℓ'-Gruppe ist, und jede Fortsetzung Z_1'' von Z_1 auf M_{ψ_1} entsteht, indem Z_1' mit einem linearen Charakter von M_{ψ_1} multipliziert wird, der L im Kern hat.

Nach Lemma 6.2.5 ist $g(Y_{\vartheta,\psi_1}) = X_{\vartheta,\psi_1}$, und nach Lemma 6.2.9 haben wir $\overline{g(Y_{\vartheta,\psi_1})} = \bar{g}(\bar{Y}_{\vartheta,\psi_1})$. Damit gilt nun mit den Bezeichnungen aus Lemma 6.2.3:

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{\vartheta,\psi_1} &= \bar{g}(\mathrm{Ind}_{M_{\psi_1}}^{M}(\bar{Z}_1' \otimes \bar{Y}_{\vartheta,\psi_1}'))\\
&= \bar{g}(\mathrm{Ind}_{M_\psi}^{M}(\bar{Z}' \otimes \mathrm{Ind}_{M_{\psi_1}}^{M_\psi}(\bar{Y}_{\vartheta,\psi_1}')))\\
&= \bigoplus_{\varphi\in\mathrm{Irr}(W_\psi)} d_{\vartheta\varphi}\,\bar{g}(\mathrm{Ind}_{M_\psi}^{M}(\bar{Z}' \otimes \bar{Y}_{\varphi,\psi}'))\\
&= \bigoplus_{\varphi\in\mathrm{Irr}(W_\psi)} d_{\vartheta\varphi}\,\bar{g}(\bar{Y}_{\varphi,\psi})\\
&= \bigoplus_{\varphi\in\mathrm{Irr}(W_\psi)} d_{\vartheta\varphi}\,\bar{X}_{\varphi,\psi}
\end{aligned}$$

■

Beispiel 6.2.11 Sei $G = G_2(q)$, $L = H = \mathcal{H}_1$, $P = B$, $\ell \mid q-1$, $\ell \neq 2,3$. Betrachte den Charakter X_{1a} aus dem Hauptblock von G. Dies ist ein Konstituent von $\mathrm{Ind}_B^G(\tilde{\lambda}_a)$, wobei λ_a ein irreduzibler Charakter von H mit Trägheitsgruppe $\langle H, \dot{w}_a\rangle$ in $N_G(H)$ ist. Der gemäß Lemma 6.2.5 zu X_{1a} korrespondierende Charakter von $\langle w_a\rangle$ ist der alternierende $\bar{1}$, (der andere Konstituent X_{1a}' von $\mathrm{Ind}_B^G(\tilde{\lambda}_a)$ korrespondiert zum Trivialen). Wir finden

$$\bar{1}_{\langle w_a\rangle}^{W} = \phi_{1,6} + \phi_{1,3}'' + \phi_{1,2} + \phi_{2,2}.$$

Nach Satz 6.2.10 ist somit

$$\breve{X}_{1a} = \breve{X}_{12} + \breve{X}_{14} + \breve{X}_{15} + \breve{X}_{16}.$$

6.3 Lineare Primzahlen bei Gruppen vom Lie-Typ

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir bestimmen, welche Primzahlen für die endlichen Gruppen vom Lie-Typ linear sind. Dazu benötigen wir die im Buch von Carter, [10, Section 1.18] eingeführten Begriffe. Sei $\mathbf{G}$ eine lineare algebraische Gruppe über $\mathbb{F}$ und F eine Frobenius-Abbildung von $\mathbf{G}$. Wir halten ferner einen maximal zerfallenden Torus $\mathbf{T}$ und eine ihn enthaltende F-stabile Boreluntergruppe $\mathbf{B}$ fest. Sei Φ das Wurzelsystem und Π das Fundamentalsystem positiver Wurzeln bezüglich $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$. Weil F die Wurzeluntergruppen permutiert, induziert F eine Permutation ρ auf den positiven Wurzeln von Φ. Diese läßt Π invariant. Weiter sei $X = \mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \mathbb{F}^*)$. Dann ist $\Phi \subset X$. Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $X_\mathbb{R} = X \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ operiert dann F als $F = qF_0$, mit einer reellen Zahl $q > 0$ und einem Automorphismus F_0 von endlicher Ordnung δ.

Eine Teilmenge Φ_1 von Φ heißt symmetrisch, wenn $\Phi_1 = -\Phi_1$ ist. Sie heißt abgeschlossen, wenn aus $\alpha, \beta \in \Phi_1$ und $\alpha + \beta \in \Phi$ stets folgt, daß schon $\alpha + \beta \in \Phi_1$ ist. Ist Φ_1 symmetrisch und abgeschlossen, dann ist

$$\mathbf{L} = \langle \mathbf{T}, \mathbf{X}_\alpha \mid \alpha \in \Phi_1 \rangle \tag{6.7}$$

eine zusammenhängende, reduktive Untergruppe von $\mathbf{G}$, die das Wurzelsystem Φ_1 besitzt. Es ist $\mathbf{L}$ genau dann F-invariant, wenn Φ_1 stabil unter ρ ist; $\mathbf{L}$ ist regulär, wenn $\mathbf{L}$ invariant unter F ist, und Φ_1 in W zu einer Teilmenge der Form Φ_Δ mit $\Delta \subseteq \Pi$ konjugiert ist. Läßt sich diese Konjugation sogar in W^F erreichen, dann ist $\mathbf{L}$ maximal zerfallend, d.h. L ist eine Levi-Untergruppe in G.

Ist $t \in \mathbf{T}$, dann ist $C_\mathbf{G}(t)^0 = \langle \mathbf{T}, \mathbf{X}_\alpha \mid \alpha(t) = 1 \rangle$. Setzen wir $\Phi_1 = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(t) = 1\}$, dann ist Φ_1 symmetrisch und abgeschlossen. Liegt t in G, dann ist Φ_1 invariant unter ρ.

Lemma 6.3.1 *Sei Φ_1 eine symmetrische, abgeschlossene und ρ-stabile Teilmenge von Φ und $\mathbf{L}$ wie in (6.7) definiert. Dann ist zunächst Φ_1 ein Wurzelsystem in $\langle \Phi_1 \rangle \subseteq X_\mathbb{R}$. Sei $\Pi_1 = \{\alpha \in \Phi_1 \cap \Phi^+ \mid \alpha \text{ unzerlegbar in } \Phi_1 \cap \Phi^+\}$. Dann ist Π_1 ein ρ-stabiles Fundamentalsystem von Φ_1. Für die Ordnung von T erhalten wir:*

$$|T| = |Z(\mathbf{L})^{0^F}| \prod_{\Delta'} (q^{|\Delta'|} - 1),$$

wobei Δ' die Bahnen von ρ auf Π_1 durchläuft.

Beweis: In [2, Proposition 23] wird bewiesen, daß Φ_1 ein Wurzelsystem in $\langle \Phi_1 \rangle$ ist. Alle Elemente aus Π_1 liegen auf der gleichen Seite einer Hyperebene von $\langle \Phi_1 \rangle$. Aus [9, Proposition 2.1.2] folgt nun, daß Π_1 ein Fundamentalsystem von Φ_1 ist. Die ρ-Stabilität von Π_1 ist klar.

Wenden wir die Ausführungen aus Carter, [10, Section 2.9] auf **L** statt auf **G** an, so erhalten wir die Formel für $|T|$. ■

Lemma 6.3.2 *Seien Φ_1 und Π_1 wie oben. Dann existiert eine ρ-stabile Teilmenge $\Delta \subseteq \Pi$ und ein $v \in W^F$ mit $v(\Phi_1) \subseteq \Phi_\Delta$. Die Anzahl der Bahnen von ρ auf $v(\Pi_1)$ ist gleich der Anzahl der Bahnen von ρ auf Δ.*

Beweis: Wir setzen $V = X_{\mathbb{R}}^{F_0}$, der Raum der Fixpunkte von F_0. Sei θ die Projektion von $X_{\mathbb{R}}$ auf V, d.h.

$$\theta : X_{\mathbb{R}} \longrightarrow V$$

mit $\theta(x) = \frac{1}{\delta}(x+F_0(x)+\ldots+F_0^{\delta-1}(x))$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf Φ. Es seien zwei Wurzeln α und β äquivalent, wenn $\theta(\alpha)$ ein positives Vielfaches von $\theta(\beta)$ ist. Die Äquivalenzklassen sind von der Form $v(\Phi_\Delta^+)$, wobei Δ eine Bahn von ρ auf Π ist, und $v \in W^F$. Diese Aussagen stehen in [10, Section 1.18].

Wir betrachten nun eine Abbildung

$$\mu : \Phi \longrightarrow V,$$

die auf Steinberg zurückgeht. Es sei $\mu(\alpha) = \theta(\alpha')$ genau dann, wenn $\theta(\alpha')$ die größte Länge hat unter allen Projektionen auf V von zu α äquivalenten Wurzeln. Eine alternative Definition von $\mu(\alpha)$ gibt Steinberg in [89, S. 14]: Sei $\alpha \in v(\Phi_\Delta^+)$. Wähle irgendeine Wurzel β von größter Höhe in Φ_Δ^+ und setze $\mu(\alpha) = v(\theta(\beta))$. Hieraus folgt insbesondere, daß W^F die Menge

$$\mu(\Phi) = \{\mu(\alpha) \mid \alpha \in \Phi\}$$

permutiert. Es gilt nun (siehe Steinberg [89, 1.32]):

(1) $\mu(\Phi)$ ist ein Wurzelsystem für die Coxetergruppe W^F.

(2) $\mu(\Pi)$ ist ein Fundamentalsystem von $\mu(\Phi)$.

Darüberhinaus zeigt die Definition von μ:

(3) $\mu(v\alpha) = v\mu(\alpha)$, $\alpha \in \Phi$, $v \in W^F$.

(4) Ist $\Delta \subseteq \Pi$ stabil unter ρ, so ist $\mu(\Phi_\Delta) = \mu(\Phi)_{\mu(\Delta)}$.

(5) Jede Teilmenge von $\mu(\Pi)$ ist von der Form $\mu(\Delta)$ für eine ρ-stabile Teilmenge Δ von Π.

Wir setzen $V_1 = \langle\mu(\Phi_1)\rangle$ und $\overline{\mu(\Phi_1)} = V_1 \cap \mu(\Phi)$. Dann gilt offensichtlich $V_1 = \langle\overline{\mu(\Phi_1)}\rangle$.

Nun ist also $\overline{\mu(\Phi_1)}$ eine Teilmenge von $\mu(\Phi)$ mit den Eigenschaften $\overline{\mu(\Phi_1)} = V_1 \cap \mu(\Phi)$ und $V_1 = \langle\overline{\mu(\Phi_1)}\rangle$. Wir behaupten, daß ein $v \in W^F$ existiert mit

$v(\overline{\mu(\Phi_1)}) = \mu(\Phi)_{\mu(\Delta)}$ für eine ρ-stabile Teilmenge Δ von Π. Dazu können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß V irreduzibel ist, d.h. daß $\mu(\Phi)$ ein unzerlegbares Wurzelsystem ist. Erfüllt $\mu(\Phi)$ die kristallographische Bedingung, ist also das Wurzelsystem einer einfachen Lie-Algebra, dann ist der behauptete Sachverhalt wohlbekannt (siehe [2, Chapitre VI, PROPOSITION 24]). Erfüllt $\mu(\Phi)$ jedoch nicht die kristallographische Bedingung, dann ist $\mu(\Phi)$ das Wurzelsystem einer Diedergruppe der Ordnung 16 (siehe Steinbergs Klassifikation [89, 11.6]). Hier ist die Behauptung jedoch offensichtlich: Es ist nur etwas zu zeigen, wenn V_1 die Dimension 1 hat. Da aber jede Wurzel zu einer fundamentalen unter W^F konjugiert ist, gilt auch in diesem Fall die Behauptung.

Offensichtlich ist $\Phi_1 \subseteq \mu^{-1}(\overline{\mu(\Phi_1)})$, wobei mit μ^{-1} das volle Urbild unter μ bezeichnet ist. Damit haben wir

$$\begin{aligned} v(\Phi_1) &\subseteq v\left[\mu^{-1}(\overline{\mu(\Phi_1)})\right] \\ &= \mu^{-1}\left[v(\overline{\mu(\Phi_1)})\right] \\ &= \mu^{-1}\left[\mu(\Phi)_{\mu(\Delta)}\right] \\ &= \Phi_\Delta. \end{aligned}$$

Damit ist die erste Behauptung des Lemmas bewiesen.

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \langle \mu(v(\Phi_1)) \rangle &= v\langle \mu(\Phi_1) \rangle \\ &= v\langle \overline{\mu(\Phi_1)} \rangle \\ &= \langle \mu(\Phi_\Delta) \rangle. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Bahnen von ρ auf Δ ist gleich der Dimension von $\langle \mu(\Phi_\Delta) \rangle$. Diese ist wiederum gleich der Dimension von $\langle \mu(v(\Phi_1)) \rangle$, und diese ist gleich der Anzahl der Bahnen von ρ auf $v(\Pi_1)$. Damit ist das Lemma vollständig bewiesen. ∎

Beispiel 6.3.3 Sei $\mathbb{F}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p und q eine p-Potenz. Sei $\mathbf{G} = GL_5(\mathbb{F})$, $\mathbf{T}$ die Menge der Diagonal- und $\mathbf{B}$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen. Sei weiter

$$w_0 = \begin{pmatrix} &&&& 1 \\ &&& 1 & \\ && 1 && \\ & 1 &&& \\ 1 &&&& \end{pmatrix}.$$

Für $(a_{ij}) \in \mathbf{G}$ sei $F(a_{ij}) = w_0^{-1}\,(a_{ij}^q)^t\, w_0$. Dann ist F eine Frobenius-Abbildung von $\mathbf{G}$ und es ist $G = U_5(q^2)$. Offensichtlich sind $\mathbf{T}$ und $\mathbf{B}$ F-invariant. Die

Gruppe der Fixpunkte T besteht aus $\{\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_0, t_2^{-q}, t_1^{-q}) \mid t_i^{q^2-1} = 1, i = 1, 2, t_0^{q+1} = 1\}$. Es ist $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\}$ mit

$$\begin{array}{rrcl} \alpha_i : & \mathbf{T} & \longrightarrow & \mathbb{F}^* \\ & \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_5) & \longmapsto & t_i t_{i+1}^{-1} \end{array}$$

Dann hat ρ auf Π die Bahnen $\{\alpha_1, \alpha_4\}$ und $\{\alpha_2, \alpha_3\}$. Die Menge $\Phi_1 = \{\alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4\}$ ist symmetrisch und abgeschlossen. Das zugehörige Fundamentalsystem ist $\Pi_1 = \{\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\}$. Für jedes $w \in W^F$ hat $w(\Pi_1)$ mit Π einen leeren Durchschnitt. Das obige Ergebnis ist nur mit $\Delta = \Pi$ und $w = 1$ zu erhalten.

Sei $\mathbf{L}$ die gemäß (6.7) mit Φ_1 gebildete Untergruppe. Da $\mathbf{L}$ eine reguläre Untergruppe von $\mathbf{G}$ ist (wir überlassen es dem Leser, ein Element $w \in W$ mit $w(\Pi_1) \subseteq \Pi$ zu finden), ist das Zentrum von $\mathbf{L}$ zusammenhängend ([78, 1.2 Lemma]). Wir bestimmen nun noch $Z(\mathbf{L})^F$. Dies besteht aus all denjenigen Elementen von T, auf denen die beiden Wurzeln aus Π_1 verschwinden. Sei $t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_0, t_2^{-q}, t_1^{-q})$. Dann ist $(\alpha_2 + \alpha_3)(t) = 1$ genau dann, wenn $t_2^{q+1} = 1$ ist. Ähnlich verschwindet die andere Wurzel aus Π_1 genau dann, wenn $t_1^{q+1} = 1$ ist. Wir finden also $Z(\mathbf{L})^F \cong \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$. Ist t ein nichttriviales Element aus $Z(\mathbf{L})^F$, mit paarweise verschiedenen t_0, t_1 und t_2, dann ist $C_G(t)$ zu keiner Standard-Levi-Untergruppe von G konjugiert, obwohl t im maximal zerfallenden Torus $\mathbf{T}$ liegt. Dieses Phänomen kann nur bei verschränkten Gruppen auftreten.

Proposition 6.3.4 *Es sei $Z(\mathbf{G})$ zusammenhängend. Sei ℓ eine Primzahl mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Es gibt eine natürliche Zahl $d > 0$ mit $\ell^d \mid q^{|\Delta|} - 1$ für alle Bahnen Δ von ρ auf Φ.*

(b) *Es gibt keine Bahn Δ von ρ auf Φ, so daß $\ell^{d+1} \mid q^{|\Delta|} - 1$.*

(c) *ℓ ist eine gute Primzahl für $\mathbf{G}$.*

Dann ist ℓ eine lineare Primzahl für G.

Beweis: Wir beweisen zunächst die Bedingung (2′) aus Lemma 6.1.2. Sei $t \in T$ ein ℓ-Element. Die Bedingungen (a)–(c) an ℓ gelten für jede F-stabile Standard-Levi-Untergruppe $\mathbf{L}_\Delta$ von $\mathbf{G}$. Zum Nachweis von (2′) genügt es also, $\mathbf{L}_\Delta = \mathbf{G}$ anzunehmen. Da ℓ eine gute Primzahl für $\mathbf{G}$ ist, ist $C_{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{L}$ regulär (siehe Schewe, [78, 1.1 Lemma]). Insbesondere ist $\mathbf{L}$ zusammenhängend, reduktiv und hat ein zusammenhängendes Zentrum (Schewe, [78, 1.2 Lemma]). Sei $\Phi_1 = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(t) = 1\}$. Dann ist Φ_1 offensichtlich symmetrisch, abgeschlossen und ρ-invariant. Nach Lemma 6.3.2 existiert ein $w \in W^F$ mit $w(\Phi_1) \subseteq \Phi_\Delta$ für eine ρ-stabile Teilmenge $\Delta \subseteq \Pi$. Setzen wir $\Pi_1 = \{\alpha \in$

$\Phi_1 \cap \Phi^+ \mid \alpha$ unzerlegbar in $\Phi_1 \cap \Phi^+\}$, dann ist Anzahl der Bahnen von ρ auf Δ gleich der Anzahl der Bahnen von ρ auf $w(\Pi_1)$. Ersetzen wir t durch ${}^{\dot{w}}t \in T$, dann können wir also $\Phi_1 \subseteq \Phi_\Delta$ annehmen.

Wir wollen $\Phi_1 = \Phi_\Delta$ beweisen. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann ist $t \in Z(L) \setminus Z(L_\Delta)$, d.h. $tZ(L_\Delta)$ ist ein nichttriviales ℓ-Element in $Z(L)/Z(L_\Delta)$. Aus Lemma 6.3.1 erhalten wir:

$$|Z(L)/Z(L_\Delta)| = \frac{\prod_{\Delta'}(q^{|\Delta'|}-1)}{\prod_{\Pi_1'}(q^{|\Pi_1'|}-1)},$$

wobei sich die Produkte über die ρ-Bahnen auf Δ bzw. Π_1 erstrecken. Da die Anzahl der Faktoren in Zähler und Nenner des obigen Produktes gleich ist, ergibt sich aus unserer Voraussetzung an ℓ, daß auf der rechten Seite eine ℓ'-Zahl steht. Dieser Widerspruch beweist $L = L_\Delta$. Wir bemerken schließlich noch, daß wir t nur mit einem Element der Form $\dot{w}$ mit $w \in W^F$ konjugiert haben. Da $\mathbf{T}$ zusammenhängend ist, können wir annehmen, daß $\dot{w}$ wie gewünscht in der monomialen Untergruppe N von G liegt.

Sei nun eine ρ-stabile Teilmenge $\Delta \subseteq \Pi$ gegeben und $D \in \mathrm{Syl}_\ell(Z(L_\Delta))$. Sei $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}(D)$. Da $D \leq Z(L) = Z(\mathbf{L})^F$ eine ℓ-Sylowgruppe von $Z(L_\Delta) = Z(\mathbf{L}_\Delta)^F$ ist, ist $|Z(L_\Delta)|/|Z(L)|$ eine ℓ'-Zahl. Sei $\Phi_1 = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(t) = 1$ für alle $t \in D\}$. Ist wieder $\Pi_1 = \{\alpha \in \Phi_1 \cap \Phi^+ \mid \alpha$ unzerlegbar in $\Phi_1 \cap \Phi^+\}$, dann ist Π_1 ein Fundamentalsystem für Φ_1. Offensichtlich ist $\Delta \subseteq \Pi_1$. Wir erhalten:

$$|Z(L_\Delta)/Z(L)| = \frac{\prod_{\Pi_1'}(q^{|\Pi_1'|}-1)}{\prod_{\Delta'}(q^{|\Delta'|}-1)}.$$

Da dies eine ℓ'-Zahl ist, ist die Anzahl der Bahnen von ρ auf Δ gleich der Anzahl der Bahnen von ρ auf Π_1. Also ist $\Delta = \Pi_1$ und $\Phi_1 = \Phi_\Delta$. Damit ist auch $C_{\mathbf{G}}(D) = \mathbf{L}_\Delta$ bewiesen. ∎

Bemerkung 6.3.5 Hat $\mathbf{G}$ kein zusammenhängendes Zentrum, dann ist ℓ linear für G, wenn außer den obigen Bedingungen (a)–(c) zusätzlich noch gilt: $\ell \nmid |Z(\mathbf{L})^F/Z(\mathbf{L})^{0F}|$ für alle zusammenhängenden, reduktiven und F-stabilen Untergruppen $\mathbf{L}$ von $\mathbf{G}$.

Beispiel 6.3.6 Die Bezeichnungen seien wie in Beispiel 6.3.3. Zunächst zeigt das Beispiel, daß es nicht genügt, in Bedingung (a) aus Satz 6.3.4 für ℓ zu fordern $\ell \mid q^{|\Delta|}-1$ für alle Bahnen Δ von ρ auf Π. In diesem Beispiel haben wir 2 Bahnen der Länge jeweils 2. Aber Primteiler von $q+1$ sind offensichtlich nicht linear.

Wir zeigen weiter, daß auf die Bedingung (b) nicht verzichtet werden kann. Sei q ungerade. Dann ist $t = \mathrm{diag}(-1,-1,1,-1,-1)$ ein Element aus T mit $t^{q-1} = 1$. Der Zentralisator von t ist nicht zu einer Standard-Levi-Untergruppe konjugiert.

Schließlich zeigen Beispiele aus der $G_2(q)$, daß auch auf die Bedingung (c) nicht verzichtet werden kann. Für schlechte Primzahlen hat $C_{\mathbf{G}}(t)$ nicht mehr notwendigerweise ein zusammenhänges Zentrum.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Kapitels zusammen.

Satz 6.3.7 *Sei* $\mathbf{G}$ *eine lineare algebraische Gruppe mit zusammenhängendem Zentrum und* F *eine Frobenius-Abbildung von* $\mathbf{G}$. *Sei* ℓ *eine Primzahl, die die* Bedingungen (a)–(c) *aus* Proposition 6.3.4 *erfüllt. Außerdem sei* ℓ *kein Teiler von* $|W|$. *Dann gilt:*

(1) *Die* ℓ*-Blöcke von* G *sind Vereinigungen von Harish-Chandra-Serien der Form* $A = \mathcal{E}_\ell(G, (J, \psi))$.

(2) *Gilt zusätzlich* $\ell \not| \, |Z(G)|$, *dann hat ein irreduzibler Charakter genau dann den* ℓ*-Defekt Null, wenn er kuspidal ist.*

(3) *Alle einfachen* kG*-Moduln sind liftbar.*

(4) *Alle gewöhnlichen irreduziblen Charaktere aus* A *haben die Höhe* 0.

(5) *Die Green-Korrespondenz bildet irreduzible* RG*-Gitter auf irreduzible* RL_J*-Gitter ab. Sie induziert somit ein Isometrie zwischen* $\mathcal{R}_K(A)$ *und* $\mathcal{R}_K(a)$, *wobei* a *den Brauer-Korrespondenten von* A *in* $N_G(L_J)$ *bezeichnet.*

(6) *Die Anzahlen der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von* A *und* a *stimmen überein. Mit anderen Worten:* A *erfüllt die Alperin–McKay-Vermutung.*

(7) *Die Green-Korrespondenz bildet einfache* kG*-Moduln auf einfache Moduln ab.*

(8) *Ist* S *ein unzerlegbarer* kG*-Modul, dessen Green-Korrespondent (im Normalisator seines Vertex) einfach ist, so ist* S *selbst einfach.*

Beweis: Nach Proposition 6.3.4 ist ℓ eine streng lineare Primzahl für G. Sei $\mathbf{T}$ ein maximal zerfallender Torus von $\mathbf{G}$. Aus $C_G(T) = T$ folgt mit Carter, [10, Proposition 3.6.4], daß $N_G(T) = N$ ist. Damit ist die zusätzliche Voraussetzung aus Satz 6.1.10 erfüllt, und die Aussage über die Blöcke klar.

Um die Voraussetzung 6.2.1 nachzuweisen, betrachten wir eine Standard-Levi-Untergruppe L_J, und einen kuspidalen Charakter ψ von L_J. Die übrigen Bezeichnungen seien wie im letzten Abschnitt. Nach einem Ergebnis von Howlett und Lehrer [54, Corollary 6.2], sind die Vielfachheiten der Konstituenten in ψ^{M_ψ} die gleichen wie in $\tilde{\psi}^G$. Es genügt also, zu zeigen, daß $\tilde{\psi}^G$ Konstituenten mit der Vielfachheit 1 besitzt. Dies folgt, weil der Endomorphismenring dieses Moduls 1-dimensionale Darstellungen besitzt, wie Lusztig in [68, 8.6] gezeigt hat. Aus den Ergebnissen der ersten beiden Abschnitte dieses Kapitels folgen nun alle Behauptungen mit Ausnahme von (4) und (8).

Der folgende Beweis von (4) wurde mir von B. Külshammer mitgeteilt. Sei X ein irreduzibles RG-Gitter in A. Dann ist X direkter Summand von $\mathrm{Ind}_{N_G(L_J)}^G(Y)$, wobei Y, der Green-Korrespondent von X, ein irreduzibles Gitter in a der Höhe 0 ist. Aus [62, Theorem II 4.1] folgt, daß jeder von X verschiedene direkte Summand von $\mathrm{Ind}_{N_G(L_J)}^G(Y)$ einen Vertex hat, der echt in D enthalten ist. Hierbei bezeichnet D die ℓ-Sylowgruppe von $Z(L_J)$. Da $|G : N_G(L_J)|$ eine ℓ'-Zahl ist, folgt hieraus, daß X die Höhe 0 hat.

Wir müssen noch die letzte Ausage beweisen. Sei dazu S ein unzerlegbarer kG-Modul mit Vertex D. Da ℓ streng linear ist, können wir $C_G(D) = L_J$ annehmen. Wenn nun der Green-Korrespondent $\bar{g}(S)$ von S in $N_G(L_J)$ einfach ist, dann liegt die ℓ-Sylowgruppe von $Z(L_J)$ im Kern von $\bar{g}(S)$. Es folgt, daß D eine ℓ-Sylowgruppe von $Z(L_J)$ ist. Da D abelsch ist, ergibt sich aus dem Satz von Knörr, daß D die Defektgruppe des Blockes ist, der $\bar{g}(S)$ enthält. Aus (7) folgt nun, daß S selbst einfach ist. Damit ist auch der letzte Teil des Satzes bewiesen. ■

Bemerkung 6.3.8 Unter den Experten ist wohlbekannt, daß Alperins Gewichtsvermutung folgendermaßen formuliert werden kann: Die Anzahl der einfachen kG-Moduln ist gleich der Anzahl der unzerlegbaren kG-Moduln, deren Green-Korrespondent im Normalisator ihres Vertex einfach ist. Aus der letzten Aussage des obigen Satzes ergibt sich also die Richtigkeit von Alperins Vermutung für streng lineare Primzahlen bei endlichen Gruppen vom Lie-Typ.

Bemerkung 6.3.9 Sei A der RG-Block, der die Charaktere $\mathcal{E}(G, (J, \psi))$ enthält. Weiter sei D die ℓ-Sylowgruppe von $Z(L_J)$. Es bezeiche DW_ψ das semidirekte Produkt mit Normalteiler D, auf dem W_ψ operiert wie in G (DW_ψ ist im allgemeinen weder eine Untergruppe noch eine Sektion von G). Dann folgt aus Puigs Ergebnissen:

(9) RDW_ψ ist die Quellen-Algebra von A.

(10) A ist Morita-äquivalent zu RDW_ψ.

Fong und Srinivasan bemerkten, daß in klassischen Gruppen schon für lineare Primzahlen ℓ jeder ℓ-Block die Vereinigung von Harish-Chandra Serien ist. Diese Beobachtung gilt auch am Beispiel der $G_2(q)$. Es ist nicht klar, ob mit den hier verwendeten Methoden diese schärfere Aussage bewiesen werden kann.

Kapitel 7

Zerlegungszahlen der $G_2(q)$: Beweise

In diesem Kapitel werden die Beweise für die Zerlegungsmatrizen der $G_2(q)$, die im Anhang C abgedruckt sind, erbracht. Zunächst möchte ich die verwendeten Methoden skizzieren. Als erstes werden die Blöcke bestimmt. Dazu erfolgt zuerst eine grobe Einteilung mittels Broués und Michels Ergebnis, daß die Mengen $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ Vereinigungen von Blöcken sind. Läßt man die Defekt Null Charaktere hieraus weg, dann erhält man in jedem Fall echte Blöcke, die mit $\mathcal{E}_\ell(G, s)'$ bezeichnet werden. Dies kann etwa mit Hilfe zentraler Charaktere bewiesen werden. Es ergibt sich aber auch aus den hier angegebenen Zerlegungsmatrizen, deren Beweis an keiner Stelle verwendet, daß die betrachteten Vereinigungen von Blöcken auch wirklich Blöcke sind. Die Blöcke wurden zum erstenmal von J. Shamash in einer Reihe von Arbeiten bestimmt.

Ist ℓ eine streng lineare Primzahl für $G = G_2(q)$, dann zitieren wir die Ergebnisse von Kapitel 6, um die Zerlegungsmatrizen zu erhalten. Ich beschränke mich in den folgenden einleitenden Bemerkungen also auf den Fall, wo ℓ keine streng lineare Primzahl für G ist.

Sei A ein ℓ-Block (oder eine Vereinigung von ℓ-Blöcken) von $G = G_2(q)$ der Form $A = \mathcal{E}_\ell(G, s)'$. Der nächste Schritt besteht darin, ein Basissystem **BS** für A zu finden. Dies geschieht dadurch, daß die gewöhnlichen Charaktere von A auf die ℓ'-Klassen eingeschränkt werden. Danach wird eine maximale linear unabhängige Teilmenge **BS** der Einschränkungen aus $\mathcal{E}(G, s)'$ bestimmt, so daß alle anderen Einschränkungen $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von **BS** sind. Nach Lemma 2.1.2 haben wir damit ein Basissystem gefunden. Die Zerlegungen der Charaktere aus A in **BS** merken wir uns als Relationen. (Die Relationen wurden bei der ersten Bestimmung für die jeweils kleinste Gruppe $G_2(q)$ ausgerechnet. Danach wurde nachgewiesen, daß sie unabhängig von q sind. Sie ergeben sich in den meisten Fällen aber auch mittels Satz 4.3.3. Die dazu nötigen Zerlegungen von Deligne–Lusztig-Charakteren finden sich im Anhang von Schewes Dissertation [78].)

Im nächsten Schritt bestimmen wir eine Menge von projektiven Charakteren, die wir in dem zu **BS** dualen System **PA** von projektiven Atomen ausdrücken. Das bedeutet technisch, daß wir die Projektiven zunächst als Klassenfunktionen ausrechnen, und dann die Skalarprodukte mit den Elementen aus **BS** bilden (vgl. Lemma 2.2.2). Wenn nötig werden diese Skalarprodukte durch einen gemeinsamen Faktor dividiert (vgl. Lemma 2.1.4). Die meisten der benützten Skalarprodukte sind im Anhang aufgeführt. Den größten Teil der Projektiven erhalten wir aus Tensorprodukten mit Defekt Null Charakteren. Andere sind induziert von Untergruppen.

Die Relationen werden dann verwendet, um mittels des PIM-Tests Proposition 2.2.7 wie in Beispiel 2.2.8 die Unzerlegbarkeit einiger der gefundenen Projektiven zu beweisen. Zusätzliche Projektive werden benötigt, um einige der Vorhandenen zu zerlegen. Es verbleibt ein Basissystem von Projektiven. Diese sind entweder unzerlegbar oder liefern obere Schranken für die Zerlegungszahlen. Die Relationen liefern untere Schranken. Mittels der Relationen können nun die fehlenden Zeilen der Zerlegungsmatrizen aufgefüllt werden.

7.1 Die Hauptblöcke

7.1.1 Der Fall $\ell = 2$

Wir schreiben $q \equiv \delta (\operatorname{mod} 4)$. Wir haben die folgenden Relationen auf 2-regulären Klassen (der Einfachheit halber weichen wir hier und im folgenden von unserer üblichen Schreibweise ab, indem wir statt $\breve{\chi}$ einfach nur χ schreiben):

$$
\begin{aligned}
X_{16} &= X_{15} - X_{17} + X_{18} \\
X_{21} &= X_{12} + X_{15} - X_{17} \\
X_{22} &= X_{11} + X_{15} - X_{17} \\
X_{23} &= X_{14} + X_{15} + X_{18} \\
X_{24} &= X_{13} + X_{15} + X_{18}
\end{aligned}
$$

Für $\delta = -1$ haben wir darüberhinaus:

$$
\begin{aligned}
X'_{2a} &= -X_{11} + X_{14} + X_{17} + X_{18} \\
X_{2a} &= X_{12} - X_{13} - X_{17} - X_{18} \\
X'_{2b} &= -X_{11} + X_{13} + X_{17} + X_{18} \\
X_{2b} &= X_{12} - X_{14} - X_{17} - X_{18} \\
X_{a} &= -X_{11} + X_{12} - X_{13} + X_{14} \\
&= X_{2a} + X'_{2a}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_b &= -X_{11} + X_{12} + X_{13} - X_{14} \\
&= X_{2b} + X'_{2b} \\
X_2 &= X_{11} + X_{12} - X_{13} - X_{14} - 2X_{17} - 2X_{18} \\
&= X_{2a} - X'_{2a} \\
&= X_{2b} - X'_{2b}
\end{aligned}
$$

Für $\delta = 1$ werden diese ersetzt durch:

$$
\begin{aligned}
X'_{1a} &= X_{11} + X_{13} + 2X_{15} - X_{17} + X_{18} \\
X_{1a} &= X_{12} + X_{14} + 2X_{15} - X_{17} + X_{18} \\
X'_{1b} &= X_{11} + X_{14} + 2X_{15} - X_{17} + X_{18} \\
X_{1b} &= X_{12} + X_{13} + 2X_{15} - X_{17} + X_{18} \\
X_a &= -X_{11} + X_{12} - X_{13} + X_{14} \\
&= X_{1a} - X'_{1a} \\
X_b &= -X_{11} + X_{12} + X_{13} - X_{14} \\
&= X_{1b} - X'_{1b} \\
X_1 &= X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + 4X_{15} - 2X_{17} + 2X_{18} \\
&= X_{1a} + X'_{1a} \\
&= X_{1b} + X'_{1b}
\end{aligned}
$$

Weil X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{17}, and X_{18} auf den 2-regulären Klassen linear unabhängig sind, bilden sie nach Lemma 2.1.2 ein Basissystem **BS**. Wir haben die folgende Menge von projektiven Charakteren, die wir im zu **BS** dualen System **PA** ausdrücken:

Char.	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	${\Phi_7}'$	Φ_8	Φ_9
X_{11}	1					1				
X_{17}							1	q		
X_{18}		1						$q/3$		
X_{13}	1		1			u		$2q/3$	1	
X_{14}	1			1		v		$2q/3$		1
X_{15}	2		1	1			1	q		
X_{12}	1	x	1	1	1	w	$q-1$	$2(q^2+1)$	y	z

wobei u, v, w, x, y und z nicht-negative ganze Zahlen sind (auf deren genauen Wert es im Moment nicht ankommt). Die Herkunft der einzelnen Projektiven ist in der folgenden Tabelle dokumentiert. Hier und in den nachfolgenden Tafeln wird der Gelfand–Graev-Charakter stets mit G-G abgekürzt.

Char.	Ursprung	Bemerkungen
Φ_1	$\mathbf{1}_U^G$	
Φ_2	$X_{19} \otimes X_{19}$	X_{19} Defekt 0
Φ_3	$\tilde{\mathrm{St}}_b^G$	Beispiel 5.2.6
Φ_4	$\tilde{\mathrm{St}}_a^G$	Beispiel 5.2.6
Φ_5	G-G	
Φ_6	$X_{19} \otimes \bar{X}_{19}$	X_{19} Defekt 0
Φ_7	$X_3 \otimes X_{32}$	$3 \nmid q$, X_3 Defekt 0
$\Phi_7{}'$	$(X_3 + X_6) \otimes X_{22}$	$3 \mid q$, X_3, X_6 Defekt 0
Φ_8	$X_{19} \otimes X_{14}$	X_{19} Defekt 0
Φ_9	$X_{19} \otimes X_{13}$	X_{19} Defekt 0

Sei Φ_{11} die projektive Hülle des trivialen Brauercharakters. Zunächst zeigt Φ_6, daß X_{15} kein Konstituent von Φ_{11} ist. Auf der anderen Seite zeigt Fongs Lemma (Theorem 6.3.86 in [58]), daß X_{13}, X_{14} and X_{12} in Φ_{11} enthalten sind. Es gibt also nur eine Möglichkeit, wie Φ_1 in eine Summe von Projektiven zerfallen kann: $\Phi_1 = \Phi_{11} + 2\Phi_{15}$, wobei Φ_{15} einen Projektiven bezeichnet, der aus **BS** nur X_{15} als Konstituenten enthält. Also ist Φ_{15} ein Atom, und deshalb nach Proposition 2.2.1 sogar unzerlegbar.

Sei Φ derjenige projektiv unzerlegbare Charakter, der in Φ_7 bzw. $\Phi_7{}'$ vorkommt, und der X_{17} enthält. Aus den bisher gefundenen Projektiven folgt die Dreiecksgestalt der Zerlegungsmatrix. Deshalb kommt X_{17} nur einmal in Φ vor. Wir bemerken, daß $\Phi_{11}, \Phi, \Phi_2, \ldots, \Phi_5$ and Φ_{15} ein Basissystem von projektiven Charakteren bilden. Die beiden Projektiven Φ_8 und Φ_9 zeigen, daß Φ_{15} sowohl in Φ_3 als auch in Φ_4 enthalten ist.

Wir erhalten die folgende verbesserte Menge von Projektiven:

Char.	Φ_{11}	Φ	Φ_2	Φ_{13}	Φ_{14}	Φ_{15}	Φ_{12}	Φ_7	$\Phi_7{}'$
X_{11}	1								
X_{17}		1						1	q
X_{18}		a	1						$q/3$
X_{13}	1	b		1					$2q/3$
X_{14}	1	c			1				$2q/3$
X_{15}		d				1		1	q
X_{12}	1	e	x	1	1		1	$q-1$	$2(q^2+1)$

Im Falle $3 \mid q$ ist Φ genau q mal in $\Phi_7{}'$ enthalten. Es folgt $a = b = c = 0$, $d \leq 1$ und $e \leq 2q$. Diese Aussagen sind natürlich wegen Φ_7 im Falle $3 \nmid q$

trivial. Die Relation $X_{16} = X_{15} - X_{17} + X_{18}$ auf 2-regulären Klassen zeigt nun $d = 1$. Die Zerlegungen der Charaktere, die nicht in **BS** liegen, können aus den Relationen berechnet werden.

Wir beweisen nun noch die oberen Schranken für die nicht bestimmten Zerlegungszahlen. das Tensorprodukt $X_{19} \otimes X_{19}$ zeigt $x \leq (q+2)/3$. Im Falle $3 \not| q$ erhalten wir mit Φ_7 die Schranke $e \leq q$. Zusammen mit $x \leq q$, erhalten wir die untere Schranke für $\varphi_{12}(1)$, die im Anschluß an die Zerlegungsmatrix angegeben ist. Im Falle $3 \mid q$ und $q > 3$, erhalten wir von Φ_7', daß $3e + x \leq 6q$ ist. Dies liefert die angegebene untere Schranke für $\varphi_{12}(1)$ in diesem Fall. Damit ist der Beweis für den Hauptblock in Charakteristik $\ell = 2$ vollständig erbracht.

7.1.2 Der Fall $\ell = 3$ und $3 \mid q - 1$

Wir haben die folgenden Relationen auf 3-regulären Klassen:

$$\begin{aligned}
X_{13} &= -X_{14} + X_{16} + X_{18} + X_{19} \\
\bar{X}_{19} &= X_{19} \\
X_{31} &= X_{12} + X_{14} - X_{19} \\
X_{32} &= X_{11} - X_{14} + X_{16} + X_{18} \\
X_{33} &= X_{15} + X_{16} + X_{19} \\
X'_{1a} &= X_{11} - X_{14} + X_{15} + 2X_{16} + X_{18} + X_{19} \\
X_{1a} &= X_{12} + X_{14} + X_{15} + X_{16} \\
X'_{1b} &= X_{11} + X_{14} + X_{15} + X_{16} \\
X_{1b} &= X_{12} - X_{14} + X_{15} + 2X_{16} + X_{18} + X_{19} \\
X_{1} &= X_{11} + X_{12} + 2X_{15} + 3X_{16} + X_{18} + X_{19} \\
&= X_{1a} + X'_{1a} \\
&= X_{1b} + X'_{1b}
\end{aligned}$$

Weil X_{11}, X_{12}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{18}, und X_{19} auf 3-regulären Klassen linear unabhängig sind, bilden sie nach Lemma 2.1.2 ein Basissystem.

Sei (K, R, k) ein 3-modulares Zerfällungssystem für G. Sei W die Weylgruppe von G. Es ist W isomorph zu D_{12}, der Diedergruppe mit 12 Elementen. Die Charaktertafel aus Carters Buch [10, S. 412] ist im Anhang wiedergegeben. Wir beabsichtigen, Satz 5.1.2 auf $\mathbf{1}_B^G$ anzuwenden. Für $\theta \in \{K, R, k\}$ sei dazu $\mathcal{H}_\theta = \mathcal{H}_{\theta,q}(W) = \mathrm{End}_{\theta G}(\mathrm{Ind}_B^G(\theta))$ die Hecke-Algebra. Wir müssen die Zerlegungsmatrix von $\mathcal{H}_R$ bestimmen.

Aus der Isomorphie zwischen $\mathcal{H}_K$ und KW ergibt sich eine Korrespondenz zwischen den irreduziblen Charakteren von W und den irreduziblen, unipotenten Charakteren der Hauptserie von G. Legen wir Lusztigs Isomorphismus zugrunde, dann ist diese in unserem Beispiel wie folgt (siehe [10, S. 449f]):

$$\begin{array}{cccccc} \phi_{1,0} & \phi_{1,6} & \phi_{1,3}{}' & \phi_{1,3}{}'' & \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \\ X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{16} & X_{15} \end{array} \tag{7.1}$$

Wegen $3 \mid q-1$ liefert die Einschränkung von Lusztigs Abbildung auf $\mathcal{H}_R$ nach Satz 5.5.1 einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{H}_R$ und RW. Die 3-Zerlegungsmatrix von RW ist also die gleiche wie diejenige von $\mathcal{H}_R$ und damit nach Satz 5.1.2 ein Teil der Zerlegungsmatrix von G. Die Zeilen sind dabei gemäß (7.1) einander zugeordnet. Die 3-modulare Zerlegungsmatrix von W ist wie folgt (fehlende Einträge sind 0):

$\phi_{1,0}$	1			
$\phi_{1,6}$		1		
$\phi_{1,3}{}'$			1	
$\phi_{1,3}{}''$				1
$\phi_{2,1}$			1	1
$\phi_{2,2}$	1	1		

Mit Satz 5.1.2 erhalten wir 4 unzerlegbare direkte Summanden von $\mathrm{Ind}_U^G(R)$ im Hauptblock. Diese werden in der folgenden Tabelle entsprechend ihrer obigen Reihenfolge mit Φ_{11}, Φ_{15}, Φ_{16} und Φ_{14} bezeichnet. Desweiteren steht Φ_{12} für die Einschränkung des Gelfand–Graev-Charakters auf den Hauptblock. Sei $M = SU_3(q^2)$. Für die Charaktere von M verwenden wir die Bezeichnungen aus Gecks Diplomarbeit [38], die im wesentlichen mit denjenigen von Simpson und Frame übereinstimmen [86]. Die folgenden von M induzierten Charaktere sind im Anhang A.5 aufgeführt. Mit Φ_{19} bezeichnen wir die Einschränkung des Charakters $\left[\chi_{(q+1)^2(q-1)}^{(u)}\right]_M^G$ auf den Hauptblock. Es ist leicht zu sehen, daß die Einschränkung von X_{18} auf M gerade die Summe der Charaktere $\chi_{(q-1)(q^2-q+1)}^{(u,v,w)}$ ist, und deshalb projektiv. Demnach ist $\Phi = (\chi_1{}^G) \otimes X_{18} = (X_{18})_M{}^G$ der Charakter eines projektiven Moduls. Jeder gewöhnliche Charakter von **BS** tritt mit einer Vielfachheit darin auf, die durch $\frac{1}{6}q(q-1)$ teilbar ist. Nach Lemma 2.1.4 können wir durch diesen gemeinsamen Faktor teilen. Das Resultat wird mit Φ_{18} bezeichnet. Wir haben nun das folgende Basissystem von Projektiven gefunden:

Char.	Φ_{11}	Φ_{18}	Φ_{19}	Φ_{14}	Φ_{15}	Φ_{16}	Φ_{12}
X_{11}	1						
X_{18}		1					
X_{19}			1				
X_{14}		2		1			
X_{15}	1				1		
X_{16}		1		1		1	
X_{12}		$q-2$	$q+1$		1		1

Nun ist Φ_{14} höchstens einmal in Φ_{18} enthalten, während Φ_{12} höchstens $q-2$ mal in Φ_{18}, höchstens $q+1$ mal und mindestens einmal in Φ_{19} enthalten ist (wegen der Relation für X_{31}).

Ist q gerade, dann existiert ein projektiver Charakter vom Grad $\frac{1}{2}q(q-1)^2$ in der parabolischen Untergruppe $Q = P_{\{b\}}$. Dieser wird in [24] mit $\vartheta_4(1)$ bezeichnet. Der induzierte Charakter $\vartheta_4(1)^G$ enthält X_{18}, aber weder X_{12} noch X_{16} (siehe [24, S. 344]). Dies zeigt, daß $\alpha = \beta = 0$ ist für gerades q. Der Charakter $\vartheta_4(1)$ von Q entsteht durch das Induzieren eines linearen Charakters von U, der U_1 nicht im Kern hat (siehe [24, pp. 331–339]). Solch ein Charakter steht für ungerades q nicht zur Verfügung, da dann $U_1 = U'$ ist. Damit ist der Beweis für den Hauptblock im Fall $\ell = 3$ und $3 \mid q-1$ erbracht.

7.1.3 Der Fall $\ell = 3$ und $3 \mid q+1$

Wir haben die folgenden Relationen auf 3-regulären Klassen:

$$\begin{aligned}
X_{13} &= -X_{14} + X_{16} + X_{18} + X_{19} \\
\bar{X}_{19} &= X_{19} \\
X_{31} &= X_{12} - X_{14} + X_{19} \\
X_{32} &= -X_{11} - X_{14} + X_{16} + X_{18} \\
X_{33} &= X_{17} + X_{18} + X_{19} \\
X'_{2a} &= -X_{11} + X_{14} + X_{17} + X_{18} \\
X_{2a} &= X_{12} + X_{14} - X_{16} - X_{17} - 2X_{18} - X_{19} \\
X'_{2b} &= -X_{11} - X_{14} + X_{16} + X_{17} + 2X_{18} + X_{19} \\
X_{2b} &= X_{12} - X_{14} - X_{17} - X_{18} \\
X_{2} &= X_{11} + X_{12} - X_{16} - 2X_{17} - 3X_{18} - X_{19} \\
&= X_{2a} - X'_{2a} \\
&= X_{2b} - X'_{2b}
\end{aligned}$$

Weil X_{11}, X_{12}, X_{14}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, und X_{19} auf den 3-regulären Klassen linear unabhängig sind, bilden sie nach Lemma 2.1.2 ein Basissystem. Wir erhalten folgende Menge von projektiven Charakteren:

Char.	Φ_{11}	Φ_{18}	Φ_{19}	Φ_{14}	Φ_{17}	Φ_{16}	Φ_{12}
X_{11}	1						
X_{18}		1					
X_{19}			1				
X_{14}	1	1		1			
X_{17}					1		
X_{16}	2			1		1	
X_{12}	1	$q+1$	$q-1$	1	z	1	1

wobei $z \in \{q/2, (q-1)/2\}$. Die Herkunft der einzelnen Projektiven ist in der folgenden Tabelle dokumentiert. Die von $L = SL_3(q)$ induzierten Charaktere sind im Anhang A.5 aufgeführt.

Char.	Ursprung	Bemerkungen
Φ_{11}	$\mathbf{1}_B^G$	
Φ_{18}	$(\chi_1 + \chi_{q^3})_L^G - \Phi_{11}$	$\chi_1 + \chi_{q^3}$ projektiv in L
Φ_{19}	$\left[\chi^{(u)}_{(q-1)^2(q+1)}\right]_L^G$	$\chi^{(u)}_{(q-1)^2(q+1)}$ Defekt 0 von L
Φ_{14}	$\frac{1}{2}\chi_{q(q+1)}{}_L^G$	$\chi_{q(q+1)}$ Defekt 0 von L
Φ_{17}	$X_{15} \otimes X_{17}$	X_{15} Defekt 0
Φ_{16}	$X_{15} \otimes X_{32}$	X_{15} Defekt 0
Φ_{12}	G-G	

Die Relationen zeigen wie in Beispiel 2.2.8, daß Φ_{11}, Φ_{14}, Φ_{16} und Φ_{12} unzerlegbar sind. Die Schranken für α, β und γ ergeben sich sofort aus den obigen Projektiven. Damit ist der Beweis für den Hauptblock im Fall $\ell = 3$ und $3 \mid q+1$ erbracht.

7.1.4 Der Fall $\ell \mid q-1$, $\ell \neq 2, 3$

Wir haben die folgenden Relationen auf ℓ-regulären Klassen:

$$\begin{aligned}
X'_{1a} &= X_{11} + X_{13} + X_{15} + X_{16}\\
X_{1a} &= X_{12} + X_{14} + X_{15} + X_{16}\\
X'_{1b} &= X_{11} + X_{14} + X_{15} + X_{16}\\
X_{1b} &= X_{12} + X_{13} + X_{15} + X_{16}\\
X_1 &= X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + 2X_{15} + 2X_{16}\\
&= X_{1a} + X'_{1a}\\
&= X_{1b} + X'_{1b}
\end{aligned}$$

Im vorliegenden Fall ist ℓ eine streng lineare Primzahl für G nach Satz 6.3.4. Damit können wir den Hauptsatz 6.3.7 verwenden, um zu sehen, daß die Charaktere X_{11}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16} und X_{12} modulo ℓ irreduzibel bleiben. Aus den Relationen oder Satz 6.2.10 (vgl. auch Beispiel 6.2.11) folgt nun die Zerlegungsmatrix.

7.1.5 Der Fall $\ell \mid q+1$, $\ell \neq 2,3$

Wir haben die folgenden Relationen auf ℓ-regulären Klassen:

$$\begin{aligned}
X'_{2a} &= -X_{11} + X_{14} + X_{17} + X_{18} \\
X_{2a} &= X_{12} - X_{13} - X_{17} - X_{18} \\
X'_{2b} &= -X_{11} + X_{13} + X_{17} + X_{18} \\
X_{2b} &= X_{12} - X_{14} - X_{17} - X_{18} \\
X_{2} &= X_{11} + X_{12} - X_{13} - X_{14} - 2X_{17} - 2X_{18} \\
&= X_{2a} - X'_{2a} \\
&= X_{2b} - X'_{2b}
\end{aligned}$$

Weil X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{17} und X_{18} auf ℓ-regulären Klassen linear unabhängig sind, bilden sie nach Lemma 2.1.2 ein Basissystem. Wir betrachten die folgende Menge von projektiven Charakteren:

Char.	Φ_{11}	Φ_{13}	Φ_{14}	Φ_{17}	Φ_{18}	Φ_{12}
X_{11}	1					
X_{13}	1	1				
X_{14}	1		1			
X_{17}				1		
X_{18}					1	
X_{12}	1	1	1	α	β	1

Die Herkunft der einzelnen Projektiven ist in der folgenden Tabelle dokumentiert.

Char.	Ursprung	Bemerkungen
Φ_{11}	$\mathbf{1}_U^G$	
Φ_{13}	$\tilde{\mathrm{St}}_b^G$	Beispiel 5.2.6
Φ_{14}	$\tilde{\mathrm{St}}_a^G$	Beispiel 5.2.6
Φ_{17}	$X_{15} \otimes X_{17}$	X_{15} Defekt 0
Φ_{18}	$X_{16} \otimes X_{18}$	X_{16} Defekt 0
Φ_{12}	G-G	

Die Relationen zeigen nun nicht nur, daß die obigen Projektiven bis auf Φ_4 und Φ_5 unzerlegbar sind, sondern sie liefern auch die angegebenen Schranken für α und β.

7.1.6 Der Fall $\ell \mid q^4 + q^2 + 1$, $\ell \neq 3$

Ein Beweis für die Brauerbäume in diesen beiden Fällen wurden von J. Shamash zum erstenmal veröffentlicht. Er ergibt sich sehr einfach aus den Graden der Charaktere sowie aus dem Projektiven

$$\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1}) = X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + 2X_{15} + 2X_{16}.$$

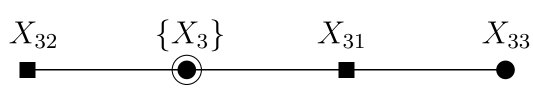
Damit sind die Beweise für die Hauptblöcke vollständig.

7.2 Die Blöcke B_3

Bei diesen Blöcken ist es in Hinsicht auf die vielen Fälle günstig, die Fallunterscheidung nach der Kongruenz von q modulo 3 vorzunehmen. Hier ist stets $\ell \neq 3$.

7.2.1 Der Fall $3 \mid q - 1$

Betrachten wir zunächst den Fall $\ell \mid q^2 + q + 1$. Dann ist die Defektgruppe zyklisch. Wir haben nur die folgenden zwei Möglichkeiten für den Brauerbaum:



Die letzte Möglichkeit widerspricht jedoch Lemma 5.2.2, da X_{32} nicht-kuspidal, X_3 dagegen kuspidal ist.

Im Falle $\ell \mid q + 1$, $\ell \neq 2$, liegt wieder ein Block mit einer zyklischen Defektgruppe vor. Dessen Brauerbaum hat nur zwei Kanten und ist deshalb trivial zu bestimmen.

Im Falle $\ell \mid q - 1$, $\ell \neq 2$ ist ℓ eine streng lineare Primzahl für G. Die Zerlegungsmatrix ergibt sich deshalb aus der Theorie in Kapitel 6.

Es bleibt der Fall $\ell = 2$ zu betrachten. Wir haben die folgenden Relationen auf $2'$-Klassen:

$$
\begin{aligned}
X'_{1a} &= X_{32} + X_{33} \\
X_{1a} &= X_{31} + X_{33} \\
X_a &= X_{31} - X_{32} \\
&= X_{1a} - X'_{1a} \\
X_1 &= X_{31} + X_{32} + 2X_{33} \\
&= X_{1a} + X'_{1a}
\end{aligned}
$$

Natürlich macht die letzte Relation nur Sinn falls $4 \mid q-1$, weil sonst X_1 gar nicht im Block enthalten ist. Wir sehen, daß X_{31}, X_{32}, X_{33} ein Basissystem bilden. Wir betrachten die folgenden projektiven Charaktere:

Char.	Φ_1	Φ_2	Φ_3
X_{32}	1		
X_{33}	2	1	
X_{31}	1	x	1

Die Herkunft der Projektiven ist in der folgenden Tabelle dokumentiert. Dabei sei λ ein Charakter der Ordnung 3 des maximal zerfallenden Torus $H = \mathcal{H}_1$, so daß

$$\mathrm{Ind}_B^G(\tilde{\lambda}) = X_{31} + X_{32} + 2X_{33}$$

ist. Der PIM, der λ enthält, enthält keinen konjugierten von λ, so daß wir Korollar 5.2.4 und Satz 5.1.2 anwenden können.

Char.	Herkunft	Bemerkungen
Φ_1	$\mathrm{Ind}_B^G(\tilde{\lambda})$	Korollar 5.2.4
Φ_2	$X_{19} \otimes X_{14}$	X_{19} Defekt 0
Φ_3	G-G	

Die Defektgruppe von B_3 ist enthalten in $SL_3(q)$. Für $4 \mid q+1$ ist dies eine Semidiedergruppe der Ordnung 2^{d+2}. In [26, Section 11] zählt K. Erdmann alle möglichen Zerlegungsmatrizen für Blöcke auf, deren Defektgruppe eine Semidiedergruppe ist, und die genau 3 irreduzible Brauercharaktere enthalten. Ein Vergleich mit ihren Tabellen ergibt, daß Φ_3 genau x mal in Φ_2 enthalten ist. Der resultierende PIM $\Phi_2 - x\Phi_3$ ist 2 mal in Φ_1 enthalten. Daraus ergibt sich die Zerlegungsmatrix.

Sei nun $4 \mid q-1$. Wir werden zeigen, daß auch in diesem Fall X_{33} irreduzibel modulo 2 ist. Dies wird den Beweis vervollständigen, da es dann nur eine Möglichkeit gibt, wie Φ_1 in projektiv unzerlegbare aufspalten kann. Sei S die 2-Sylowgruppe von H. Wegen $4 \mid q-1$, ist $C_G(S) = H$. Die Trägheitsgruppe von λ in $N = N_G(H)$ ist modulo H isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3.

Nach [53, Theorem 2.18] ist λ auf seine Trägheitsgruppe fortsetzbar. Damit ist Voraussetzung 6.2.1 erfüllt.

Sei (K, R, k) ein 2-modulares Zerfällungssystem für G. Sei weiter Z ein RG-Gitter für λ. Offensichtlich ist die Voraussetzung (a) von Lemma 6.2.3 erfüllt. Nach Lemma 6.2.4 ist

$$\mathrm{Ind}_B^G(\tilde{Z}) = X_1 \oplus 2X_2 \oplus Y,$$

wobei X_1 und X_2 jeweils den Vertex S haben. Da aus Dimensionsgründen kein RG-Gitter in X_{31} oder X_{32} den Vertex S haben kann, ist $Y = 0$, $\mathrm{ch}(X_1) = X_{31} + X_{32}$ und $\mathrm{ch}(X_2) = X_{33}$. Aus Satz 5.1.2 folgt nun die Behauptung.

7.2.2 Der Fall $3 \mid q + 1$

Wir betrachten zunächst den Fall $\ell \mid q^2 - q + 1$. Wieder hat der Block eine zyklische Defektgruppe, und einfache allgemeine Überlegungen lassen nur die folgenden beiden Brauerbäume zu:

Wieder ist der zweite Fall wegen Lemma 5.2.2 ausgeschlossen, da X_{33} kuspidal ist, X_{32} dagegen nicht.

Der Fall $\ell \mid q - 1$, $\ell \neq 2$ folgt aus der Theorie in Kapitel 6. Wir erledigen nun den Fall $\ell \mid q + 1$ ($\ell = 2$ eingeschlossen). Wir haben hier die folgenden Relationen auf $2'$-Klassen:

$$\begin{aligned} X'_{2b} &= X_{32} + X_{33} \\ X_{2b} &= X_{31} - X_{33} \\ X_b &= X_{31} + X_{32} \\ &= X_{2b} + X'_{2b} \\ X_2 &= X_{31} - X_{32} - 2X_{33} \\ &= X_{2b} - X'_{2b} \end{aligned}$$

Die Relation für X_b ist nur gültig im Fall $\ell = 2$. Die Relation für X_2 ist nicht gültig im Falle $\ell = 2$ und $4 \mid q - 1$. In den Ausnahmefällen liegen diese

Charaktere nicht in B_3. Wieder bilden X_{31}, X_{32}, X_{33} ein Basissystem. Wir betrachten die folgenden projektiven Charaktere:

Char.	Φ_1	Φ_2	Φ_3
X_{32}	1		
X_{33}		1	
X_{31}	1	γ	1

Die Herkunft der Projektiven ist in folgender Tabelle dokumentiert. Sei μ ein kuspidaler Charakter vom Grad $q-1$ des Levikomplements $L_{\{b\}} = GL_2(q)_b$ mit $\mathrm{Ind}_{L_{\{b\}}}^G(\tilde{\mu}) = X_{31} + X_{32}$. Wieder können wir auf μ das Korollar 5.2.4 anwenden.

Char.	Herkunft	Bemerkungen
Φ_1	$\mathrm{Ind}_{L_{\{b\}}}^G(\tilde{\mu})$	Korollar 5.2.4
Φ_2	$X_{19} \otimes X_{14}$	X_{19} Defekt 0
Φ_3	G-G	

Wenn X_2 im Block liegt, sind wir mit der Relation für X_2 fertig. Die Schranke für γ folgt aus dem Tensorprodukt $X_{14} \otimes X_{19}$. Wir müssen also nur noch den Fall $\ell = 2$ und $4 \mid q-1$ betrachten. In diesem Fall ist die Defektgruppe von B_3 eine 2-Sylowgruppe von $SU_3(q^2)$. Sie ist deshalb ein Semidiedergruppe der Ordnung 2^{d+2}. Die Zerlegungsmatrizen in [26, Section 11] zeigen nun $\gamma = 1$, und daß $\breve{X}_{32}$ ein modularer Konstituent von $\breve{X}_{31}$ ist. Damit ist der Beweis für die Blöcke B_3 vollständig erbracht.

7.3 Die Blöcke B_2

Wir unterscheiden die beiden Fälle $\ell \mid q-1$ und $\ell \mid q+1$, wobei wir jeweils $\ell = 3$ einschließen. Es ist leicht zu sehen, daß für $\ell \geq 3$ und $\ell \mid q-1$ die Voraussetzungen 6.2.1 erfüllt sind. Damit sind die Ergebnisse von Kapitel 6 anwendbar und wir erhalten die Zerlegungsmatrix.

Sei nun $\ell \mid q+1$, $\ell \geq 3$. Wir haben die folgenden Relationen auf ℓ'-Klassen:

$$\begin{aligned}
X'_{2a} &= -X_{22} + X_{23} \\
X_{2a} &= X_{21} - X_{24} \\
X'_{2b} &= -X_{22} + X_{24} \\
X_{2b} &= X_{21} - X_{23} \\
X_2 &= X_{21} + X_{22} - X_{23} - X_{24} \\
&= X_{2a} - X'_{2a} \\
&= X_{2b} - X'_{2b}
\end{aligned}$$

Wieder bilden X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24} ein Basissystem. In Beispiel 5.2.7 haben wir bereits ein Basissystem von Projektiven angegeben. Die Relationen zeigen nun wie in Beispiel 2.2.8, daß alle diese Projektiven unzerlegbar sind. Damit ist der Beweis für die Blöcke B_2 erbracht.

7.4 Die Blöcke B_{1a} und B_{1b}

Der Fall $\ell \mid q-1$, $\ell \neq 2$ ergibt sich wie oben aus Kapitel 6. Wir betrachten nun den Fall $\ell \mid q+1$ (den Fall $\ell = 2$ eingeschlossen). Wir haben die Relation $X_a = X_{1a} - X'_{1a}$. Für $\ell = 2$ haben wir darüberhinaus $X_1 = X_{1a} + X'_{1a}$. Wir sehen, daß X_{1a} und X'_{1a} ein Basissystem bilden. Wir betrachten die folgenden beiden projektiven Charaktere:

Char.	Φ_1	Φ_2
X_{1a}	1	
X'_{1a}	1	1

Dabei ensteht Φ_1 durch Harish-Chandra-Induktion eines geeigneten projektiven Charakters von der Levi-Untergruppe $L_{\{b\}}$, und Φ_2 ist der Gelfand–Graev-Charakter. Die Relationen zeigen die Unzerlegbarkeit dieser beiden Projektiven. Der Beweis für die Blöcke B_{1b} verläuft völlig analog.

7.5 Die Blöcke B_{2a} und B_{2b}

Hier sind die Beweise ähnlich wie für die Blöcke B_{1a} und B_{2a}. Wir müssen nur die Relationen sinngemäß abändern, und von $L_{\{a\}}$ statt $L_{\{b\}}$ induzieren.

Kapitel 8

Die Brauerbäume der Ree-Gruppen: Beweise

Im vorliegenden Kapitel werden die Beweise für die Brauerbäume der Ree-Gruppen, die in Anhang D abgedruckt sind, erbracht. Die Beweise verwenden zum Teil die Methoden aus [50].

8.1 Green-Korrespondenz

Bevor wir beginnen, wiederholen wir einige Begriffe aus der Theorie der Blöcke mit zyklischer Defektgruppe. Sei G eine endliche Gruppe, A ein Block mit zyklischer Defektgruppe $D = \langle t \rangle$ der Ordnung ℓ^d und $\chi \in A$ ein nicht-exzeptioneller Charakter. Dann ist $\chi(t)$ eine von 0 verschiedene ganze Zahl. Wir sagen, daß χ vom Typ *Kreuz* ist, wenn $\chi(t) > 0$ ist. Im anderen Fall sagen wir, χ habe den Typ *Kringel*. Die Knoten vom Typ Kreuz werden am Brauerbaum mit dem Zeichen $\blacksquare$, diejenigen vom Typ Kringel mit dem Zeichen $\bullet$ dargestellt. Am Brauerbaum können nur Charaktere verschiedenen Typs verbunden sein.

Ist die Defektgruppe eine zyklische TI-Menge, dann können die Methoden aus [50] angewendet werden. Dazu sei zunächst (K, R, k) ein ℓ-modulares Zerfällungssystem für G. Sei $^- : R \to k$ der natürliche Epimorphismus. Wir setzen $N = N_G(D)$ und definieren den Homomorphismus $\alpha : N \to k$ durch $x \mapsto \overline{\alpha(x)}$, wobei $\alpha(x) \in \mathbb{Z}$ definiert ist durch $t^x = t^{\alpha(x)}$, $x \in N$. Hier werden wir die Methoden nur für Hauptblöcke anzuwenden haben. Die irreduziblen kN-Moduln im Hauptblock sind gerade die Moduln mit Charakter α^i, $1 \leq i \leq e$. Für α^i schreiben wir $1Ai$. Ein beliebiger unzerlegbarer Modul V im Hauptblock von N ist bis auf Isomorphie durch seinen Sockel und seine Länge festgelegt. Hat V die Länge n und den Sockel $1Ai$, so schreiben wir nAi für V.

Wir betrachten im folgenden nur Green-Korrespondenten von Moduln mit trivialer oder mit ko-trivialer Quelle. Diese sind von der Form $1Ai$ beziehungsweise $(\ell^d - 1)Aj$. Ist der Brauerbaum bekannt, dann können die Green-

Korrespondenten der Moduln mit trivialer und ko-trivialer Quelle bestimmt werden, indem die Kanten des Baumes in geeigneter Weise numeriert werden (siehe Section 4.4, insbesondere Lemma 4.4.14 und Remark 4.4.15 in [50]). Wir sagen dann, daß die Kanten des Brauerbaumes gemäß Green-Korrespondenz numeriert sind.

Für die Tensorprodukte zweier solcher Green-Korrespondenten wiederholen wir aus [50, Lemma 4.3.2]:

$$\begin{aligned} 1Ai \otimes 1Aj &= 1A(i+j), \\ (\ell^d - 1)Ai \otimes (\ell^d - 1)Aj &= 1A(i+j-1), \end{aligned} \tag{8.1}$$

wobei modulo e zu rechnen ist.

Bevor wir die Brauerbäume der Ree-Gruppen bestimmen, beweisen wir ein technisches Lemma, welches es ermöglicht, die Methoden aus [50] anzuwenden.

Lemma 8.1.1 *Sei G eine endliche Gruppe vom Lie-Typ, und T ein maximaler Torus von G. Ist ℓ eine Primzahl mit $\ell \mid |T|$ und D eine ℓ-Sylowgruppe von T, so daß jedes nichttriviale Element von D regulär ist, dann ist D eine TI-Menge.*

Beweis: Sei $g \in G$ und $1 \neq t \in D \cap D^g$. Dann ist $T^g = C_G(D)^g = C_G(D^g) \leq C_G(t) = T$, also $T^g = T$. Da D eine ℓ-Sylowgruppe von T ist, folgt auch $D^g = D$. ∎

8.2 Die Brauerbäume von ${}^2G_2(q^2)$

In diesem Abschnitt sei $G = {}^2G_2(q^2)$ mit $q^2 = 3^{2n+1}$, $n \geq 0$. Die im folgenden aufgezählten Eigenschaften von G finden sich in Wards Arbeit [92] bewiesen. Die Bezeichnungen für die maximalen Tori seien wie in Anhang D. Zunächst stellen wir einige Aussagen über die halbeinfachen Elemente von G, deren Zentralisatoren und Normalisatoren zusammen.

Lemma 8.2.1 (a) *T_2 enthält genau 3 Involutionen $\{u, u', uu'\}$, die in G alle konjugiert sind. Dies sind die einzigen nichttrivialen irregulären halbeinfachen Elemente in $\cup_{i=1}^4 T_i$.*

(b) *Für die Durchschnitte der maximalen Tori haben wir:*

$$T_i \cap T_j = \begin{cases} \langle u \rangle, & \text{falls } \{i,j\} = \{1,2\}, \\ \langle 1 \rangle, & \text{falls } i \neq j, \quad \text{und } \{i,j\} \neq \{1,2\}. \end{cases}$$

∎

Lemma 8.2.2 (a) *Wir haben die folgenden Zentralisatoren:*

$$
\begin{array}{rcll}
C_G(t_1) & = & T_1, & \text{für alle } t_1 \in T_1 \setminus \langle u \rangle, \\
C_G(t_2) & = & T_2, & \text{für alle } t_2 \in T_2 \setminus \langle u, u' \rangle, \\
C_G(t_3) & = & T_3, & \text{für alle } 1 \neq t_3 \in T_3, \\
C_G(t_4) & = & T_4, & \text{für alle } 1 \neq t_4 \in T_4, \\
C_G(u) & = & \langle u \rangle \times PSL_2(q^2). &
\end{array}
$$

(b) *Wir haben die folgenden Normalisatoren:*

$$
\begin{array}{rcll}
N_G(\langle t_1 \rangle) & = & T_1 : \mathbb{Z}_2, & \text{für alle } t_1 \in T_1 \setminus \langle u \rangle, \\
N_G(\langle t_2 \rangle) & = & T_2 : \mathbb{Z}_6, & \text{für alle } t_2 \in T_2 \setminus \langle u, u' \rangle, \\
N_G(\langle t_3 \rangle) & = & T_3 : \mathbb{Z}_6, & \text{für alle } 1 \neq t_3 \in T_3, \\
N_G(\langle t_4 \rangle) & = & T_4 : \mathbb{Z}_6, & \text{für alle } 1 \neq t_4 \in T_4.
\end{array}
$$

■

Als nächstes vergleichen wir Wards Bezeichnung der Charaktere mit Lusztigs Jordan-Zerlegung von Charakteren.

Lemma 8.2.3 (a) *Wir haben die folgenden unipotenten Charaktere in G:*

Bez.	Wards Bez.	Grad	Bemerkung
ξ_1	ζ_1	1	$\mathbf{1}_G$
ξ_2	ζ_3	q^6	St_G
ξ_3	ζ_9	$\frac{1}{\sqrt{3}}q(q^2-1)(q^2+1)$	$\xi_3 = \bar{\xi}_4$
ξ_4	ζ_{10}	$\frac{1}{\sqrt{3}}q(q^2-1)(q^2+1)$	
ξ_5	ζ_6	$\frac{1}{2\sqrt{3}}q(q^2-1)(q^2-\sqrt{3}q+1)$	$\xi_5 = \bar{\xi}_6$
ξ_6	ζ_8	$\frac{1}{2\sqrt{3}}q(q^2-1)(q^2-\sqrt{3}q+1)$	
ξ_7	ζ_5	$\frac{1}{2\sqrt{3}}q(q^2-1)(q^2+\sqrt{3}q+1)$	$\xi_7 = \bar{\xi}_8$
ξ_8	ζ_7	$\frac{1}{2\sqrt{3}}q(q^2-1)(q^2+\sqrt{3}q+1)$	

(b) *Wir haben zwei irreduzible Charaktere:*

Bez.	Wards Bez.	Grad
$\chi_{u,1}$	ζ_2	$(q^2+\sqrt{3}q+1)(q^2-\sqrt{3}q+1)$
χ_{u,q^2}	ζ_4	$q^2(q^2+\sqrt{3}q+1)(q^2-\sqrt{3}q+1)$

(c) *Die übrigen irreduziblen Charaktere sind bis auf Vorzeichen Deligne–Lusztig-Charaktere. Schreiben wir $T_1 = \langle u\rangle \times T_1'$ und $T_2 = \langle u, u'\rangle \times T_2'$, dann haben wir im einzelnen:*

Bez.	Wards Bez.	Grad	Parameter	Anzahl
χ_{t_1}	η_r	$(q^2+1)(q^4-q^2+1)$	$t_1 \in T_1' \setminus \{1\}$	$\frac{1}{4}(q^2-3)$
χ_{ut_1}	η_r'	$(q^2+1)(q^4-q^2+1)$	$t_1 \in T_1' \setminus \{1\}$	$\frac{1}{4}(q^2-3)$
χ_{t_2}	η_t	$(q^2-1)(q^4-q^2+1)$	$t_2 \in T_2' \setminus \{1\}$	$\frac{1}{24}(q^2-3)$
χ_{ut_2}	η_t'	$(q^2-1)(q^4-q^2+1)$	$t_2 \in T_2' \setminus \{1\}$	$\frac{1}{8}(q^2-3)$
χ_{t_3}	η_i^+	$(q^4-1)(q^2-\sqrt{3}q+1)$	$t_3 \in T_3 \setminus \{1\}$	$\frac{1}{6}(q^2+\sqrt{3}q)$
χ_{t_4}	η_i^-	$(q^4-1)(q^2+\sqrt{3}q+1)$	$t_4 \in T_4 \setminus \{1\}$	$\frac{1}{6}(q^2-\sqrt{3}q)$

Zur Abkürzung ist dabei $\chi_t = \chi_{t,1}$ gesetzt. ■

Bevor wir nun die Beweise für die Brauerbäume von G erbringen, führen wir noch die folgende nützliche Notation ein:

$$\mathcal{E}_\ell(G,s)' = \mathcal{E}_\ell(G,s) \setminus \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \chi \text{ hat } \ell\text{-Defekt } 0\}.$$

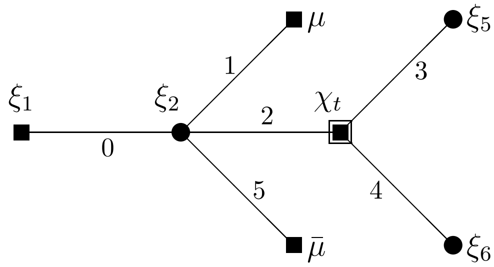
Damit ist es nun sehr leicht, für ungerades $\ell \neq 3$ die Blockeinteilung der Charaktere vorzunehmen: Die Defektgruppe ist in jedem Fall zyklisch, aus der Kenntnis ihres Normalisators folgt die Anzahl der irreduziblen gewöhnlichen und Brauercharaktere im Block. Man kann nun mit Hilfe der Charaktertafel einsehen, daß $\mathcal{E}_\ell(G,s)'$ in jedem Fall ein ℓ-Block ist. Wir bestimmen nun die Brauerbäume in den nichttrivialen Fällen.

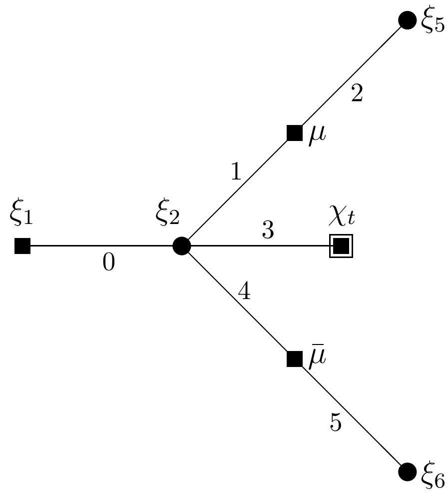
Beweis von Satz D.2.1: Aus einem Satz von Humphreys [55] folgt, daß es keine 3-Blöcke mit zyklischer Defektgruppe gibt. Die 2-Sylowgruppe von G ist elementarabelsch von der Ordnung 8. Eine zyklische Defektgruppe ist also zu $\langle u\rangle$ konjugiert. Dies ist eine 2-Sylowgruppe von T_1. Für ungerades ℓ gibt es nichts zu beweisen. ■

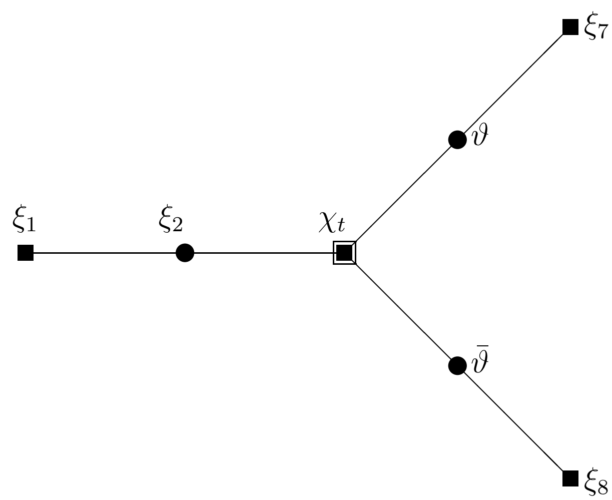
Beweis von Satz D.2.3: Die Typen der nicht-exzeptionellen Charaktere sind wie folgt:

Charakter:	ξ_1	ξ_2	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8
Typ:	■	●	●	●	■	■

Da nur Charaktere verschiedenen Typs verbunden sein können, haben wir für den Brauerbaum nur die folgenden drei Möglichkeiten:







Dabei ist $\mu \in \{\xi_7, \xi_8\}$ und $\vartheta \in \{\xi_5, \xi_6\}$. Der letze Fall scheidet sofort wegen $\xi_7(1) > \vartheta(1)$ aus. Die Kanten der ersten beiden möglichen Bäume sind schon gemäß Green-Korrespondenz wie in [50, Section 4.4] numeriert. Angenommen, der zweite Fall ist richtig. Dann hat ξ_5 den Green-Korrespondenten $(\ell^d - 1)A2$. Der Green-Korrespondent von $\xi_5 \otimes \xi_5$ ist dann $1A3$ nach (8.1). Der einzige Knoten vom Typ Kreuz an einer Kante mit Nummer 3 ist der exzeptionelle.

Es folgt, daß

$$\xi_5 \otimes \xi_5 - \sum_{(t) \in D^\#} \chi_t \tag{8.2}$$

der Charakter eines projektiven Moduls ist. Wir haben die folgenden Skalarprodukte von $\xi_5 \otimes \xi_5$ mit den nicht-exzeptionellen Charakteren im Block:

χ	ξ_2	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8
$\langle \xi_5 \otimes \xi_5, \chi \rangle$	$\frac{1}{4}(\frac{1}{\sqrt{3}}q-1)^2$	0	$\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}q+1)$	0	$\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}q-1)$

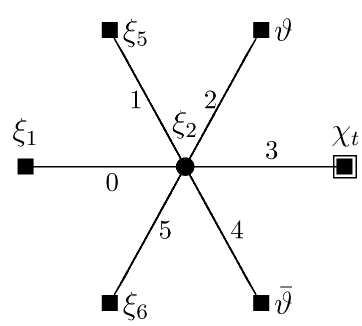
Die obigen Skalarprodukte, sowie die weiter unten verwendeten, wurden von M. Geck ausgerechnet. Nach der Form des Baumes ist ξ_6 ein Blatt, d.h. ein Knoten am Ende des Baumes, welches zu ξ_7 oder ξ_8 verbunden ist. Dies ist ein Widerspruch, denn in (8.2) kommt ξ_6 stets häufiger vor als ξ_7, oder ξ_8.

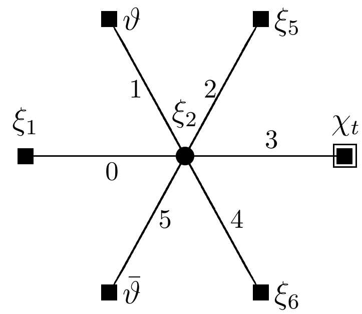
Also ist der erste Baum richtig, und ξ_5 hat den Green-Korrespondenten $(\ell^d - 1)A3$. Dann hat $\xi_5 \otimes \xi_5$ den Green-Korrespondenten $1A5$. Der einzige Knoten vom Typ Kreuz an der Kante mit der Nummer 5 ist $\bar{\mu}$. Es folgt, daß

$$\xi_5 \otimes \xi_5 - \bar{\mu}$$

der Charakter eines projektiven Moduls ist. Da ξ_7 in $\xi_5 \otimes \xi_5$ gar nicht vorkommt, ist $\bar{\mu} = \xi_8$. Damit ist auch die planare Einbettung des Brauerbaumes festgelegt. ∎

Beweis von Satz D.2.4: Die Form des Brauerbaumes des Hauptblockes folgt aus der Tatsache, daß alle nicht-exzeptionellen Charaktere außer ξ_2, dem Steinberg-Charakter, vom Typ Kreuz sind. Für die Einbettung jedoch gibt es die folgenden Möglichkeiten:





mit $\vartheta \in \{\xi_3, \xi_4\}$. Die Kanten der beiden möglichen Brauerbäume sind wieder wie oben gemäß der Green-Korrespondenz durchnumeriert. Im ersten Fall hat ξ_5 den Green-Korrespondenten $1A1$. Also hat $\xi_5 \otimes \xi_5$ den Green-Korrespondenten $1A2$. Daraus folgt, daß

$$\xi_5 \otimes \xi_5 - \vartheta$$

der Charakter eines projektiven Moduls ist. Es ist jedoch

$$\langle \xi_5 \otimes \xi_5, \xi_3 \rangle = 0 = \langle \xi_5 \otimes \xi_5, \xi_4 \rangle,$$

d.h. weder ξ_3 noch ξ_4 kommt in $\xi_5 \otimes \xi_5$ vor. Dieser Widerspruch zeigt, daß der zweite Baum richtig ist. Wegen $\langle \xi_3 \otimes \xi_3, \xi_5 \rangle = 0$ muß $\vartheta = \xi_4$ sein. (Zur Beruhigung: $\langle \xi_4 \otimes \xi_4, \xi_5 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} q$.) ■

Beweis von Satz D.2.5: Die Form des Brauerbaumes des Hauptblockes folgt aus der Tatsache, daß alle nicht-exzeptionellen Charaktere außer ξ_1, dem trivialen Charakter, vom Typ Kringel sind. Die Einbettung kann in diesem Fall nicht bestimmt werden. ■

8.3 Die Brauerbäume von $^2F_4(q^2)$

In diesem Abschnitt sei schließlich $G = {}^2F_4(q^2)$, $q^2 = 2^{2n+1}$, $n \geq 0$. Wir geben zunächst den Permutationscharakter auf den Nebenklassen der Borelgruppe an.

Lemma 8.3.1 *Sei B die Boreluntergruppe G. Dann gilt:*

$$\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1}) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + 2\xi_9 + 2\xi_{10} + 2\xi_{11}.$$

■

Der Hilfssatz D.3.1 über die Primteiler von $|G|$ ist klar, und die Aussagen von Lemma D.3.2 folgen leicht aus [85, Table IV] und [69, Proposition 1.3].

Beweis von Satz D.3.3: Sei $D = \langle t \rangle$ die Defektgruppe eines ℓ-Blockes. Zunächst ist wieder nach dem Satz von Humphreys [55] die Charakteristik $\ell \neq 2$. Wir unterscheiden zwei Fälle nach der Struktur des Zentralisators von t.

Fall I: $C_G(t) = T$ ist ein maximaler Torus.

Lemma 8.3.2 *Unter den obigen Voraussetzungen ist T aus $\{T_9, T_{10}, T_{11}\}$. Weiter ist D eine ℓ-Sylowgruppe von T und eine TI-Menge.*

Beweis: Die abelsche Gruppe T/D hat nur für $\ell \not| |T/D|$ Defekt 0 Charaktere. Also ist D eine ℓ-Sylowgruppe von T. Ist T nicht zyklisch, dann ist T von der Gestalt $T = S \times S$, und D kann als Sylowgruppe davon nicht zyklisch sein.

Angenommen, $T = T_i$ mit $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Dann ist $T = T_{i1} \times T_{i2}$ mit $\mathrm{ggT}(|T_{i1}|, |T_{i2}|) = 1$. Wegen $|t| = \ell^d$ folgt aus $t \in T$, daß $t \in T_{i1}$ oder $t \in T_{i2}$ ist. In jedem dieser Fälle ist die ℓ-Sylowgruppe von G zwar abelsch, aber nicht zyklisch. Also kann auch $C_G(t)$ nicht zyklisch sein. Es folgt $T \in \{T_9, T_{10}, T_{11}\}$. Nach Veldkamp [91, Proposition 4] ist jedes nichttriviale Element von T regulär. Aus Lemma 8.1.1 folgt schließlich, daß D eine TI-Menge ist. ∎

Fall II: $C_G(t)$ ist kein maximaler Torus.

Verwenden wir die Bezeichnungen von Shinoda für die halbeinfachen Elemente von G, dann folgt aus [85, Table IV], daß t von einem der Typen t_1, t_2, t_4, t_5, t_7 oder t_9 ist. Diese Elemente haben die folgenden Zentralisatoren:

$$\begin{aligned}
C_G(t_1) &= \mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathrm{Suz}(q^2), \\
C_G(t_2) &= \mathbb{Z}_{q^2-1} \times SL_2(q^2), \\
C_G(t_4) &= SU_3(q^4), \\
C_G(t_5) &= \mathbb{Z}_{q^2+1} \times SL_2(q^2), \\
C_G(t_7) &= \mathbb{Z}_{q^2-\sqrt{2}q+1} \times \mathrm{Suz}(q^2), \\
C_G(t_9) &= \mathbb{Z}_{q^2+\sqrt{2}q+1} \times \mathrm{Suz}(q^2).
\end{aligned}$$

Damit es überhaupt Blöcke mit Defektgruppe D gibt, muß in jedem dieser Fälle D eine ℓ-Sylowgruppe von $\langle t_i \rangle$ sein. Die Struktur von $N_G(D)$ folgt aus [69, Proposition 1.3]. Damit ist der Beweis von Satz D.3.3 erbracht. ∎

Beweis von Lemma D.3.4: Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(A)$. Dann ist $\chi(1)_\ell = |G : D|_\ell$. Ist $\chi = \chi_{v,\lambda}$ mit einem halbeinfachen Element v und einem unipotenten Charakter λ von $C_G(v)$, so haben wir $\chi(1) = \lambda(1)|G : C_G(v)|_{p'}$. Wir betrachten zunächst den Fall $\ell \not| \lambda(1)$. Dann gilt:

$$|D|_\ell = |C_G(v)|_\ell. \tag{8.3}$$

Sei T ein zyklischer Torus von G mit $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T)$. Wegen (8.3) können wir $T \leq C_G(v)$ annehmen. Dann ist $v \in T$.

Sei $v = st_0$ mit $s \in T_{\ell'}$ und $t_0 \in D$. Ist s regulär, dann auch alle st, $t \in D$. In diesem Fall enthält $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ genau die $|D|$ irreduziblen Charaktere $\varepsilon_G\varepsilon_T R_T^G(st)$, $t \in D$. Nach der Basisrelation (4.2) besitzen diese alle die gleiche Einschränkung auf die ℓ-regulären Klassen, liegen also im gleichen Block wie χ. Aufgrund ihrer Anzahl folgt $A = \mathcal{E}_\ell(G,s)$.

Sei nun $s = 1$. Nach Satz D.3.3 und Lemma D.3.2 gilt $|C_G(t)|_3 > |D|_3$ für alle 3-Elemente t und zyklischen 3-Defektgruppen D. Aus (8.3) folgt also $\ell \neq 3$. Da $v = t_0$ in einer ℓ-Sylowgruppe von G liegt, die wegen $\ell \neq 3$ abelsch ist, folgt aus (8.3) in diesem Fall, daß ℓ ein Teiler von $|T_9||T_{10}||T_{11}|$ ist. In T_{10} und T_{11} ist jedes nichttriviale Element regulär, also ist nach dem bisher gezeigten $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ für jedes $s \neq 1$ eine Vereinigung von ℓ-Blöcken. Dann ist auch $\mathcal{E}_\ell(G,1)$ eine solche, die demnach A enthält.

Die irregulären Elemente von T_9 bilden eine Untergruppe der Ordnung 3. Es ist also $A \subseteq \mathcal{E}_\ell(G,1) \cup \mathcal{E}_\ell(G,w)$ mit $w \in T_9$, $|w| = 3$. Es ist $C_G(w) = SU_3(q^4)$. Sei ℓ^d die höchste Potenz von ℓ, die $|T_9|$ teilt. Wir haben $\psi(1) \equiv \pm 2 (\mathrm{mod}\,\ell^d)$ für alle $\psi \in \mathcal{E}(G,w)$ und $\psi(1) \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\,\ell^d)$ für alle $\psi \in \mathcal{E}(G,1)$. Aus Gradgründen folgt nun die Behauptung ([28, Theorem VII.2.16]).

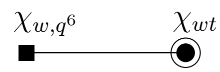
Sei nun $\ell \nmid |T_9||T_{10}||T_{11}|/3$. Wir betrachten nur den Fall $\ell \mid q^2 + \sqrt{2}q + 1$, die anderen werden analog behandelt. Wegen (8.3) ist $C_G(v) = S \times \mathrm{Suz}(q^2)$ mit $|S| = q^2 - 1$ oder $|S| = q^2 - \sqrt{2}q + 1$. Insbesondere ist $1 \neq s \in S$. Für jedes $1 \neq t \in D$ ist st regulär. Damit enthält $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ die 4 irreduziblen Charaktere von $\mathcal{E}(G,s)$, die den 4 unipotenten Charakteren von $\mathrm{Suz}(q^2)$ entsprechen, sowie $(|D|-1)/4$ irreduzible der Form $\varepsilon_G\varepsilon_T R_T^G(st)$. Nach der Basisrelation ist $\check{R}_T^G(st) = \check{R}_T^G(s)$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination der 4 Charaktere aus $\mathcal{E}(G,s)$. Aus der Betrachtung der Koeffizienten ergibt sich sofort, daß $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ auch in diesem Fall ein ℓ-Block ist.

Es bleibt der Fall $\ell \mid \lambda(1)$ zu betrachten. Aus dem bisherigen kennen wir schon alle 3-Blöcke mit zyklischer Defektgruppe. Daraus ersehen wir, daß dieser Fall nur für $\ell > 3$ auftreten kann. Ist $v \neq 1$, dann ist $\ell \mid q^2 - 1$ und $\lambda(1) = q(q^2-1)/\sqrt{2}$. Aus (8.3) und $\mathrm{Suz}(q^2) \leq C_G(v)$ folgt nun $C_G(v) = \mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathrm{Suz}(q^2)$. Sei wieder $v = st_0$. Dann ist $A = \{\chi_{st,\lambda} \mid t \in D\} \leq \mathcal{E}_\ell(G,s) = \{\chi_{st,\lambda} \mid t \in D\} \cup \{\chi_{st,\bar{\lambda}} \mid t \in D\}$. Im Fall $v = 1$ ist λ ein unipotenter Charakter von G. Aus der Kenntnis der Grade und $\ell \neq 3$ folgt wieder $\ell \mid q^2-1$, und daß λ in der Harish-Chandra-Induktion eines der Charaktere vom Grad $q(q^2-1)/\sqrt{2}$ der Suzuki-Gruppe vorkommt. Dies führt sofort wieder zum eben behandelten Fall für $s = 1$. Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

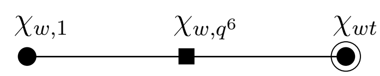
Mit ähnlichen Argumenten kann gezeigt werden, daß ein Block A mit nicht notwendig zyklischer Defektgruppe in einer der Mengen $\mathcal{E}_\ell(G,s)$ liegt. Insbesondere gilt auch für $^2F_4(2^{2m+1})$ der Satz 4.2.2.

Beweis von Satz D.3.11: Wir betrachten zuerst den Block B_w. Dieser hat die nicht-exzeptionellen Charaktere $\chi_{w,1}$, $\chi_{w,q^2(q^2-1)}$ und χ_{w,q^6} sowie die exzeptionellen χ_{wt}, $t \in D^\#$. Daraus folgt natürlich sofort, daß der Brauerbaum ein Stamm ist. Der reguläre Charakter in $\mathcal{E}(G,w)$ ist χ_{w,q^6}. Wegen

$\chi_{w,q^6}(1) \equiv 2(\operatorname{mod}\ell)$, ist dieser vom Typ Kreuz. Nach Satz 4.6.5 ist er mit dem exzeptionellen Knoten verbunden, und wir erhalten den folgenden Teilbaum:



Um die restlichen Knoten festzulegen, betrachten wir die parabolische Untergruppe P_a. Diese hat ein Levi-Komplement isomorph zu $GL_2(q^2)$. Da $C_G(w)$ den maximalen Torus T_2 enthält, können wir annehmen, daß w in T_2 liegt. Nun ist T_2 ein maximaler Torus von $GL_2(q^2)$, und es existiert genau ein irreduzibler, kuspidaler Charakter μ vom Grad q^2-1, der auf w einen ganzen Wert, nämlich -2, annimmt. Es bezeichne $\tilde{\mu}$ die Inflation von μ auf P_a. Dann ist $\operatorname{Ind}_{P_a}^G(\tilde{\mu}) = \chi_{w,1} + \chi_{w,q^6}$. Da dies nach Lemma 4.4.3 ein projektiver Charakter ist, folgt der Teilbaum:



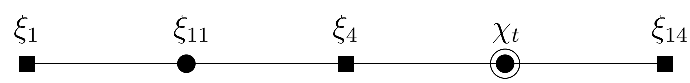
Aus Gradgründen kann schließlich $\chi_{w,q^2(q^2-1)}$ nur noch am exzeptionellen Knoten sitzen, wodurch der Brauerbaum festgelegt ist.

Es muß noch der Beweis für den Brauerbaum des Hauptblockes erbracht werden. Zunächst zählen wir die nicht-exzeptionellen Charaktere und deren Typen auf:

Charakter:	ξ_1	ξ_4	ξ_{11}	ξ_{14}	ξ_{19}	ξ_{20}
Typ:	■	■	●	■	●	●

Der Typ von ξ ergibt sich, indem wir die Kongruenz von $\xi(1)$ modulo $|T_9| = q^4 - q^2 + 1$ betrachten.

Nach Lemma 8.3.1 ist $\xi_1 + \xi_4 + 2\xi_{11}$ der Charakter eines projektiven Moduls. Nach Korollar 4.6.6 ist ξ_4 zum Knoten χ_t verbunden. Der unipotente Charakter ξ_{14} liegt auf dem reellen Stamm, denn er ist der einzige seines Grades im Block. Wir erhalten damit den folgenden Teilbaum:



Die unipotenten ξ_{19} und ξ_{20} sind vom Typ Kringel, können also nicht beide auf dem reellen Stamm liegen. Also sind sie komplex konjugiert und sitzen an ξ_4 oder ξ_{14}. Wir haben

$$\begin{aligned}\xi_{14}(1) - \xi_{19}(1) - \xi_{20}(1) &= \\ -\frac{1}{2}q^{20} - \frac{1}{2}q^{16} + 2q^{12} - \frac{1}{2}q^8 - \frac{1}{2}q^4 &< \\ -\frac{1}{2}q^{20} + 2q^{12} &= \\ q^{12}(2 - \frac{1}{2}q^8) &< 0.\end{aligned}$$

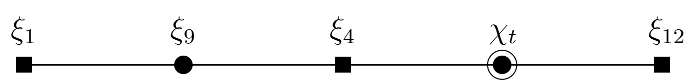
Also sind beide zu ξ_4 verbunden, und der Beweis ist vollständig. ■

Beweis von Satz D.3.12: Wir haben die folgenden nicht-exzeptionellen Charaktere im Hauptblock:

Charakter:	ξ_1	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{12}	ξ_{17}	ξ_{18}	ξ_{19}	ξ_{20}
Typ:	■	■	●	●	■	■	●	■	■	■	■	■

Die Typen der Charaktere wurden mittels der Kongruenz ihres Grades modulo $|T_{10}|$ bestimmt.

Nach Lemma 8.3.1 ist $\xi_1+\xi_4+2\xi_9$ der Charakter eines projektiven Moduls. Der Steinberg-Charakter sitzt wegen Satz 4.6.6 an χ_t. Die vier Paare (ξ_5, ξ_6), (ξ_7, ξ_8), (ξ_{17}, ξ_{18}), und (ξ_{19}, ξ_{20}) sind jeweils auf ℓ'-Klassen komplex konjugiert (siehe [70]). Es ergibt sich der reelle Stamm des Baumes zu:

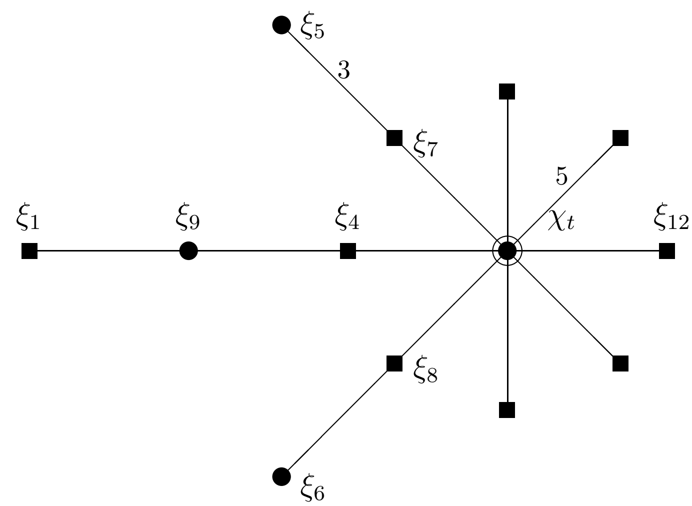


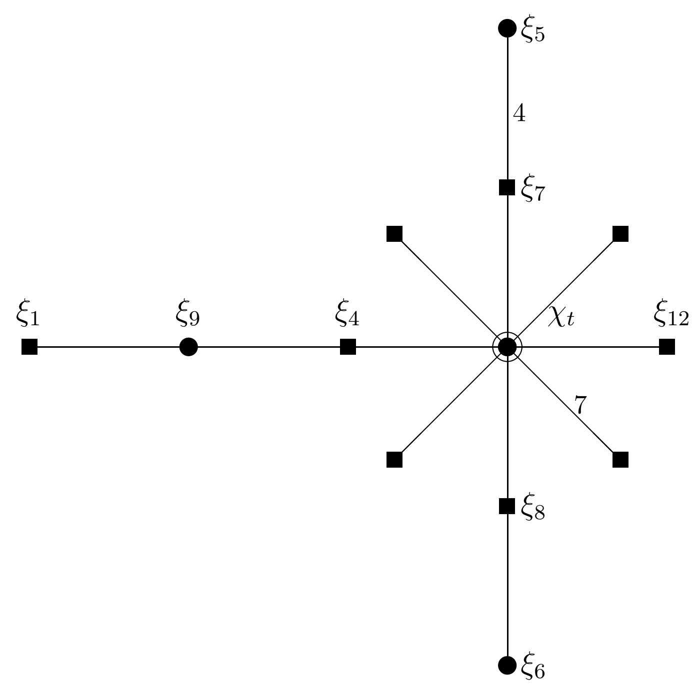
Sei μ derjenige kuspidale unipotente Charakter von $\mathrm{Suz}(q^2)$, der im Buch von Carter mit $^2B_2[a]$ und oben mit ξ_3 bezeichnet wird. Die Harish-Chandra-Induktion von μ liefert den projektiven Charakter $\xi_5 + \xi_7$, diejenige von $\bar{\mu}$ den projektiven $\xi_6 + \xi_8$. Von den Charakteren, die noch nicht festgelegt sind, haben außer ξ_5 und ξ_6 alle den Typ Kreuz. Da der Grad von ξ_5 kleiner ist als der Grad jedes dieser Charaktere vom Typ Kreuz, ist ξ_5, und damit natürlich auch ξ_6, ein Endknoten.

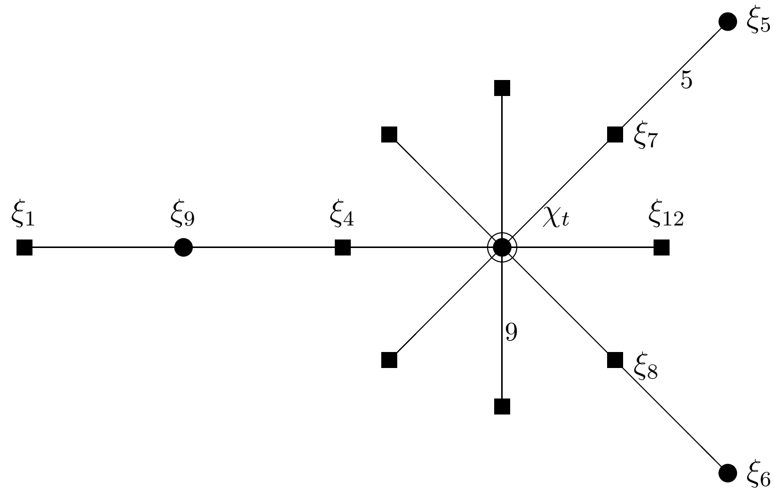
Jeder der Knoten ξ_7, ξ_{17} und ξ_{19} ist damit verbunden zu ξ_9 oder zu χ_t. Es ist jedoch:

$$\begin{aligned}\xi_9(1) - (\xi_7(1) - \xi_5(1)) &< 0, \\ \xi_9(1) - \xi_{17}(1) &< 0, \\ \xi_9(1) - \xi_{19}(1) &< 0.\end{aligned}$$

Damit sind alle diese Knoten mit χ_t verbunden. Nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, daß ξ_5 in der oberen Hälfte des Baumes lokalisiert ist, dann gibt es nur die folgenden drei möglichen Formen für den Baum:







Die Kanten dieser Bäume sind gemäß der Green-Korrespondenz numeriert. Dabei haben wir nur diejenigen Kanten wirklich mit einer Nummer versehen, die im folgenden Argument gebraucht werden. Der Leser möge als Übung die Numerierung der Kanten vervollständigen.

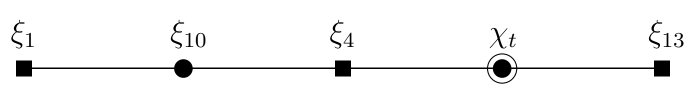
Die Kante zu ξ_5 hat eine der Nummern 3, 4 oder 5, entsprechend den drei Möglichkeiten. Der Green-Korrespondent des entsprechenden einfachen Moduls ist also $(\ell^d - 1)Ai$ mit $i \in \{3, 4, 5\}$. Nun ist $(\ell^d - 1)Ai \otimes (\ell^d - 1)Ai = 1A(2i - 1)$. Auf der anderen Seite ist $\xi_5 \otimes \xi_5 = \xi_{17} +$ (Charaktere anderer Blöcke). Die hier und im folgenden benutzten Skalarprodukte wurden von G. Malle ausgerechnet. Es folgt, daß ξ_{17} an einer Kante mit der Nummer 5, 7 oder 9 liegt. Dies bestimmt in jeder der drei Möglichkeiten die Einbettung bis auf die Reihenfolge von ξ_{19} und ξ_{20}. Diese haben jedoch ihre Irrationalitäten in einem Körper, der disjunkt zu denjenigen ist, der die Irrationalitäten der anderen Charaktere enthält. Wir können also ihre Reihenfolge beliebig festlegen. ■

Beweis von Satz D.3.13: Wir haben die folgenden nicht-exzeptionellen Charaktere im Hauptblock:

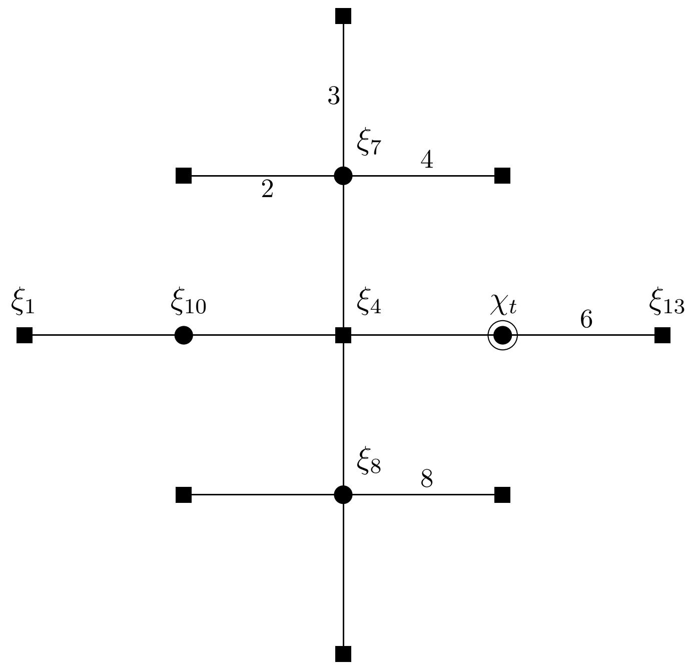
Charakter:	ξ_1	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_{10}	ξ_{13}	ξ_{15}	ξ_{16}	ξ_{19}	ξ_{20}
Typ:	■	■	■	■	●	●	●	■	■	■	■	■

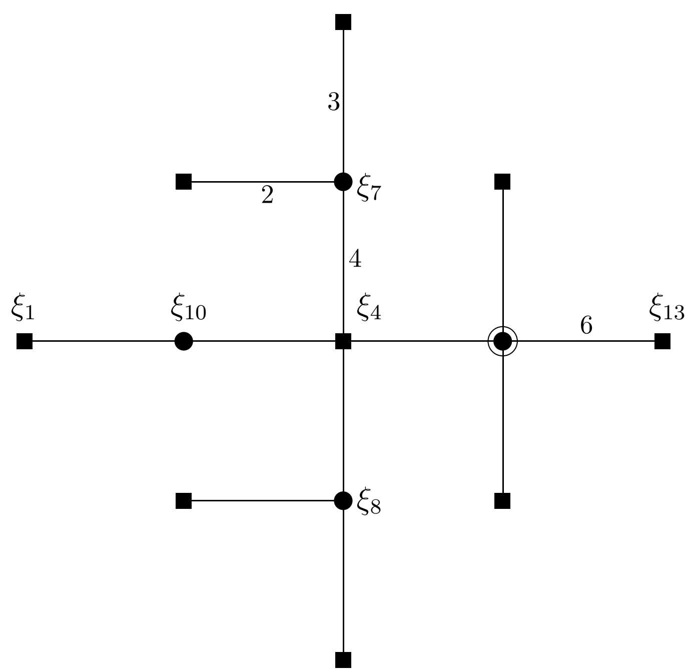
Wieder wurden die Typen der Charaktere mittels der Kongruenz ihres Grades modulo $|T_{11}|$ bestimmt.

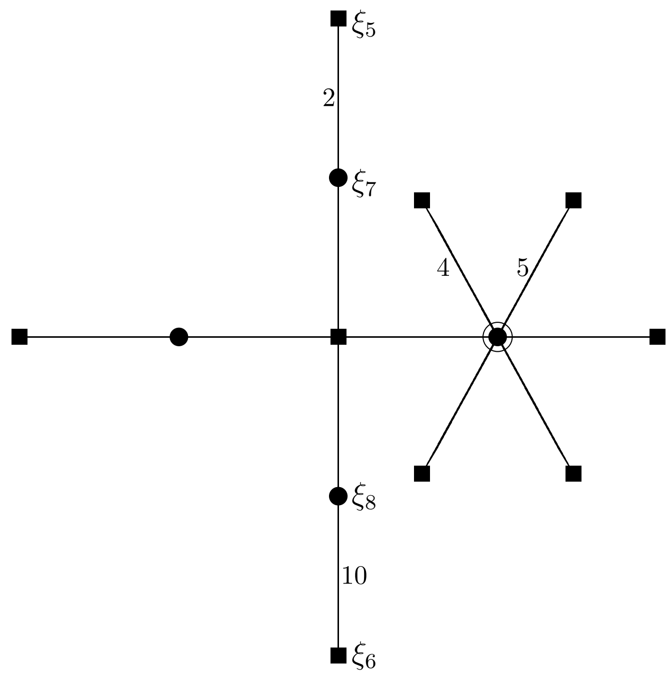
Nach Lemma 8.3.1 ist $\xi_1+\xi_4+2\xi_{10}$ der Charakter eines projektiven Moduls. Der Steinberg-Charakter sitzt wegen Satz 4.6.6 an χ_t. Die vier Paare (ξ_5, ξ_6), (ξ_7, ξ_8), (ξ_{15}, ξ_{16}), und (ξ_{19}, ξ_{20}) sind jeweils auf ℓ'-Klassen komplex konjugiert [70]. Es ergibt sich der reelle Stamm des Baumes zu:



Wir haben auch hier wieder die beiden Projektiven $\xi_5 + \xi_7$ und $\xi_6 + \xi_8$. Aus Gradgründen sind ξ_7 und ξ_8 mit ξ_4 verbunden. Ebenso aus Gradgründen sitzen weder ξ_{15} noch ξ_{19} an ξ_{10}. Daraus ergeben sich nur die folgenden drei möglichen Formen für den Baum:







Wir haben wieder diejenigen Kanten gemäß Green-Korrespondenz numeriert, die für die folgenden Argumente von Bedeutung sind. Wir haben zunächst:

$$\xi_5 \otimes \xi_5 = \xi_{15} + \text{ Charaktere anderer Blöcke.}$$

Der Green-Korrespondent von ξ_5 ist im dritten Fall $1A2$. Aus $1A2 \otimes 1A2 = 1A4$ folgt, daß ξ_{15} an der Kante mit Nummer 4 sitzen muß. Dann ist entweder ξ_{19} oder ξ_{20} an der Kante mit Nummer 5. Aus $1A5 \otimes 1A5 = 1A10$ folgt nun, daß ξ_6 in einem der Tensorprodukte $\xi_{19} \otimes \xi_{19}$ oder $\xi_{20} \otimes \xi_{20}$ vorkommt. Es ist jedoch $\langle (\xi_{19} + \xi_{20}) \otimes (\xi_{19} + \xi_{20}), \xi_6 \rangle = 0$. Dieser Widerspruch schließt den dritten Fall aus.

Im zweiten Fall ist der Green-Korrespondent von ξ_5 entweder $1A2$ oder $1A3$. Dann müßte ξ_{15} an einer Kante mit der Nummer 4 oder 6 sitzen. Da weder das eine noch das andere der Fall ist, ist auch diese zweite Möglichkeit ausgeschlossen.

Sei im ersten Fall $1Ai$, $i \in \{2, 3, 4\}$ der Green-Korrespondent von ξ_5. Dann ist $1A2i$ der Green-Korrespondent von ξ_{15}. Dies schließt die Möglichkeit $i = 3$ aus. Aber auch $i = 4$ ist unmöglich, weil dann an Kante 8 sowohl ξ_{15} als auch ξ_6, als komplex konjugierter von ξ_5, sitzen müssen. Disjunkte Irrationalitäten erlauben die Wahl der Reihenfolge von ξ_{19} und ξ_{20}. Damit ist der eingebettete Brauerbaum vollständig bestimmt. ∎

Kapitel 9

Anwendungen und weitere Beispiele

In diesem Kapitel gebe ich zunächst in der $G_2(q)$ ein Beispiel für eine Isotypie zweier Blöcke. Damit wird für diesen Fall eine Vermutung von Broué bestätigt.

Danach werde ich drei Anwendungen der in der vorliegenden Arbeit bestimmten Zerlegungsmatrizen aufzeigen. Zunächst werden die minimalen Grade treuer Darstellungen der $G_2(q)$ bestimmt. Diese Grade in Charakteristik 3 spielen eine Rolle in einer Arbeit von Kleidman und Liebeck [60], in der sie eine von Feit und Tits begonnene Untersuchung abschließen.

Danach weise ich nach, daß in der $G_2(q)$ die Alperin–McKay- und die Brauersche Höhenvermutung erfüllt sind.

Schließlich betrachte ich eine spezielle Geometrie, das Reesche Unital, auf dem die Ree-Gruppe ${}^2G_2(q^2)$ als Automorphismengruppe operiert. Unter Benutzung der Brauerbäume, sowie Ergebnissen von Landrock und Michler über die 2-modularen Darstellungen dieser Gruppe, können die ℓ-Ränge der Inzidenzmatrix dieser Geometrie für jede Primzahl ℓ bestimmt werden.

9.1 Beispiel einer Isotypie

Beim Betrachten der Zerlegungsmatrizen des Hauptblockes von $G = G_2(q)$ fällt auf, daß diese in den beiden Fällen $\ell \mid q-1$, $\ell \neq 2,3$ und $\ell \mid q+1$, $\ell \neq 2,3$ gewisse Gemeinsamkeiten aufweisen. So stimmen etwa die Anzahl der irreduziblen Brauercharaktere und die Anzahl der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere überein. Die Anzahl der exzeptionellen Familien ist die gleiche, und die Familien können einander so zugeordnet werden, daß entsprechende Familien die gleiche Anzahl von Charakteren enthalten. Sieht man etwas genauer hin, so erkennt man auch, daß die beiden Zerlegungsmatrizen durch elementare Matrixoperationen ineinander übergeführt werden können. Diese Ähnlichkeit wird zum Teil dadurch erklärt, daß jeder dieser Blöcke von gleichem Typ ist wie sein Brauer-Korrespondent im Normalisator der Defektgruppe. Dies wollen wir im folgenden für den Fall $\ell \mid q+1$ etwas genauer ausführen, und bei dieser Gelegenheit auch den Begriff der Isotypie erklären.

Sei also $\ell \mid q+1$, $\ell \neq 2, 3$. Sei $T = \mathcal{H}_2$ der maximale Torus der Ordnung $(q+1)^2$, und D eine ℓ-Sylowgruppe von T. Dann ist D eine Defektgruppe des Hauptblockes B_1. Die Ordnung von D sei ℓ^{2d}. Sei $M = N_G(D)$, und b_1 der Hauptblock von M. In [3, CONJECTURE 6.1] äußert Broué die Vermutung, daß in der vorliegenden Situation die Blöcke B_1 und b_1 isotypisch sind. Dies soll nun nachgerechnet werden. Da isotypische Blöcke perfekt isometrisch sind, ergäbe sich hieraus ein Beweis der Brauerschen Höhenvermutung für diese Blöcke. Die Idee, die Höhenvermutung mittels Isotypien bzw. perfekter Isometrien nachzuweisen, wurde zum erstenmal von Broué geäußert.

Sei (K, R, k) ein ℓ-modulares Zerfällungssystem für G. Für jedes Element $x \in D$ seien e_x bzw. f_x die Blockidempotente der Hauptblöcke von $RC_G(x)$ bzw. $RC_M(x)$. Mit $d_G^{(x,e_x)}$ wird die verallgemeinerte Zerlegungsabbildung $\mathcal{C}(G, e_1, K) \to \mathcal{C}_{\ell'}(C_G(x), e_x, K)$ bezeichnet. Nach den beiden Bemerkungen 1 in den Abschnitten 4B und 4C von [3] sind B_1 und b_1 genau dann isotypisch wenn eine Isometrie $I : \mathcal{R}_K(M, f_1) \to \mathcal{R}_K(G, e_1)$ und eine Familie von perfekten Isometrien

$$\{I^x : \mathcal{R}_K(C_M(x), f_x) \to \mathcal{R}_K(C_G(x), e_x)\}_{\{\{1\} \neq \langle x \rangle \subseteq D\}}$$

existiert, so daß für alle $1 \neq \langle x \rangle \subseteq D$ gilt:

$$d_G^{(x,e_x)} \circ I = I_{\ell'}^x \circ d_M^{(x,f_x)}. \tag{9.1}$$

In dieser Bedingung steht $I_{\ell'}^x$ für die lineare Abbildung

$$I_{\ell'}^x : \mathcal{C}_{\ell'}(C_M(x), f_x, K) \to \mathcal{C}_{\ell'}(C_G(x), e_x, K),$$

die nach Proposition 2.3.2 induziert wird. Sind B_1 und b_1 isotypisch vermöge I, dann ist I eine perfekte Isometrie ([3, PROPOSITION 4.5]).

Die Bezeichnungen in den folgenden Ausführungen folgen denen im Anhang B. Wir haben drei Typen von Elementen aus D zu betrachten: Reguläre Elemente vom Typ h_2 und irreguläre der Typen h_{2a} und h_{2b}. Ist x vom Typ h_2, dann ist $C_G(x) = C_M(x) = T$. In diesem Fall setzen wir $I^x = I^{(2)} = id$.

Als nächstes betrachten wir den Fall, daß x vom Typ h_{2a} ist. Dann setzen wir $C_{2a} = C_G(x) \cong U_2(q^2)$, und $M_{2a} = C_M(x) = T\langle \dot{w}_a \dot{w}_2 \rangle$. Der Hauptblock von C_{2a} besitzt zwei irreduzible Brauercharaktere, den trivialen φ_1 und einen vom Grad $q-1$, der mit φ_{q-1} bezeichnet wird. Der Hauptblock von M_{2a} besitzt die beiden irreduziblen Brauercharaktere α_1, den trivialen, sowie den alternierenden, im folgenden mit $\alpha_{\bar{1}}$ bezeichnet. Die Zerlegungsmatrix des

Hauptblockes von C_{2a} ist wie folgt:

Char.	φ_1	φ_{q-1}	Anzahl
1	1		1
q	1	1	1
$\{1\}$	1		$\ell^d - 1$
$\{q\}$	1	1	$\ell^d - 1$
$\{q-1\}$		1	$\frac{1}{2}\ell^d(\ell^d - 1)$

Es folgt die Zerlegungsmatrix von M_{2a}:

Char.	α_1	$\alpha_{\bar{1}}$	Anzahl
1	1		1
$\bar{1}$		1	1
$\{1\}$	1		$\ell^d - 1$
$\{\bar{1}\}$		1	$\ell^d - 1$
$\{2\}$	1	1	$\frac{1}{2}\ell^d(\ell^d - 1)$

Hierbei steht $\bar{1}$ für gewöhnliche Charaktere von M_{2a} vom Grad 1, die auf dem Element $\dot{w}_a \dot{w}_2$ den Wert -1 haben. Die Zentren von C_{2a} und M_{2a} sind identisch. Sie sind zyklisch von der Ordnung $q+1$. Um die verallgemeinerten Zerlegungszahlen von C_{2a} bzw. M_{2a} bezüglich eines zentralen Elementes y zu erhalten, sind die Einträge obiger Zerlegungsmatrizen mit einer geeigneten Einheitswurzel zu multiplizieren.

Wir definieren nun:

$$I^{(2a)} : \begin{pmatrix} \{1\} \\ \{\bar{1}\} \\ \{2\} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \{1\} \\ -\{q\} \\ -\{(q-1)\} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $I^{(2a)}$ eine perfekte Isometrie. Um dies zu sehen, müssen wir uns zuerst überlegen, wie $I^{(2a)}$ die irreduziblen Brauercharaktere abbildet. Aus den Zerlegungsmatrizen folgt sofort:

$$I^{(2a)}_{\ell'} : \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{\bar{1}} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ -(\varphi_1 + \varphi_{q-1}) \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich erfüllt $I^{(2a)}$ die Gleichungen (9.1) für alle ℓ-Elemente $y \in C_{2a}$. Für zentrale Elemente y setzen wir dabei $I^y = I^{(2a)}$ und für nichtzentrale y sei $I^y = I^{(2)} = id$. Aus [3, PROPOSITION 4.5] folgt, daß $I^{(2a)}$ eine perfekte Isometrie ist, wenn die Menge $\mathcal{C}_{\ell'}(M_{2a}, f_{2a}, R)$ auf $\mathcal{C}_{\ell'}(C_{2a}, e_{2a}, R)$ abgebildet wird. Da $\mathcal{C}_{\ell'}(M_{2a}, f_{2a}, R)$ gerade aus den R-Linearkombinationen der irreduziblen Brauercharaktere (die durch 0 auf die ℓ-singulären Klassen fortgesetzt sind) besteht, ist diese letzte Bedingung trivialerweise erfüllt.

Wir müssen nun eine Isometrie I zwischen den Hauptblöcken von M und von G angeben, so daß die Gleichungen (9.1) für I mit $I^{(2a)}$ und $I^{(2)}$ erfüllt sind. Dazu bestimmen wir zuerst die Charaktertafel von M. Die Operation von W auf D ist im Anhang beschrieben. Um die Charaktertafel des Hauptblockes von M auszurechnen, müssen wir zunächst die Trägheitsgruppen von W auf der Menge der irreduziblen Charaktere von D bestimmen. Es gibt zwei nichttriviale Trägheitsgruppen, nämlich $\langle w_a w_2 \rangle$ und $\langle w_b w_2 \rangle$. Erstere führt zu Paaren von Charakteren vom Grad 6, die mit λ_{2a} bzw. λ'_{2a} bezeichnet werden. Die Charaktere, die zur zweiten Trägheitsgruppe gehören, seien λ_{2b} und λ'_{2b}. (Diese Charaktere von D ergeben die irreduziblen Charaktere X_{2a}, X'_{2a}, bzw. X_{2b}, X'_{2b} im Hauptblock von G.) Die Charaktere der Faktorgruppe W seien wie im Anhang bezeichnet. Schließlich seien λ_2 die Charaktere zur trivialen Trägheitsgruppe.

Es sei nun y ein ℓ-Element aus D vom Typ h_{2a}. Es bezeichne κ eine primitive ℓ^d-te Einheitswurzel ($|D| = \ell^{2d}$), und u einen Parameter für die irreduziblen Charaktere vom Typ λ_{2a}, λ'_{2a} und λ_{2b}, λ'_{2b} aus dem Hauptblock von M. Weiter setzen wir $\kappa_v = \kappa^v + \kappa^{-v}$ für jede ganze Zahl v. Dann sind die verallgemeinerten Zerlegungszahlen von M bezüglich y und dem Hauptblock wie folgt:

Char.	α_1	$\alpha_{\bar{1}}$
$\varphi_{1,0}$	1	
$\varphi_{1,3}{}'$		1
$\varphi_{1,3}{}''$	1	
$\varphi_{2,1}$	1	1
$\varphi_{2,2}$	1	1
$\varphi_{1,6}$		1
$\lambda_{2a}'^{(u)}$	$\kappa_u + \kappa_{2u}$	κ_u
$\lambda_{2a}^{(u)}$	κ_u	$\kappa_u + \kappa_{2u}$
$\lambda_{2b}'^{(u)}$	$\kappa_{3u} + 1$	$\kappa_{3u} + 1$
$\lambda_{2b}^{(u)}$	$\kappa_{3u} + 1$	$\kappa_{3u} + 1$
$\{\lambda_2\}$	$\lambda_2(y)/2$	$\lambda_2(y)/2$

Aus der Charaktertafel von G, die im Anhang angegeben ist, kann man leicht die verallgemeinerten Zerlegungszahlen von G bezüglich y und dem Hauptblock ausrechnen. Mit den gleichen Bezeichnungen wie oben sind diese wie folgt:

Char.	φ_1	φ_{q-1}
X_{11}	1	
X_{13}	1	1
X_{14}	-1	
X_{17}		1
X_{18}		1
X_{12}	-1	-1
$X_{2a}^{\prime(u)}$	$-\kappa_{2u}$	κ_u
$X_{2a}^{(u)}$	$-\kappa_{2u}$	$-\kappa_u - \kappa_{2u}$
$X_{2b}^{\prime(u)}$		$\kappa_{3u} + 1$
$X_{2b}^{(u)}$		$-\kappa_{3u} - 1$
$\{X_2\}$		$-X_2(h_{2a,1})$

Daraus folgt nun leicht, daß die Isometrie

$$I : \begin{pmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi_{1,3}{}' \\ \varphi_{1,3}{}'' \\ \varphi_{2,1} \\ \varphi_{2,2} \\ \varphi_{1,6} \\ \{\lambda'_{2a}\} \\ \{\lambda_{2a}\} \\ \{\lambda'_{2b}\} \\ \{\lambda_{2b}\} \\ \{\lambda_2\} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} X_{11} \\ -X_{13} \\ -X_{14} \\ -X_{17} \\ -X_{18} \\ X_{12} \\ -\{X'_{2a}\} \\ \{X_{2a}\} \\ -\{X'_{2b}\} \\ \{X_{2b}\} \\ \{X_2\} \end{pmatrix}$$

mit den perfekten Isometrien $I^{(2a)}$, $I^{(2b)}$ und $I^{(2)}$ die Gleichungen (9.1) erfüllt (hierbei ist $I^{(2b)}$ analog zu $I^{(2a)}$ definiert). Aus [3, PROPOSITION 4.5] und der Bemerkung 1 nach [3, DÉFINITION 4.6] folgt, daß I eine perfekte Isometrie ist, und eine Isotypie zwischen den ℓ-Hauptblöcken von M und von G induziert. Wir überlassen es dem Leser, die Wirkung von I auf den irreduziblen Brauercharakteren von M zu bestimmen.

9.2 Die minimalen Grade der treuen Darstellungen von $G_2(q)$

Satz 9.2.1 *Sei $G = G_2(q)$ und ℓ eine Primzahl. Wir schreiben g_ℓ für den minimalen Grad einer treuen Darstellung von G über einem Körper der Charakteristik ℓ. Dann gilt:*

(A) *Sei $\ell \mid q$. Dann ist*

$$g_\ell = \begin{cases} 6, & \text{falls } q \text{ gerade,} \\ 7, & \text{falls } q \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(B) *Sei $\ell \nmid q$. Dann ist für*

1. $\ell = 2$:
$$g_2 = \begin{cases} 14, & \text{falls } q = 3, \\ q^2(q^2+1), & \text{falls } q = 3^f, f \geq 2, \\ q^3+1, & \text{falls } q \equiv 1 (\bmod 3), \\ q^3-1, & \text{falls } q \equiv -1 (\bmod 3). \end{cases}$$

2. $\ell = 3$:
$$g_3 = \begin{cases} 6, & \text{falls } q = 2, \\ q^3, & \text{falls } q \equiv 1 (\bmod 3), \\ q^3-1, & \text{falls } q \equiv -1 (\bmod 3), q \neq 2. \end{cases}$$

3. $\ell > 3$ *oder* $\ell = 0$:
$$g_\ell = \begin{cases} 6, & \text{falls } q = 2, \\ 14, & \text{falls } q = 3, \\ q^4+q^2+1, & \text{falls } q \equiv 0 (\bmod 3), q \neq 3, \\ q^3+1, & \text{falls } q \equiv 1 (\bmod 3), \\ q^3-1, & \text{falls } q \equiv -1 (\bmod 3), q \neq 2. \end{cases}$$

Beweis: Der Fall (A) gleicher Charakteristik ist bekannt. Für $q \equiv 1 (\bmod 3)$ ist q^3+1 der minimale Grad einer treuen Darstellung von G in Charakteristk 0. Für $q \equiv -1 (\bmod 3)$ ist dies q^3-1 außer für $q = 2$, wo es die folgenden nichttrivialen Charaktere von kleinerem Grad gibt:

Char.	X_{32}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	$\bar{X}_{19}$
Grad	7	7	1	6	6

Für $q \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ ist $q^4 + q^2 + 1$ der minimale Grad, außer für $q = 3$, wo es die folgenden kleineren Grade gibt:

Char.	X_{22}	X_{13}	X_{14}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	$\bar{X}_{19}$
Grad	91	91	91	78	14	64	64

Mit Hilfe der Zerlegungsmatrizen aus Anhang C sowie der dort ebenfalls angegebenen unteren Schranken für die Grade der Brauercharaktere folgt nun die Behauptung. Es sollte erwähnt werden, daß die minimalen Grade für $q \leq 3$ auch aus Parkers Sammlung von modularen Charaktertafeln [73] ersichtlich sind. ■

9.3 Die Alperin–McKay-Vermutung in $G_2(q)$

In diesem Abschnitt prüfen wir nach, ob die sogenannte Alperin–McKay-Vermutung für die Gruppe $G = G_2(q)$ in nicht-definierender Charakteristik erfüllt ist. Dazu führen wir die folgende Notation ein. Sei ℓ eine Primzahl mit $\ell \nmid q$. Sei A ein ℓ-Block von G mit Defektgruppe D und a der Brauer-Korrespondent von A in $N_G(D)$. Für die Anzahl der irreduziblen gewöhnlichen Charaktere in A der Höhe Null setzen wir $k_0(A)$. Die Alperin–McKay-Vermutung ist erfüllt, wenn $k_0(A) = k_0(a)$ ist. Ist T eine abelsche Untergruppe von G, so schreiben wir T^u für die größte Untergruppe ungerader Ordnung von T. Die maximalen Tori von G bezeichnen wir mit $T_i = \mathcal{H}_i$, $i \in \{1, 2, a, b, 3, 6\}$, den Durchschnitt $T_i \cap T_j$ mit T_{ij}. Weiter seien $\dot{w}_i$ geeignete Repräsentanten der Elemente von W. Diese werden in den folgenden Ausführungen näher spezifiziert.

Lemma 9.3.1 *Sei q eine ungerade Primzahlpotenz und*

$$i = \begin{cases} 1, & \text{falls } q \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4), \\ 2, & \text{falls } q \equiv -1(\mathrm{mod}\, 4). \end{cases}$$

Sei $T = T_i$ und $D_0 \in \mathrm{Syl}_2(T)$. Dann gibt es Repräsentanten $\dot{w}_a$ und $\dot{w}_2$ in $N_G(T)$, so daß $D = \langle D_0, \dot{w}_a, \dot{w}_2\rangle$ eine 2-Sylowgruppe von G ist. Weiter ist $N_G(D) = D$ und $|D/D'| = 8$. Insbesondere ist die Alperin–McKay-Vermutung für den 2-Hauptblock von G erfüllt.

Beweis: Sei $M = N_G(T)$ und $D_1 \in \mathrm{Syl}_2(M)$. Aus Ordnungsgründen folgt sofort, daß D_1 eine 2-Sylowgruppe von G ist. Weiter ist $D_0 \lhd D_1$ und $D_1/D_0 \cong D_1T/T$ ist in M/T zu $\langle w_a, w_2\rangle$ konjugiert. Daraus folgt die erste Aussage über D.

Aus der Operationstabelle (A.1) entnehmen wir $D_0 \geq D' \geq D_0^2 = \{t^2 \mid t \in D_0\}$ und $D' \neq D_0^2$. Hieraus ergibt sich leicht, daß $|D/D'| = 8$ und $|D'| \geq 8$

ist, woraus $C_G(D') = T$ folgt. Also ist T normal in $N_G(D')$, d.h. $N_G(D') \leq N_G(T) = M$. Wegen $N_G(D) \leq N_G(D')$ und $N_G(D) \cap T = D_0$ folgt nun leicht $N_G(D) = D$. Die Anzahl der Charaktere der Höhe Null im Hauptblock von $N_G(D)$ ist somit gleich 8, und deshalb gleich wie die entsprechende Anzahl im Hauptblock von G. ■

Lemma 9.3.2 *Sei q eine ungerade Primzahlpotenz und i wie in* Hilfssatz 9.3.1. *Die Zahl $i' \in \{1, 2\}$ sei gerade umgekehrt wie i erklärt, also $i' = 3 - i$. Sei $d \in \mathbb{N}$ definiert durch*

$$2^d \parallel q - 1, \quad \text{falls } q \equiv 1 (\bmod 4),$$

bzw.

$$2^d \parallel q + 1, \quad \text{falls } q \equiv -1 (\bmod 4).$$

Wir definieren nun 2 Typen von 2-Untergruppen von G wie folgt:

(A) *Sei $D_i \in \mathrm{Syl}_2(T_i)$ und für $j = a, b$ sei*

$$D_{ij} = \begin{cases} \langle D_i, \dot{w}_j \rangle, & \text{falls } i = 1, \\ \langle D_i, \dot{w}_j \dot{w}_2 \rangle, & \text{falls } i = 2. \end{cases}$$

(B) *Sei $D_j \in \mathrm{Syl}_2(T_j)$, $j = a, b$ und*

$$D_{i'j} = \begin{cases} \langle D_j, \dot{w}_j \dot{w}_2 \rangle, & \text{falls } i = 1, \\ \langle D_j, \dot{w}_j \rangle, & \text{falls } i = 2. \end{cases}$$

(Wir setzen voraus, daß die Repräsentanten $\dot{w}_j$ und $\dot{w}_2$ so gewählt sind, daß die D_{ij} tatsächlich 2*-Gruppen sind.) Sei nun D_{ij} eine der unter* (A) *oder* (B) *definierten 2-Untergruppen von G. Dann gilt:*

(1) $C_G(D_{ij}) = T_{ij} = T_i \cap T_j$.
(2) $C_G(D_{ij})D_{ij} = T_{ij}^u \times D_{ij}$.
(3) $N_G(D_{ij}) = (T_{ij}^u \times D_{ij})\langle \dot{w}_2 \rangle$.
(4)

$$|D_{ij}/D'_{ij}| = \begin{cases} 2^{d+1}, & \text{im Fall (A)}, \\ 4, & \text{im Fall (B)}. \end{cases}$$

(5) *Für jedes $\lambda \in \mathrm{Irr}(T_{ij}^u)$, $\lambda \neq 1$, existiert ein Block b_{ij}^λ von $N_G(D_{ij})$ mit Defektgruppe D_{ij} und Brauer-Korrespondenten B_{ij}^λ. Dies ist einer der Blöcke vom Typ B_3 oder B_{ij} aus* Kapitel C *des Anhangs. Weiter gilt:*

$$k_0(b_{ij}^\lambda) = k_0(B_{ij}^\lambda) = \begin{cases} 2^{d+1}, & \text{im Fall (A)}, \\ 4, & \text{im Fall (B)}. \end{cases}$$

(6) *Falls $4 \mid q-1$ und $3 \mid q-1$ oder $4 \mid q+1$ und $3 \mid q+1$, dann existiert im Fall* (A) *ein λ der Ordnung* 3, *so daß B_{ij}^λ der entsprechende Block vom Typ B_3 ist. Falls $4 \mid q-1$ und $3 \mid q+1$ oder $4 \mid q+1$ und $3 \mid q-1$, dann existiert im Fall* (B) *ein λ der Ordnung* 3, *so daß B_{ij}^λ der entsprechende Block vom Typ B_3 ist.*

Beweis:

(1) Sei $t_a = h(z, 1, z^{-1}) \in T_{1a} \cap D_{1a}$ mit $|t_a| > 2$. Ein solches Element existiert wegen $4 \mid q-1$. Dann ist $C_G(t_a) = \langle T_1, X_a, X_{-a}\rangle$. Sei $t_b = h(z, z, z^{-2}) \in T_{1b} \cap D_{1a}$ mit $|t_b| > 2$. Dann ist $C_G(t_b) = \langle T_1, X_b, X_{-b}\rangle$. Daraus folgt nun $C_G(D_{1a}) \leq T_1$. Der Zentralisator in T_1 von $\dot{w}_a$ ist gerade T_{1a}, woraus die Behauptung im Falle (A) für $i = 1$ und $j = a$ folgt. Die restlichen Fälle können analog behandelt werden.

(2) Dies ist klar.

(3) Wir behandeln zunächst den Fall (A). Sei $i = 1$, d.h. $4 \mid q-1$. Es ist $C_G(T_{1a}) = \langle T_1, X_a, X_{-a}\rangle \cong GL_2(q)$, und $N_G(T_{1a}) = \langle T_1, X_a, X_{-a}\rangle\langle \dot{w}_2\rangle$. Wegen $C_G(D_{1a}) = T_{1a}$ folgt hieraus zunächst $N_G(D_{1a}) \leq N_G(T_{1a})$, und daraus dann $N_G(D_{1a}) = C_G(D_{1a})D_{1a}\langle \dot{w}_2\rangle$. Analog werden die anderen Teilfälle unter (A) behandelt.

Wir kommen jetzt zum Fall (B). Sei wieder $i = 1$, d.h. $4 \mid q-1$. Sei $h(z^q, z^{1-q}, z^{-1})$ ein Element aus $T_a \cap D_{2a}$. Wir haben

$$\dot{w}_2^{-1}\dot{w}_a^{-1}h(z^{-q}, z^{q-1}, z)\dot{w}_a\dot{w}_2 h(z^q, z^{1-q}, z^{-1}) = h(z^{q+1}, 1, z^{-(q+1)}).$$

Daraus folgt nun $D'_{2a} = T_{1a} \cap D_{2a}$ und $|D_{2a}/D'_{2a}| = 4$. Wir erhalten $N_G(D_{2a}) \leq N_G(C_G(D'_{2a})) \leq N_G(T_{1a})$. Der Rest ergibt sich wie oben.

(4) Dies folgt aus der Operationstabelle A.1. Wir wollen es im Fall (A) für $i = 1$ und $j = a$ vorführen. Sei $t_b = h(z, z, z^{-2}) \in T_{1b} \cap D_{1a}$. Dann ist $\dot{w}_a^{-1}h(z^{-1}, z^{-1}, z^2)\dot{w}_a h(z, z, z^{-2}) = h(z^{-2}, z, z)h(z, z, z^{-2}) = h(z^{-1}, z^2, z^{-1})$. Daraus sieht man sofort, daß D'_{1a} die Ordnung 2^d hat. Die Ordnung der Kommutatorgruppe im Fall (B) wurde schon im Beweis von (3) bestimmt.

(5) Jeder nichttriviale Charakter λ aus $\mathrm{Irr}(T_{ij}^u)$ bestimmt einen 2-Block von $C_G(D_{ij})D_{ij}$ mit Defektgruppe D_{ij}, dessen Trägheitsgruppe in $N_G(D_{ij})$ gerade $C_G(D_{ij})D_{ij}$ ist. Sei b_{ij}^λ der hieraus durch Induktion der Charaktere hervorgehende Block von $N_G(D_{ij})$. Nach dem erweiterten ersten Hauptsatz von Brauer hat auch b_{ij}^λ die Defektgruppe D_{ij}. Die Aussage über den Brauer-Korrespondenten B_{ij}^λ ist klar.

Die Aussage über $k_0(b_{ij}^\lambda)$ folgt sofort aus (3) und (4): Ein Charakter in b_{ij}^λ hat genau dann die Höhe Null, wenn er den Grad 2 hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn er von einem Charakter von $T_{ij}^u \times D_{ij}$ der Form $\lambda \times \mu$, $\mu(1) = 1$ induziert ist. Also ist $k_0(b_{ij}^\lambda) = |D_{ij}/D'_{ij}|$. Die Gleichheit von $k_0(b_{ij}^\lambda)$ und $k_0(B_{ij}^\lambda)$ folgt durch Inspektion der Zerlegungsmatrizen.

(6) Diese Aussagen sind klar. ■

Es ist bemerkenswert, daß der Deligne–Lusztig-Funktor, angewandt auf die Charaktere der Höhe Null, die in einer Wurzel von B_{ij}^λ in $T_{ij}^u \times (D_{ij} \cap T)$

liegen, gerade die Charaktere der Höhe Null in B_{ij}^{λ} liefert. Hierbei ist T der zur Definition von D_{ij} verwendete maximale Torus.

Lemma 9.3.3 *Sei q nicht durch 3 teilbar und $L = C_G(h(\omega,\omega,\omega))$. Dann ist $L \cong SL_3(q)$, wenn $3 \mid q-1$, und $L \cong SU_3(q^2)$, wenn $3 \mid q+1$ ist. Es ist $N_G(L) = L : \langle \dot{w}_2 \rangle$, wobei $\dot{w}_2$ den Graph-Automorphismus von L bewirkt, die Matrizen der natürlichen Darstellung von L also transponiert und invertiert.*

Wir nehmen weiter an, daß 9 kein Teiler von q^2-1 ist. Dann ist eine 3-Sylowgruppe D von L extraspeziell von der Ordnung 27 und vom Exponenten 3. Im Falle $L \cong SU_3(q^2)$ identifizieren wir L mit der Menge der 3×3-Matrizen x über $\mathbb{F}_{q^2}$ der Determinante 1, die außerdem die Gleichung $\bar{x}^t = x^{-1}$ erfüllen, wobei $\bar{x}$ aus x ensteht, indem die Einträge in die q-te Potenz erhoben werden. Für ω^{-1} schreiben wir im folgenden auch $\bar{\omega}$. Wir setzen

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \omega & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $D = \langle a, b \rangle$ eine 3-Sylowgruppe von L.

Sei weiter

$$x = \frac{1}{1-\omega} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \omega \\ \omega & \bar{\omega} & \omega \\ \omega & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = x^t = \frac{1}{1-\omega} \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega \\ 1 & \bar{\omega} & 1 \\ \omega & \omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $Q = \langle x, y \rangle$ eine Quaternionengruppe der Ordnung 8, die D normalisiert. Weiter ist $N_L(D) = DQ$. Die Gruppe $N_L(D)/D'$ besitzt genau 6 irreduzible Charaktere der Grade $\{1,1,1,1,2,8\}$.

Sei ρ der Graph-Automorphismus von L. Dann ist D, und damit auch $N_L(D)$, invariant unter ρ. Die Gruppe $N_L(D)\langle\rho\rangle/D'$ besitzt genau 9 irreduzible Charaktere der Grade $\{1,1,1,1,2,2,2,8,8\}$.

Beweis: Sei $T = T_1$ oder $T = T_2$, je nachdem $L = SL_3(q)$ oder $L = SU_3(q^2)$ ist. Dann ist $L = \langle T, \dot{w}_b, \dot{w}_{3a+b} \rangle$, wobei $\dot{w}_b$ und $\dot{w}_{3a+b}$ geeignete Repräsentanten aus $N_G(T)$ sind. Daraus folgt die erste Aussage, die im übrigen wohlbekannt ist, ohne Mühe.

Die Aussage über die Ordnung der 3-Sylowgruppe von L ist wegen unserer Voraussetzung und wegen $3 \parallel q^4+q^2+1$ klar. Wir haben zunächst $\bar{a}^t = a^2 = a^{-1}$ und ebenso $\bar{b}^t = b^2 = b^{-1}$. Weiter ist

$$a^{-1}b^{-1}ab = z = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix},$$

so daß D eine extraspezielle Gruppe der Ordnung 27 in L ist.

Weiter haben wir

$$x^2 = y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also haben x und y insbesondere die Ordnung 4. Außerdem gilt $x^{-1}yx = y^{-1}$, so daß Q in der Tat eine Quaternionengruppe der Ordnung 8 ist. Schließlich zeigt $\bar{x}^t = x^{-1}$ und $\bar{y}^t = y^{-1}$, daß Q in L liegt.

Aus den Gleichungen

$$x^{-1}ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ab^2, \quad x^{-1}bx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix} = b^2a^2z,$$

$$y^{-1}ay = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix} = ab, \quad y^{-1}by = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ \omega & 0 & 0 \end{pmatrix} = ab^2z,$$

folgt nun auch, daß Q die Gruppe D normalisiert. Jedes Element aus $N_L(D)$ zentralisiert $Z(D) = D' = \langle z \rangle$. Die Gruppe der Automorphismen von D, die diese Eigenschaft haben, ist modulo den inneren Automorphismen isomorph zu $Sp(2,3)$ (siehe [94, Theorem 1 (a)]). Da offensichtlich $C_L(D) = Z(L)$ ist, und $Sp(2,3)$ die Ordnung 24 hat, folgt nun $N_L(D) = DQ$.

Es ist leicht zu sehen, daß Q alle nichttrivialen Elemente von D/D' konjugiert. Deshalb besitzt $N_L(D)/D' = DQ/D'$ einen irreduziblen Charakter vom Grad 8. Es folgt die Aussage über die Charaktere von $N_L(D)/D'$.

Wegen $y = x^t$ ist $\rho(x) = (x^t)^{-1} = y^{-1}$. Deshalb sind zwei der 1-dimensionalen Charaktere von $N_L(D)/D'$ unter ρ konjugiert, während alle anderen invariant sind. Daraus folgt schließlich die Behauptung über die Charaktergrade von $N_L(D)\langle\rho\rangle/D'$. ■

Lemma 9.3.4 *Sei q eine Potenz einer Primzahl $p \neq 3$ und*

$$i = \begin{cases} 1, & \text{falls } q \equiv 1 (\operatorname{mod} 3), \\ 2, & \text{falls } q \equiv -1 (\operatorname{mod} 3). \end{cases}$$

Sei $d \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$3^d \parallel q - 1, \quad \text{falls } q \equiv 1 (\operatorname{mod} 3),$$

bzw.

$$3^d \parallel q + 1, \quad \text{falls } q \equiv -1 (\operatorname{mod} 3).$$

Wir setzen $T = T_i$. Sei $D_0 \in \mathrm{Syl}_3(T)$ und $D = D_0\langle \dot{w}_3\rangle$, wobei $\dot{w}_3$ ein Repräsentant von $w_3 \in W$ der Ordnung 3 ist. Dann ist $D \in \mathrm{Syl}_3(G)$ und wir haben $|D| = 3^{2d+1}$. Sei B_0 der 3-Hauptblock von G und b_0 derjenige von $N_G(D)$. Dann ist $k_0(B_0) = k_0(b_0) = 9$, d.h. die Alperin–McKay-Vermutung ist in diesem Fall erfüllt.

Beweis: Die folgenden Charaktere aus B_0 sind genau diejenigen der Höhe Null: $\{X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{31}, X_{32}, X_{33}\}$. Also ist $k_0(B_0) = 9$.

Da D eine 3-Sylowgruppe von G ist, folgt sofort mit dem Satz von Clifford:

$$k_0(b_0) = |\mathrm{Irr}(N_G(D)/D')|.$$

Wir bestimmen zuerst $|D/D'|$. Sei $t = h(z_1, z_2, z_1^{-1}z_2^{-1})$ ein beliebiges Element aus D_0. Dann ist $\dot{w}_3^{-1}t^{-1}\dot{w}_3 t = h(z_1^2 z_2, z_1^{-1}z_2, z_1^{-1}z_2^{-2})$. Daraus folgt sofort, daß D' in D_0 den Index 3, in D demnach den Index 9 hat. Wir können schreiben: $D/D' = \langle \dot{w}_3 D', h(z_1, z_2, z_3)D'\rangle$, wobei $h(z_1, z_2, z_3)$ ein beliebiges Element aus $D_0 \setminus D'$ ist.

Zur Bestimmung von $N_G(D)$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Sei zuerst $d > 1$. Sei $t = h(z, z^{-3}, z^2) \in D_0$ mit $|t| = 9$. Dann ist $\dot{w}_3^{-1}t^{-1}\dot{w}_3 t = h(z^{-1}, z^5, z^5)$. Also enthält D' Elemente der Form $h(z^{-2}, z, z)$ und dann natürlich auch solche der Form $h(z, z, z^{-2})$, wobei z die Ordnung 9 hat. Daraus folgt sofort wie im Beweis von Lemma 9.3.2: $C_G(D') = T$. Wir erhalten: $N_G(D) \le N_G(D') \le N_G(C_G(D')) = N_G(T)$. Eine leichte Rechnung zeigt nun zunächst $N_G(D) \cap T = D_0$, und dann $N_G(D) = DS$, wobei S eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 4 ist, die von zwei Repräsentanten $\dot{w}_a$ und $\dot{w}_2$ erzeugt wird. Wir erhalten vier Bahnen von $N_G(D)$ auf D/D', wovon wir nur die Repräsentanten angeben: $\{1\}$, $\{\dot{w}_3 D'\}$, $\{h(z_1, z_2, z_3)D'\}$ und $\{h(z_1, z_2, z_3)\dot{w}_3 D'\}$. Diese haben die Längen 1, 2, 2 bzw. 4. Also hat $N_G(D)/D'$ genau 9 irreduzible Charaktere der Grade $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4\}$. In diesem Fall ist $k_0(b_0) = 9$.

Wir betrachten nun den Fall, daß 9 kein Teiler von $|T|$ ist. Wegen $C_G(D_0) \le T$ ist $C_G(D) = \langle h(\omega, \omega, \omega)\rangle = D'$. Also ist $N_G(D) \le N_G(D') = C_G(h(\omega, \omega, \omega)) : \langle \dot{w}_2\rangle$. Lemma 9.3.3 zeigt, daß auch in diesem Fall $k_0(b_0) = 9$ ist. Damit ist der Beweis vollständig. ■

Korollar 9.3.5 (1) *In jeder nicht-definierenden Charakteristik von $G = G_2(q)$ ist die blockweise Version der Alperin–McKay-Vermutung erfüllt.*

(2) *In G ist für jede Charakteristik die Brauersche Höhenvermutung erfüllt.*

Beweis: Die abelschen Defektgruppen von G sind in jedem Falle sehr leicht zu bestimmen. Sei A ein ℓ-Block von G mit abelscher Defektgruppe D, und a sein Brauer-Korrespondent in $N_G(D)$. Dann folgt durch Inspektion: $k_0(A) = |\mathrm{Irr}(A)| = |\mathrm{Irr}(a)| = k_0(a)$. Damit, und mit Hilfe der obigen Hilfssätze, sind beide Teile des Korollars bewiesen. ■

9.4 Die Inzidenzmatrix des Ree-Unitals

Sei $q^2 = 3^{2n+1}$, $n \geq 0$. Das Ree-Unital $\mathcal{U}$ ist ein 2-$(q^6+1, q^2+1, 1)$ Block-Design, auf dem $G = {}^2G_2(q^2)$ als Automorphismengruppe operiert. Die Punktmenge von $\mathcal{U}$ wird mit $\mathcal{P}$, die Geradenmenge mit $\mathcal{G}$ bezeichnet. Nach Lüneburg [64] können wir als Punkte die 3-Sylowgruppen, als Geraden die Involutionen von G nehmen. Eine 3-Sylowgruppe U und eine Gerade u sind inzident, wenn u in $N_G(U)$ liegt. Wir setzen $v = |\mathcal{P}|$ und $b = |\mathcal{G}|$. Dann ist $v = q^6 + 1$ und $b = q^4(q^4 - q^2 + 1)$. Sei I die Inzidenzmatrix von $\mathcal{U}$. Dies ist eine $\{0,1\}$-Matrix mit b Zeilen und v Spalten. Der Eintrag in Position (i,j) ist per Definition genau dann gleich 1, wenn der Punkt mit der Nummer j auf der Geraden mit der Nummer i liegt. Wir wollen in diesem Abschnitt für jede Primzahl ℓ den ℓ-Rang r_ℓ von I bestimmen.

Zunächst bemerken wir: Der Stabilisator eines Punktes ist eine Borel-Untergruppe B von G, der Stabilisator einer Geraden ist der Zentralisator L einer Involution u, also $L \cong \langle u \rangle \times PSL_2(q^2)$. Sei nun θ ein kommutativer Ring mit 1. Ohne weitere Kommentare wird I als Matrix über θ aufgefaßt. Sei X_θ der θG-Permutationsmodul auf den Punkten $\mathcal{P}$ und Y_θ der θG-Permutationsmodul auf den Geraden $\mathcal{G}$ von $\mathcal{U}$. Falls der zugrundeliegende Koeffizientenbereich θ aus dem Zusammenhang hervorgeht, lassen wir den Index θ weg. Wir betrachten nun den θG-Homomorphismus, der definiert ist durch

$$\begin{aligned} f_\theta : \quad Y_\theta &\longrightarrow X_\theta \\ \gamma &\longmapsto \sum_{x \in \gamma} x \end{aligned}$$

wobei γ eine Gerade in $\mathcal{U}$ ist. Die Matrix von f_θ bezüglich der Basen $\mathcal{G}$ von Y_θ und $\mathcal{P}$ von X_θ ist gerade I^t (in Spaltenkonvention). Das Bild von f_θ in X_θ heißt Design-Modul und wird mit Z_θ bezeichnet.

Auf X definieren wir ein θG-invariantes Skalarprodukt $[\ ,\ ]$ durch die Festlegung, daß die Punkte von $\mathcal{U}$ eine Orthonormalbasis bilden. Für einen Untermodul V von X können wir dann den Untermodul $V^\perp$ bilden, der aus allen denjenigen Elementen von X besteht, die auf allen Elementen von V senkrecht stehen.

Beispiel 9.4.1 Für $x \in V$ sei $\underline{x}$ der Koordinatenvektor bezüglich $\mathcal{P}$ aus $\theta^{1\times v}$. Dann ist $x \in V^\perp$ genau dann, wenn $I\underline{x}^t = 0$ ist.

Ist $\theta = k$ ein Körper der Charakteristik ℓ, dann ist $r_\ell = \mathrm{rank}_k(I) = \dim_k(Z_k)$. Da I über dem Primkörper von k definiert ist, hängt r_ℓ nur von der Charakteristik ℓ und nicht etwa von der Größe des Körpers k ab. Die Kenntnis der Moduln $X_k = \mathrm{Ind}_B^G(k)$ für jeden ausreichend großen Körper k ermöglicht nun die Bestimmung von r_ℓ. Sei (K, R, k) ein ℓ-modulares Zerfällungssystem für G.

Satz 9.4.2 *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt:*

(a) $r_\ell = q^6 + 1$, *falls* $\ell \not| \, q^2 + 1$.

(b) $r_\ell = q^6 - \frac{1}{2\sqrt{3}}q^5 - \frac{1}{2}q^4 + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}q$, *falls* $\ell \mid q^2 + 1$, $\ell \neq 2$.

(c) $r_2 = q^6 - \frac{1}{\sqrt{3}}q^5 + \frac{1}{\sqrt{3}}q$.

Beweis: (a) Hier folgen wir im wesentlichen dem Beweis von Bemerkung 3.4 aus M. Gecks Diplomarbeit [38]. Zunächst betrachten wir $I^tI = (a_{ij})$. Wir haben

$$a_{ij} = \begin{cases} q^4, & \text{falls } i = j, \\ 1, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Die Elementarteiler von I^tI sind also $\{1, q^4 - 1, q^4(q^4 - 1)(q^2 + 1)\}$. Hieraus folgt, daß die Primteiler der Elementarteiler von I Teiler von $q^4(q^4 - 1)(q^2 + 1)$ sind. Daraus ersieht man, daß I über k Maximalrang hat, wenn $\mathrm{char}(k) = 0$ oder $\mathrm{char}(k) \not| \, q^4(q^4 - 1)(q^2 + 1)$.

Für $\ell = 3$ oder $\ell \mid q^2 - 1$, $\ell \neq 2$, ist

$$X_k = k \oplus V,$$

mit einem einfachen kG-Modul V der Dimension q^6. Offensichtlich ist der ℓ-Rang von I größer als 1, so daß V jedenfalls im Bild von $f = f_k$ liegt. Der triviale Untermodul k wird aufgespannt von $\sum_{x \in \mathcal{P}} x$. Sei nun zuerst $\ell \mid q^2 - 1$. Dann haben wir

$$f(\sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \gamma) = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \sum_{x \in \gamma} x = q^4 \sum_{x \in \mathcal{P}} x = \sum_{x \in \mathcal{P}} x.$$

Damit ist der triviale Unterraum k im Bild von f, und der Rang von I ist maximal. Sei nun $\ell = 3$, d.h. $\ell \mid q^2$. Wir betrachten eine beliebige Gerade γ. Darauf liegen $q^2 + 1$ Punkte. Also haben wir

$$[\sum_{x \in \mathcal{P}} x, f(\gamma)] = [\sum_{x \in \mathcal{P}} x, \sum_{y \in \gamma} y] = q^2 + 1 = 1 \neq 0.$$

Damit ist $\sum_{x \in \mathcal{P}} x$ nicht in $\mathrm{Bild}(f)^\perp$ enthalten, woraus die Surjektivität von f folgt. Damit ist Teil (a) bewiesen.

(b) Sei nun $\ell \mid q^2 + 1$. Wir haben

$$Z = \mathrm{Bild}(f) \cong Y/\mathrm{Kern}(f).$$

Sei M ein Kompositionsfaktor im Kopf von Z. Dann ist M auch im Kopf von Y. Weil auf jeder Geraden genau $q^2 + 1$ Punkte liegen, bemerken wir $Z \subseteq \langle \sum_{x \in \mathcal{P}} x \rangle^\perp$.

Wir betrachten zuerst den Fall $\ell \neq 2$. Dann ist X projektiv, nämlich die projektive Hülle des trivialen kG-Moduls. Aus der Kenntnis des Brauerbaumes und allgemeiner Ergebnisse über die unzerlegbaren Moduln in Blöcken mit zyklischer Defektgruppe folgt nun, daß X uniseriell ist. Seine Kompositionsreihe (in absteigender Reihenfolge) ist k, M, N, M^*, k. Hierbei ist M ein einfacher Modul mit Brauercharakter $\check{\xi}_7$, M^* sein dualer, und N ein einfacher Modul der Dimension $(q^2-1)(q^4 - \frac{1}{\sqrt{3}}q^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}q + 1)$. Wir zeigen nun, daß weder M noch M^* im Kopf von Y vorkommen. Dann muß N der Kopf des Design-Moduls Z sein, woraus wir dessen Dimension berechnen können.

Sei V_k ein unzerlegbarer direkter Summand von Y_k, der M oder M^* im Kopf habe. Da V_k eine triviale Quelle besitzt ist er zu einem direkten Summanden V_R von Y_R liftbar. Wir wollen zeigen, daß der gewöhnliche Charakter von V_R einen Konstituenten ξ_7 oder ξ_8 besitzt. Da die ℓ-Sylowgruppe von G eine TI-Menge ist (Lemma 8.1.1), hat V_k den Vertex D oder ist projektiv. Im letzteren Falle ist V_k die projektive Hülle von M oder M^*. Dann ist der Charakter von V_R entweder $\xi_2 + \xi_7$ oder $\xi_2 + \xi_8$. Sei nun V_k nicht projektiv. Dann ist der Charakter von V_R einem Knoten des Brauerbaumes vom Typ Kreuz zugeordnet. Der Charakter von V_R ist also entweder $\mathbf{1}_G$, ξ_7, ξ_8 oder χ_0, wobei χ_0 die Summe der Exzeptionellen bezeichnet. Aber weder $\mathbf{1}_G$ noch χ_0 besitzen modulare Konstituenten, die Brauercharaktere von M oder M^* sind. Also hat in diesem Fall V_R den Charakter ξ_7 oder ξ_8.

Wir sind nun an einem Widerspruch angelangt, denn weder ξ_7 noch ξ_8 ist ein gewöhnlicher Konstituent von $\mathbf{1}_L^G$. Dies folgt etwa aus der Arbeit von Landrock und Michler [63, Lemma 2.3], denn sowohl ξ_7 als auch ξ_8 liegen im 2-Hauptblock von G. Damit ist gezeigt, daß der Kopf von Z_k gerade aus N besteht.

(c) Sei schließlich $\ell = 2$. Wir verwenden die Ergebnisse und die Notation aus [63]. Die unzerlegbaren Moduln werden durch ihre Sockelreihen dargestellt. Die Einschränkung von Y auf den Hauptblock wird wiederum mit Y bezeichnet. Nach Landrock und Michler haben wir:

$$X = \begin{array}{ccc} & \mathbf{1} & \\ & \varphi_2 & \\ \varphi_4 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ & \varphi_2 & \\ & \mathbf{1} & \end{array}$$

und

$$Y = \mathbf{1} \oplus \begin{array}{ccc} & \varphi_3 & \\ & \varphi_2 & \\ \varphi_4 & \mathbf{1} & \varphi_5 \\ & \varphi_2 & \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & \varphi_2 & \\ \varphi_4 & \mathbf{1} & \varphi_5 \\ & \varphi_2 & \\ & \varphi_3 & \end{array}$$

Da Z ein epimorphes Bild von Y ist, folgt wegen $Z \neq X$ und $Z \neq k$:

$$Z \in \left\{ \begin{matrix} \varphi_2 \\ \mathbf{1} \end{matrix} \, , \, \begin{matrix} \varphi_3 \\ \varphi_2 \\ \mathbf{1} \end{matrix} \right\}.$$

Im Fall $Z = \begin{matrix} \varphi_2 \\ \mathbf{1} \end{matrix}$ ist $Z \subseteq Z^{\perp}$.

Sei $\underline{z}$ eine Zeile von I, die zur Geraden γ gehöre. Sei x ein Punkt auf γ und y ein Punkt, der nicht auf γ liegt. Die Gerade δ durch x und y schneidet γ in x. Ist $\underline{w}$ die zu δ gehörige Zeile von I, dann gilt also $\underline{w}\,\underline{z}^t = 1$. Nach Beispiel 9.4.1 liegt $\underline{z}$ nicht in $Z^{\perp}$. Dieser Widerspruch zeigt $Z = \begin{matrix} \varphi_3 \\ \varphi_2 \\ \mathbf{1} \end{matrix}$. Damit ist auch im Falle $\ell = 2$ der Design-Modul bestimmt. ■

Bemerkung 9.4.3 Sei $N_k = Z_k/(Z_k \cap Z_k^{\perp})$. Dann ist

$$\dim_k(N_k) = \begin{cases} q^6 + 1, & \text{falls } \ell \not| \, q^2 + 1, \\ (q^2 - 1)(q^4 - \frac{1}{\sqrt{3}}q^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}q + 1), & \text{falls } \ell \mid q^2 + 1. \end{cases}$$

Nach den obigen Ausführungen ist N_k isomorph zu einem Untermodul von Y_k, nämlich zum Bild desjenigen Endomorphismus, der durch die Matrix $I\,I^t$ beschrieben wir. Wir finden also für den ℓ-Rang dieser Matrix:

$$\operatorname{rank}_\ell(I\,I^t) = \begin{cases} q^6 + 1, & \text{falls } \ell \not| \, q^2 + 1, \\ (q^2 - 1)(q^4 - \frac{1}{\sqrt{3}}q^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}q + 1), & \text{falls } \ell \mid q^2 + 1. \end{cases}$$

Dies erklärt vielleicht, warum N_k in Charakteristik 2 die gleiche Dimension wie in ungerader Charakteristik $\ell \mid q^2 + 1$ hat.

Wir haben schon gesehen, daß die Primteiler der Elementarteiler von I Teiler von $q^4(q^4 - 1)(q^2 + 1)$ sind. Nach dem Beweis des obigen Satzes können diese Elementarteiler keine ungeraden Primteiler haben, die $q^4(q^2 - 1)$ teilen. Also sind diese Primteiler sogar Teiler von $q^2 + 1$.

Die folgende Überlegung zeigt, daß die Elementarteiler von I Teiler von $q^4 - 1$, und damit von $2(q^2 + 1)$ sind. Dabei bezeichnen wir mit J eine Alles-Eins-Matrix geeigneter Größe. Die verwendeten Umformungen sind einer Note von Klemm [61] entnommen.

Zunächst ist

$$I^t I = (q^4 - 1)E + J,$$

wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet. Weiter gilt

$$JI = q^4 J.$$

Daraus folgt nun

$$E = \frac{1}{q^4(q^4-1)}(q^4 I^t - J)I.$$

Also sind die Elementarteiler von I Teiler von $q^4(q^4-1)$. Damit erhalten wir folgende Aussage über die Elementarteiler von I.

Korollar 9.4.4 *Sei m das Produkt der Primteiler von q^2+1. Dann sind die Elementarteiler von I enthalten in $\{1, 2, 4, 8, am \mid a \in \mathbb{N}, am \mid 2(q^2+1)\}$. Die Vielfachheit des Elementarteilers 1 ist $r_2 = q^6 - \frac{1}{\sqrt{3}}q^5 + \frac{1}{\sqrt{3}}q$. Ist $q^2 > 3$, dann ist die Summe der Vielfachheiten der Elementarteiler, die durch m teilbar sind, gleich $q^6 + 1 - r_\ell = \frac{1}{2\sqrt{3}}(q^5 + \sqrt{3}q^4 - \sqrt{3}q^2 - q + 2\sqrt{3})$. Die Anzahl der Elementarteiler aus $\{2, 4, 8\}$ ist $\frac{1}{2\sqrt{3}}q(q^2-1)(q^2 - \sqrt{3}q + 1)$.* ■

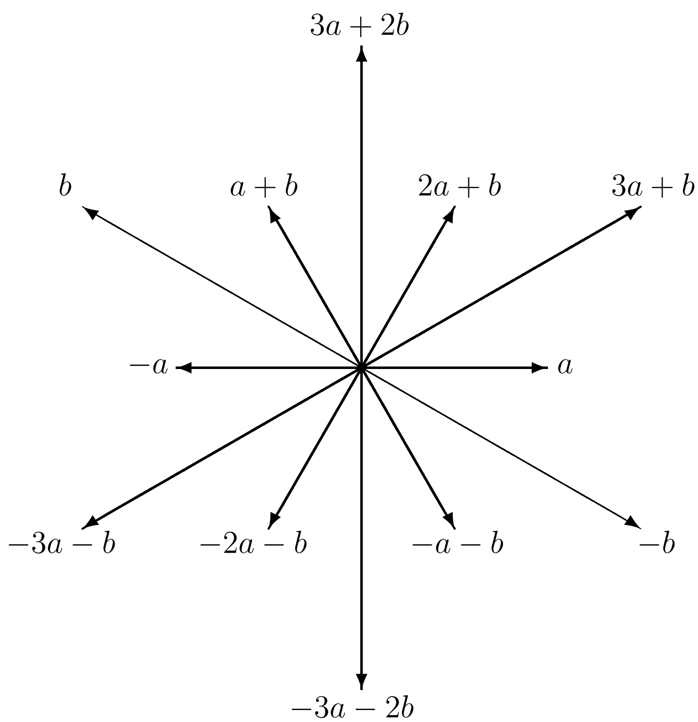
Es ist äußerst bemerkenswert, daß die Summe der Vielfachheiten derjenigen Elementarteiler, die echte 2-Potenzen sind, gerade gleich dem Grad des kuspidalen irreduziblen Charakters ξ_5 ist.

Anhang A

Die Gruppe $G_2(q)$

Im ersten Kapitel des Anhangs soll wichtige gruppentheoretische Information über $G = G_2(q)$ zusammengestellt werden. Diese wird in den Beispielen der Arbeit ständig verwendet. Sie ist verschiedenen Quellen entnommen. Am Schluß des Kapitels folgt die Zerlegung einiger Charaktere.

A.1 Das Wurzelsystem vom Typ G_2



In den folgenden Ausführungen bezeichnen wir das Wurzelsystem mit Φ, und halten das Fundamentalsystem $\Pi = \{a, b\}$ fest.

A.2 Die Weylgruppe vom Typ G_2

Die Weylgruppe W vom Typ G_2 ist eine Diedergruppe der Ordnung 12. Ist r eine Wurzel aus Φ, dann sei w_r die Spiegelung an $\langle r\rangle^{\perp}$.

No.	Element	Name
1	1	1
2	w_a	w_a
3	w_b	w_b
4	$w_a w_b$	w_6
5	$w_b w_a$	w_6^{-1}
6	$w_a w_b w_a$	w_{3a+b}
7	$w_b w_a w_b$	w_{a+b}
8	$w_a w_b w_a w_b$	w_3
9	$w_b w_a w_b w_a$	w_3^{-1}
10	$w_a w_b w_a w_b w_a$	w_{2a+b}
11	$w_b w_a w_b w_a w_b$	w_{3a+2b}
12	$w_a w_b w_a w_b w_a w_b$	w_2

Die Charaktertafel von W übernehmen wir aus [10, Seite 412]. Dabei ist $s_1 = w_a$ und $s_2 = w_b$.

	$\phi_{1,0}$	$\phi_{1,6}$	${\phi_{1,3}}'$	${\phi_{1,3}}''$	$\phi_{2,1}$	$\phi_{2,2}$
(1)	1	1	1	1	2	2
(s_1)	1	-1	1	-1	0	0
(s_2)	1	-1	-1	1	0	0
$(s_1 s_2)$	1	1	-1	-1	1	-1
$(s_1 s_2 s_1 s_2)$	1	1	1	1	-1	-1
(w_0)	1	1	-1	-1	-2	2

A.3 Die maximalen Tori

Die Bezeichnungen für die maximalen Tori und die halbeinfachen Elemente übernehmen wir aus [11, Section 1]. Bis auf Konjugation gibt es die folgenden maximalen Tori:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 &= \{h(z_1,z_2,z_3) \mid z_i^{q-1}=1, z_1z_2z_3=1\},\\
\mathcal{H}_2 &= \{h(z_1,z_2,z_3) \mid z_i^{q+1}=1, z_1z_2z_3=1\},\\
\mathcal{H}_a &= \{h(z^q,z^{1-q},z^{-1}) \mid z_i^{q^2-1}=1\},\\
\mathcal{H}_b &= \{h(z,z^q,z^{-q-1}) \mid z_i^{q^2-1}=1\},\\
\mathcal{H}_3 &= \{h(z,z^q,z^{q^2}) \mid z_i^{q^2+q+1}=1\},\\
\mathcal{H}_6 &= \{h(z,z^{-q},z^{q^2}) \mid z_i^{q^2-q+1}=1\}.
\end{aligned}
$$

Der Weylgruppe des Torus $\mathcal{H}_\alpha$ ist W_α mit

$$
\begin{aligned}
W_1 &= W_2 = W,\\
W_a &= \langle w_a, w_2\rangle,\\
W_b &= \langle w_b, w_2\rangle,\\
W_3 &= W_6 = \langle w_3, w_2\rangle.
\end{aligned}
$$

Die Operation der W_α auf $\mathcal{H}_\alpha$ kann aus der folgenden Tabelle berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
w_a^{-1}h(z_1,z_2,z_3)w_a &= h(z_3^{-1},z_2^{-1},z_1^{-1}),\\
w_b^{-1}h(z_1,z_2,z_3)w_b &= h(z_2,z_1,z_3),\\
w_2^{-1}h(z_1,z_2,z_3)w_2 &= h(z_1^{-1},z_2^{-1},z_3^{-1}),\\
w_3^{-1}h(z_1,z_2,z_3)w_3 &= h(z_3,z_1,z_2).
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

A.4 Die Konjugiertenklassen

In den folgenden Charaktertafeln von G verwenden wir die nachstehenden Bezeichnungen für die Konjugiertenklassen von G und deren Klassentypen. Diese sind aus [11, S. 396ff] übernommen. Dabei steht $x_\alpha(1)$ für ein gewisses, nicht-triviales Element aus der Wurzeluntergruppe X_α, $\alpha \in \Phi$.

$$
\begin{aligned}
1 &= \text{Identität},\\
u_1 &= x_b(1),\\
u_2 &= x_a(1),\\
u_3 &= \text{unipotentes Element mit } |C_G(u_3)| = 6q^4,\\
u_4 &= \text{unipotentes Element mit } |C_G(u_4)| = 2q^4,\\
u_5 &= \text{unipotentes Element mit } |C_G(u_5)| = 3q^4,\\
u_6 &= x_a(1)x_b(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
k_2 & = & h(-1,-1,1),\\
k_{2,1} & = & k_2 x_b(1),\\
k_{2,2} & = & k_2 x_{2a+b}(1),\\
k_{2,3} & = & k_2 x_b(1) x_{2a+b}(1),\\
k_{2,4} & = & k_2 x_b(1) x_{2a+b}(\lambda),\ (\lambda \text{ Nicht-Quadrat in } \mathbb{F}_q),\\
k_3 & = & h(\omega,\omega,\omega),\\
k_{3,1} & = & k_3 x_{3a+2b}(1),\\
k_{3,2} & = & \left\{\begin{array}{l}\text{Element der Form } k_3 \times \ \ \text{(unipotentes Element)}\\ \text{mit } |C_G(k_{3,2})| = 3q^2 \text{ und } k_{3,2} \sim k_{3,2}^{-1},\end{array}\right.\\
k_{3,3,1} & = & \left\{\begin{array}{l}\text{Element der Form } k_3 \times \ \ \text{(unipotentes Element)}\\ \text{mit } |C_G(k_{3,3,1})| = 3q^2 \text{ und } k_{3,3,1} \not\sim k_{3,3,1}^{-1},\end{array}\right.\\
k_{3,3,2} & \sim & k_{3,3,1}^{-1},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lclllll}
h_{1a} & = & h(z,1,z^{-1}), & z^{q-1}=1, & z^2 \neq 1, & \\
h_{1a,1} & = & h_{1a} x_a(1), & & & \\
h_{1b} & = & h(z,z,z^{-2}), & z^{q-1}=1, & z^2 \neq 1, & z^3 \neq 1,\\
h_{1b,1} & = & h_{1b} x_b(1), & & & \\
h_{2a} & = & h(z,z^{-2},z), & z^{q+1}=1, & z^2 \neq 1, & z^3 \neq 1,\\
h_{2a,1} & = & h_{2a} x_{3a+2b}(1), & & & \\
h_{2b} & = & h(z,z^{-1},1), & z^{q+1}=1, & z^2 \neq 1, & \\
h_{2b,1} & = & h_{2b} x_{2a+b}(1), & & & \\
h_1 & = & h(z_1,z_2,z_3), & z_i^{q-1}=1, & z_i z_j^{\pm 1} \neq 1, & \\
h_2 & = & h(z_1,z_2,z_3), & z_i^{q+1}=1, & z_i z_j^{\pm 1} \neq 1, & \\
h_a & = & h(z^q,z^{1-q},z^{-1}), & z^{q^2-1}=1, & z^{q\pm 1} \neq 1, & \\
h_b & = & h(z,z^q,z^{-q-1}), & z^{q^2-1}=1, & z^{q\pm 1} \neq 1, & \\
h_3 & = & h(z,z^q,z^{q^2}), & z^{q^2+q+1}=1, & z^3 \neq 1, & \\
h_6 & = & h(z,z^{-q},z^{q^2}), & z^{q^2-q+1}=1, & z^3 \neq 1. &
\end{array}
$$

Die Struktur der Zentralisatoren der halbeinfachen Elemente ist in der Tafel von Abschnitt B.4 des Anhangs angegeben. Wir bemerken noch, daß mit unserer früheren Notation gilt:

$$
\begin{array}{lcl}
C_G(h_{1a}) & = & GL_2(q)_a,\\
C_G(h_{1b}) & = & GL_2(q)_b,\\
C_G(h_{2a}) & = & U_2(q^2)_a,\\
C_G(h_{2b}) & = & U_2(q^2)_b.
\end{array}
$$

A.5 Einige Charaktere

Wir geben nun noch die Zerlegung einiger Charaktere von G an, die in der vorliegenden Arbeit verwendet wurden. Für die beiden maximalen parabolischen Untergruppen von G verwenden wir dabei die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} P_{\{a\}} &= P_a = \langle B, w_a \rangle, \\ P_{\{b\}} &= P_b = \langle B, w_b \rangle. \end{aligned}$$

Wir finden für die Permutationscharaktere auf den parabolischen Untergruppen von G:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_B^G &= X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + 2X_{15} + 2X_{16}, \\ \mathbf{1}_{P_a}^G &= X_{11} + X_{13} + X_{15} + X_{16}, \\ \mathbf{1}_{P_b}^G &= X_{11} + X_{14} + X_{15} + X_{16}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit R_α den Deligne–Lusztig-Funktor zum maximalen Torus $\mathcal{H}_\alpha$, dann haben wir:

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{1}) &= X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + 2X_{15} + 2X_{16}, \\ R_2(\mathbf{1}) &= X_{11} + X_{12} - X_{13} - X_{14} - 2X_{17} - 2X_{18}, \\ R_a(\mathbf{1}) &= -X_{11} + X_{12} - X_{13} + X_{14}, \\ R_b(\mathbf{1}) &= -X_{11} + X_{12} + X_{13} - X_{14}, \\ R_3(\mathbf{1}) &= X_{11} + X_{12} - X_{15} + X_{18} - X_{19} - \bar{X}_{19}, \\ R_6(\mathbf{1}) &= X_{11} + X_{12} - X_{16} + X_{17} + X_{19} + \bar{X}_{19}. \end{aligned}$$

Diese Charaktere können leicht aus den Tafeln von Chang und Ree [11] berechnet werden. Sie stehen auch in Schewes Dissertation [78, Seite 105].

Darüberhinaus benötigen wir noch die folgenden, von gewissen Untergruppen induzierten Charaktere. Mit L wird dabei sie zu $SL_3(q)$ isomorphe Untergruppe, mit M die zu $SU_3(q^2)$ isomorphe Untergruppe bezeichnet. Die Spalten der folgenden Tabellen geben die Zerlegung in den unipotenten Charakteren der die jeweilige Spalte überschreibenden induzierten Charaktere an. Die Bezeichnung der Charaktere ist aus [86] übernommen. Wir verzichten hier auf die Wiedergabe der Fusion dieser Untergruppen, da diese ohne Mühe zu bestimmen ist. Wie immer sind in den folgenden Tabellen fehlende Einträge durch 0 zu ersetzen.

Sei zuerst $q \equiv -1 (\bmod 3)$. Wir haben die folgenden von L induzierten Charaktere:

Char.	${\chi_1}^G$	${\chi_{q(q+1)}}^G$	${\chi_{q^3}}^G$	$\left[\chi^{(u)}_{(q-1)^2(q+1)}\right]^G$
X_{11}	1			
X_{12}		2	$q+2$	$q-1$
X_{13}			1	1
X_{14}	2	2		
X_{15}		2	1	
X_{16}	1	2	1	
X_{17}				
X_{18}	1			
X_{19}				1
$\bar{X}_{19}$				1

Sei nun $q \equiv 1 (\bmod 3)$. Wir haben die folgenden von M induzierten Charaktere:

Char.	$\left[\chi^{(u)}_{(q+1)^2(q-1)}\right]^G$	${\chi_1}^G \otimes X_{18}$
X_{11}		
X_{12}	$q+1$	$\frac{1}{6}q(q-1)(q-2)$
X_{13}	1	
X_{14}		$\frac{1}{3}q(q-1)$
X_{15}		
X_{16}		$\frac{1}{6}q(q-1)$
X_{17}		
X_{18}		$\frac{1}{6}q(q-1)$
X_{19}	1	
$\bar{X}_{19}$	1	

Anhang B

Die Charaktertafel der $G_2(q)$

In diesem Kapitel wird die Charaktertafel der $G_2(q)$ für ungerades, nicht durch 3 teilbares q abgedruckt. Diese wurde von Chang und Ree in [11] berechnet. Dort sind allerdings nur die Deligne–Lustig-Charaktere angegeben, sowie die Gleichungen, aus denen die irreduziblen Charaktere daraus gewonnen werden können. In der vorliegenden, expliziten Form ist die Charaktertafel noch nicht veröffentlicht. Für gerade q steht die Charaktertafel der $G_2(q)$ in [24], und für durch 3 teilbares q in [23].

B.1 Bezeichnungen

In den folgenden Tabellen steht δ für die Kongruenz von q modulo 4, also

$$q \equiv \delta (\operatorname{mod} 4), \quad \delta \in \{1, -1\}.$$

Weiter sind ω, γ, η, θ, τ und σ primitive Einheitswurzeln mit:

$$\omega^3 = \gamma^{q-1} = \eta^{q+1} = \theta^{q^2-1} = \tau^{q^2+q+1} = \sigma^{q^2-q+1} = 1.$$

Für die komplexe Zahl α und die ganze Zahl n schreiben wir

$$\alpha_n = \alpha^n + \alpha^{-n}.$$

Schließlich benutzen wir noch die folgende Abkürzungen:

$$\Phi_3 = q^2 + q + 1,$$
$$\Phi_6 = q^2 - q + 1.$$

Wir erklären jetzt die Parameter i, j, k und l, die in einigen Charakterwerten der Tabellen vorkommen. Die Konjugiertenklassen innerhalb eines Klassentyps werden durch die Parameter i bzw. (i, j) gemäß der folgenden Tabelle differenziert. Die Klassentypen sind wie in Abschnitt A.3 bezeichnet. Dabei steht z jeweils für ein primitives Element der entsprechenden Ordnung.

$$
\begin{array}{lcllll}
h_{1a}(i) & = & h(z^i, 1, z^{-i}), & 0 \le i \le q-1, & i \ne \frac{1}{2}(q-1) \\
h_{1b}(i) & = & h(z^i, z^i, z^{-2i}), & 0 \le i \le q-1, & \begin{cases} i \ne \frac{1}{2}(q-1), \\ \frac{1}{3}(q-1), \frac{2}{3}(q-1) \end{cases} \\
h_{2a}(i) & = & h(z^i, z^{-2i}, z^i), & 0 \le i \le q+1, & \begin{cases} i \ne \frac{1}{2}(q+1), \\ \frac{1}{3}(q+1), \frac{2}{3}(q+1) \end{cases} \\
h_{2b}(i) & = & h(z^i, z^{-i}, 1), & 0 \le i \le q+1, & i \ne \frac{1}{2}(q+1) \\
h_1(i,j) & = & h(z^i, z^j, z^{-i-j}), & 0 \le i, j \le q-1, & \begin{cases} i, j, i+j, i-j, \\ 2i+j, i+2j \\ \not\equiv 0 (\operatorname{mod} q-1) \end{cases} \\
h_2(i,j) & = & h(z^i, z^j, z^{-i-j}), & 0 \le i, j \le q+1, & \begin{cases} i, j, i+j, i-j, \\ 2i+j, i+2j \\ \not\equiv 0 (\operatorname{mod} q+1) \end{cases} \\
h_a(i) & = & h(z^{iq}, z^{i(1-q)}, z^{-i}), & 0 \le i \le q^2-1, & i \not\equiv 0 (\operatorname{mod} q \pm 1) \\
h_b(i) & = & h(z^i, z^{qi}, z^{-i(q+1)}), & 0 \le i \le q^2-1, & i \not\equiv 0 (\operatorname{mod} q \pm 1) \\
h_3(i) & = & h(z^i, z^{iq}, z^{iq^2}), & 0 \le i \le q^2+q+1, & \begin{cases} i \ne \frac{1}{3}(q^2+q+1), \\ \frac{2}{3}(q^2+q+1) \end{cases} \\
h_6(i) & = & h(z^i, z^{-iq}, z^{iq^2}), & 0 \le i \le q^2-q+1, & \begin{cases} i \ne \frac{1}{3}(q^2-q+1), \\ \frac{2}{3}(q^2-q+1) \end{cases}
\end{array}
$$

Die Weylgruppe W_α des maximalen Torus $\mathcal{H}_\alpha$ operiert auf den Parametermengen für die Klassen h_α bzw. $h_{i\alpha}$, $i = 1, 2$. Diese Operation kann leicht aus den Tabellen A.1 bestimmt werden. Parameter, die unter dieser Operation in der gleichen Bahn liegen, bezeichnen die gleiche Konjugiertenklasse. Dies führt bei der Berechnung der Charakterwerte allerdings zu keinen Problemen, da diese natürlich unabhängig vom jeweiligen Repräsentanten einer solchen Bahn von Parametern sind. Die Anzahl der Klassen innerhalb eines Klassentyps kann leicht aus diesen Bemerkungen bestimmt werden.

Die Charaktere eines Charaktertyps werden durch die Parameter k bzw. (k, l) auseinandergehalten. Gemäß der Jordan-Zerlegung von Charakteren gibt es eine Bijektion zwischen den Charaktertypen und den Klassentypen, so daß korrespondierende Typen die gleiche Anzahl von Elementen besitzen. Diese Bijektion läßt sich aus der Tabelle in Abschnitt B.4 bestimmen. Außer für die Typen X_1 und X_2 kann man für korrespondierende Typen die gleichen Parametermengen nehmen. Für X_1 und X_2 gelten die folgenden Parameterbereiche:

$$
\begin{array}{lll}
X_1(k,l): & 0 \le k, l \le q-1, & k, l, k+l, k-l, 2k-l, k-2l \not\equiv 0 (\operatorname{mod} q-1). \\
X_2(k,l): & 0 \le k, l \le q+1, & k, l, k+l, k-l, 2k-l, k-2l \not\equiv 0 (\operatorname{mod} q+1).
\end{array}
$$

B.2 Der Fall $q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$

Repräsentant	Anzahl der Klassen	Zentralisatorordnung	Klassenlänge
1	1	$q^6(q-1)^2(q+1)^2(q^4+q^2+1)$	1
u_1	1	$q^6(q-1)(q+1)$	$(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
u_2	1	$q^4(q-1)(q+1)$	$q^2(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
u_3	1	$6q^4$	$\frac{1}{6}q^2(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
u_4	1	$2q^4$	$\frac{1}{2}q^2(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
u_5	1	$3q^4$	$\frac{1}{3}q^2(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
u_6	1	q^2	$q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
k_2	1	$q^2(q-1)^2(q+1)^2$	$q^4\Phi_3\Phi_6$
$k_{2,1}$	1	$q^2(q-1)(q+1)$	$q^4(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
$k_{2,2}$	1	$q^2(q-1)(q+1)$	$q^4(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
$k_{2,3}$	1	$2q^2$	$\frac{1}{2}q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
$k_{2,4}$	1	$2q^2$	$\frac{1}{2}q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
k_3	1	$q^3(q-1)(q+1)^2(q^2-q+1)$	$q^3(q-1)\Phi_3$
$k_{3,1}$	1	$q^3(q+1)$	$q^3(q-1)^2(q+1)\Phi_3\Phi_6$
$k_{3,2}$	1	$3q^2$	$\frac{1}{3}q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
$k_{3,3,1}$	1	$3q^2$	$\frac{1}{3}q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
$k_{3,3,2}$	1	$3q^2$	$\frac{1}{3}q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
h_{1a}	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q-1)^2(q+1)$	$q^5(q+1)\Phi_3\Phi_6$
$h_{1a,1}$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q-1)$	$q^5(q-1)(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
h_{1b}	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q-1)^2(q+1)$	$q^5(q+1)\Phi_3\Phi_6$
$h_{1b,1}$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q-1)$	$q^5(q-1)(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
h_{2a}	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q-1)(q+1)^2$	$q^5(q-1)\Phi_3\Phi_6$
$h_{2a,1}$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q+1)$	$q^5(q-1)^2(q+1)\Phi_3\Phi_6$
h_{2b}	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q-1)(q+1)^2$	$q^5(q-1)\Phi_3\Phi_6$
$h_{2b,1}$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q+1)$	$q^5(q-1)^2(q+1)\Phi_3\Phi_6$
h_1	$\frac{1}{12}(q-3)(q-5)$	$(q-1)^2$	$q^6(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
h_2	$\frac{1}{12}(q^2-4q+7)$	$(q+1)^2$	$q^6(q-1)^2\Phi_3\Phi_6$
h_a	$\frac{1}{4}(q-1)^2$	$(q-1)(q+1)$	$q^6(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
h_b	$\frac{1}{4}(q-1)^2$	$(q-1)(q+1)$	$q^6(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
h_3	$\frac{1}{6}(q+1)q$	q^2+q+1	$q^6(q-1)^2(q+1)^2\Phi_6$
h_6	$\frac{1}{6}(q+1)(q-2)$	q^2-q+1	$q^6(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3$

	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
1	1	q^6	$\frac{1}{3}q(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$\frac{1}{3}q(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	1		$-\frac{1}{3}q(q-1)(q+1)$	$\frac{1}{3}q(2q^2+1)$
u_2	1		q	
u_3	1		$-\frac{1}{3}q(-5+q)$	$-\frac{1}{3}q(q+1)$
u_4	1		$\frac{1}{3}q(q+1)$	$\frac{1}{3}q(q+1)$
u_5	1		$-\frac{1}{3}q(q+1)$	$-\frac{1}{3}q(q-2)$
u_6	1			
k_2	1	q^2	q	q
$k_{2,1}$	1			q
$k_{2,2}$	1		q	
$k_{2,3}$	1			
$k_{2,4}$	1			
k_3	1	$-q^3$	$\frac{1}{3}(2q+1)(q^2-q+1)$	$-\frac{1}{3}(q+2)(q^2-q+1)$
$k_{3,1}$	1		$\frac{1}{3}(q+1)$	$\frac{1}{3}(q-2)$
$k_{3,2}$	1		$-\frac{1}{3}(2q-1)$	$-\frac{2}{3}(q+1)$
$k_{3,3,1}$	1		$\frac{1}{3}(q+1)$	$\frac{1}{3}(q-2)$
$k_{3,3,2}$	1		$\frac{1}{3}(q+1)$	$\frac{1}{3}(q-2)$
h_{1a}	1	q	1	q
$h_{1a,1}$	1		1	
h_{1b}	1	q	q	1
$h_{1b,1}$	1			1
h_{2a}	1	$-q$	q	-1
$h_{2a,1}$	1			-1
h_{2b}	1	$-q$	-1	q
$h_{2b,1}$	1		-1	
h_1	1	1	1	1
h_2	1	1	-1	-1
h_a	1	-1	1	-1
h_b	1	-1	-1	1
h_3	1	1		
h_6	1	1		

	X_{15}	X_{16}	X_{17}
1	$\frac{1}{2}q(q+1)^2(q^2-q+1)$	$\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$
u_1	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{1}{6}q(q+1)(2q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$
u_2	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$
u_3	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$-\frac{1}{6}q(-5+q)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$
u_4	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{1}{6}q(q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$
u_5	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$-\frac{1}{6}q(q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$
u_6			
k_2	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	$-\frac{1}{2}(q-1)^2$
$k_{2,1}$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$k_{2,2}$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$k_{2,3}$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$k_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$
k_3		$\frac{1}{3}(q-1)(q+1)^2$	$-q(q-1)$
$k_{3,1}$		$-\frac{1}{3}(q+1)$	q
$k_{3,2}$		$\frac{1}{3}(2q-1)$	
$k_{3,3,1}$		$-\frac{1}{3}(q+1)$	
$k_{3,3,2}$		$-\frac{1}{3}(q+1)$	
h_{1a}	$q+1$	$q+1$	
$h_{1a,1}$	1	1	
h_{1b}	$q+1$	$q+1$	
$h_{1b,1}$	1	1	
h_{2a}			$q-1$
$h_{2a,1}$			-1
h_{2b}			$q-1$
$h_{2b,1}$			-1
h_1	2	2	
h_2			-2
h_a			
h_b			
h_3	-1		
h_6		-1	1

	X_{18}	$X_{19}(k), k = 1, 2$	X_{31}
1	$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$	$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$	$q^3(q-1)(q^2+q+1)$
u_1	$\frac{1}{6}q(q-1)(2q-1)$	$-\frac{1}{3}q(q-1)(q+1)$	$-q^3$
u_2	$-\frac{1}{2}q(q-1)$		
u_3	$-\frac{1}{6}q(-5+q)$	$-\frac{1}{3}q(q+1)$	
u_4	$\frac{1}{6}q(q+1)$	$\frac{1}{3}q(q+1)$	
u_5	$-\frac{1}{6}q(q+1)$	$-\frac{1}{3}q(q-2)$	
u_6			
k_2	$-\frac{1}{2}(q-1)^2$		$q(q-1)$
$k_{2,1}$	$\frac{1}{2}(q-1)$		$-q$
$k_{2,2}$	$\frac{1}{2}(q-1)$		
$k_{2,3}$	$-\frac{1}{2}(q+1)$		
$k_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q-1)$		
k_3	$\frac{1}{3}(q-1)(q^2-q+1)$	$-\frac{1}{3}(q-1)(q+1)^2$	$q(q-1)$
$k_{3,1}$	$\frac{1}{3}(2q-1)$	$\frac{1}{3}(q+1)$	$-q$
$k_{3,2}$	$\frac{1}{3}(2q-1)$	$\frac{1}{3}(q+1)$	
$k_{3,3,1}$	$-\frac{1}{3}(q+1)$	$\frac{1}{3}(q+1)+q\omega^k$	
$k_{3,3,2}$	$-\frac{1}{3}(q+1)$	$\frac{1}{3}(q+1)+q\omega^{-k}$	
h_{1a}			
$h_{1a,1}$			
h_{1b}			$q-1$
$h_{1b,1}$			-1
h_{2a}	$q-1$		$-q+1$
$h_{2a,1}$	-1		1
h_{2b}	$q-1$		$-q\omega_i$
$h_{2b,1}$	-1		
h_1			
h_2	-2		ω_{i-j}
h_a			
h_b			$-\omega_i$
h_3	1	-1	
h_6		1	ω_i

	X_{32}	X_{33}	X_{21}
1	$(q-1)(q^2+q+1)$	$q(q-1)^2(q^2+q+1)$	$q^2(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	-1	$-q(q-1)$	q^2
u_2	$q-1$	$-q(q-1)$	q^2
u_3	$2q-1$	q	
u_4	-1	q	
u_5	$-q-1$	q	
u_6	-1		
k_2	$q-1$	$-(q-1)^2$	$q(q+2\delta)$
$k_{2,1}$	-1	$q-1$	$q\delta$
$k_{2,2}$	$q-1$	$q-1$	$q\delta$
$k_{2,3}$	-1	-1	
$k_{2,4}$	-1	-1	
k_3	$-q(q-1)$	$(q-1)(q^2+1)$	$-q(q^2-q+1)$
$k_{3,1}$	q	$q-1$	$-q$
$k_{3,2}$		-1	
$k_{3,3,1}$		-1	
$k_{3,3,2}$		-1	
h_{1a}			$q(-1)^i+q+(-1)^i$
$h_{1a,1}$			$(-1)^i$
h_{1b}	$q-1$		$q(-1)^i+q+(-1)^i$
$h_{1b,1}$	-1		$(-1)^i$
h_{2a}	$q-1$	$2q-2$	$-q-q(-1)^i+(-1)^i$
$h_{2a,1}$	-1	-2	$(-1)^i$
h_{2b}	$-\omega_i$	$q\omega_i-\omega_i$	$-q-q(-1)^i+(-1)^i$
$h_{2b,1}$	$-\omega_i$	$-\omega_i$	$(-1)^i$
h_1			$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$
h_2	$-\omega_{i-j}$	$-2\omega_{i-j}$	$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$
h_a			$-(-1)^i$
h_b	$-\omega_i$		$-(-1)^i$
h_3			
h_6	$-\omega_i$	ω_i	

	X_{22}	X_{23}	X_{24}
1	$(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$q(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$q(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	q^2+1	$q(q^2+1)$	q
u_2	q^2+1	q	$2q$
u_3	1	q	$3q$
u_4	1	q	q
u_5	1	q	
u_6	1		
k_2	$2q\delta+1$	$q^2\delta+q+\delta$	$q^2\delta+q+\delta$
$k_{2,1}$	$q\delta+1$	$q+\delta$	δ
$k_{2,2}$	$q\delta+1$	δ	$q+\delta$
$k_{2,3}$	1	δ	δ
$k_{2,4}$	1	δ	δ
k_3	q^2-q+1	$-q^2+q-1$	$q(q^2-q+1)$
$k_{3,1}$	$-q+1$	$q-1$	q
$k_{3,2}$	1	-1	
$k_{3,3,1}$	1	-1	
$k_{3,3,2}$	1	-1	
h_{1a}	$q(-1)^i+(-1)^i+1$	$q(-1)^i+q+(-1)^i$	$q(-1)^i+(-1)^i+1$
$h_{1a,1}$	$(-1)^i+1$	$(-1)^i$	$(-1)^i+1$
h_{1b}	$q(-1)^i+(-1)^i+1$	$q(-1)^i+(-1)^i+1$	$q(-1)^i+q+(-1)^i$
$h_{1b,1}$	$(-1)^i+1$	$(-1)^i+1$	$(-1)^i$
h_{2a}	$-q(-1)^i+1+(-1)^i$	$q(-1)^i-1-(-1)^i$	$q(-1)^i+q-(-1)^i$
$h_{2a,1}$	$(-1)^i+1$	$-1-(-1)^i$	$-(-1)^i$
h_{2b}	$-q(-1)^i+1+(-1)^i$	$q(-1)^i+q-(-1)^i$	$q(-1)^i-1-(-1)^i$
$h_{2b,1}$	$(-1)^i+1$	$-(-1)^i$	$-1-(-1)^i$
h_1	$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$	$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$	$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$
h_2	$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$	$-(-1)^{i+j}-(-1)^j-(-1)^i$	$-(-1)^{i+j}-(-1)^j-(-1)^i$
h_a	$(-1)^i$	$-(-1)^i$	$(-1)^i$
h_b	$(-1)^i$	$(-1)^i$	$-(-1)^i$
h_3			
h_6			

	X_{1a}	X'_{1a}
1	$q(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	$q(q^2+q+1)$	q^2+q+1
u_2	$q(q+1)$	$(q+1)^2$
u_3	q	$3q+1$
u_4	q	$q+1$
u_5	q	1
u_6		1
k_2	$(q+1)(q(-1)^k+q+(-1)^k)$	$(q+1)(q(-1)^k+(-1)^k+1)$
$k_{2,1}$	$q(-1)^k+q+(-1)^k$	$q(-1)^k+(-1)^k+1$
$k_{2,2}$	$(q+1)(-1)^k$	$((-1)^k+1)(q+1)$
$k_{2,3}$	$(-1)^k$	$(-1)^k+1$
$k_{2,4}$	$(-1)^k$	$(-1)^k+1$
k_3	$-(q+1)(q^2-q+1)$	$(q+1)(q^2-q+1)$
$k_{3,1}$	-1	1
$k_{3,2}$	-1	1
$k_{3,3,1}$	-1	1
$k_{3,3,2}$	-1	1
h_{1a}	$q\gamma_{ik}+q\gamma_{2ik}+\gamma_{ik}$	$q\gamma_{ik}+\gamma_{ik}+\gamma_{2ik}$
$h_{1a,1}$	γ_{ik}	$\gamma_{ik}+\gamma_{2ik}$
h_{1b}	$(q+1)(\gamma_{3ik}+1)$	$(q+1)(\gamma_{3ik}+1)$
$h_{1b,1}$	$\gamma_{3ik}+1$	$\gamma_{3ik}+1$
h_{2a}	$-q-1$	$q+1$
$h_{2a,1}$	-1	1
h_{2b}		
$h_{2b,1}$		
h_1	$\gamma_{ik+2jk}+\gamma_{2ik+jk}+\gamma_{ik-jk}$	$\gamma_{ik+2jk}+\gamma_{2ik+jk}+\gamma_{ik-jk}$
h_2		
h_a	$-\gamma_{ik}$	γ_{ik}
h_b		
h_3		
h_6		

	X_{1b}	X'_{1b}
1	$q(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	$q(q+1)$	$(q+1)(q^2+1)$
u_2	$q(q+2)$	q^2+q+1
u_3	$3q$	$q+1$
u_4	q	$q+1$
u_5		$q+1$
u_6		1
k_2	$(q+1)(q(-1)^k+q+(-1)^k)$	$(q+1)(q(-1)^k+(-1)^k+1)$
$k_{2,1}$	$(q+1)(-1)^k$	$((-1)^k+1)(q+1)$
$k_{2,2}$	$q(-1)^k+q+(-1)^k$	$q(-1)^k+(-1)^k+1$
$k_{2,3}$	$(-1)^k$	$(-1)^k+1$
$k_{2,4}$	$(-1)^k$	$(-1)^k+1$
k_3		
$k_{3,1}$		
$k_{3,2}$		
$k_{3,3,1}$		
$k_{3,3,2}$		
h_{1a}	$(q+1)(\gamma_{ik}+1)$	$(q+1)(\gamma_{ik}+1)$
$h_{1a,1}$	$\gamma_{ik}+1$	$\gamma_{ik}+1$
h_{1b}	$q\gamma_{ik}+q\gamma_{2ik}+\gamma_{ik}$	$q\gamma_{ik}+\gamma_{ik}+\gamma_{2ik}$
$h_{1b,1}$	γ_{ik}	$\gamma_{ik}+\gamma_{2ik}$
h_{2a}		
$h_{2a,1}$		
h_{2b}	$-q-1$	$q+1$
$h_{2b,1}$	-1	1
h_1	$\gamma_{ik}+\gamma_{jk}+\gamma_{ik+jk}$	$\gamma_{ik}+\gamma_{jk}+\gamma_{ik+jk}$
h_2		
h_a		
h_b	$-\gamma_{ik}$	γ_{ik}
h_3		
h_6		

	X_{2a}	X'_{2a}
1	$q(q-1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$(q-1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	$q(q-1)$	$(q-1)(q^2+1)$
u_2	$q(q-2)$	$-q^2+q-1$
u_3	$-3q$	$q-1$
u_4	$-q$	$q-1$
u_5		$q-1$
u_6		-1
k_2	$(q-1)(q(-1)^k-(-1)^k+q)$	$-(q-1)(q(-1)^k-(-1)^k-1)$
$k_{2,1}$	$-(q-1)(-1)^k$	$((-1)^k+1)(q-1)$
$k_{2,2}$	$-q(-1)^k-q+(-1)^k$	$q(-1)^k-(-1)^k-1$
$k_{2,3}$	$(-1)^k$	$-(-1)^k-1$
$k_{2,4}$	$(-1)^k$	$-(-1)^k-1$
k_3	$-q(q^2-q+1)\omega_k$	$-(q^2-q+1)\omega_k$
$k_{3,1}$	$-q\omega_k$	$(q-1)\omega_k$
$k_{3,2}$		$-\omega_k$
$k_{3,3,1}$		$-\omega_k$
$k_{3,3,2}$		$-\omega_k$
h_{1a}	$q-1$	$q-1$
$h_{1a,1}$	-1	-1
h_{1b}		
$h_{1b,1}$		
h_{2a}	$-q\eta_{ik}-q\eta_{2ik}+\eta_{ik}$	$q\eta_{ik}-\eta_{ik}-\eta_{2ik}$
$h_{2a,1}$	η_{ik}	$-\eta_{ik}-\eta_{2ik}$
h_{2b}	$-(q-1)(\eta_{ik}+1)$	$(q-1)(\eta_{ik}+1)$
$h_{2b,1}$	$\eta_{ik}+1$	$-\eta_{ik}-1$
h_1		
h_2	$\eta_{ik}+\eta_{jk}+\eta_{ik+jk}$	$-\eta_{ik}-\eta_{jk}-\eta_{ik+jk}$
h_a	$-\eta_{ik}$	$-\eta_{ik}$
h_b		
h_3		
h_6		

	X_{2b}	X'_{2b}
1	$q(q-1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$(q-1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	$-q(q^2-q+1)$	$-q^2+q-1$
u_2	$q(q-1)$	$-(q-1)^2$
u_3	$-q$	$3q-1$
u_4	$-q$	$q-1$
u_5	$-q$	-1
u_6		-1
k_2	$(q-1)(q(-1)^k-(-1)^k+q)$	$-(q-1)(q(-1)^k-(-1)^k-1)$
$k_{2,1}$	$-q(-1)^k-q+(-1)^k$	$q(-1)^k-(-1)^k-1$
$k_{2,2}$	$-(q-1)(-1)^k$	$((-1)^k+1)(q-1)$
$k_{2,3}$	$(-1)^k$	$-(-1)^k-1$
$k_{2,4}$	$(-1)^k$	$-(-1)^k-1$
k_3	$-(q-1)(q^2-q+1)$	$(q-1)(q^2-q+1)$
$k_{3,1}$	$-2q+1$	$2q-1$
$k_{3,2}$	1	-1
$k_{3,3,1}$	1	-1
$k_{3,3,2}$	1	-1
h_{1a}		
$h_{1a,1}$		
h_{1b}	$q-1$	$q-1$
$h_{1b,1}$	-1	-1
h_{2a}	$-(q-1)(\eta_{3ik}+1)$	$(q-1)(\eta_{3ik}+1)$
$h_{2a,1}$	$\eta_{3ik}+1$	$-\eta_{3ik}-1$
h_{2b}	$-q\eta_{ik}-q\eta_{2ik}+\eta_{ik}$	$q\eta_{ik}-\eta_{ik}-\eta_{2ik}$
$h_{2b,1}$	η_{ik}	$-\eta_{ik}-\eta_{2ik}$
h_1		
h_2	$\eta_{ik+2jk}+\eta_{2ik+jk}+\eta_{ik-jk}$	$-\eta_{ik+2jk}-\eta_{2ik+jk}-\eta_{ik-jk}$
h_a		
h_b	$-\eta_{ik}$	$-\eta_{ik}$
h_3		
h_6		

	X_1	X_2
1	$(q+1)(q^2+q+1)(q^3+1)$	$(q-1)(q^2-q+1)(q^3-1)$
u_1	$(q+1)(q^2+q+1)$	$-(q-1)(q^2-q+1)$
u_2	$(q+1)(2q+1)$	$(q-1)(2q-1)$
u_3	$4q+1$	$-4q+1$
u_4	$2q+1$	$-2q+1$
u_5	$q+1$	$-q+1$
u_6	1	1
k_2	$(q+1)^2((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$	$(q-1)^2((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$
$k_{2,1}$	$(q+1)((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$	$-(q-1)((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$
$k_{2,2}$	$(q+1)((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$	$-(q-1)((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$
$k_{2,3}$	$(-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l}$	$(-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l}$
$k_{2,4}$	$(-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l}$	$(-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l}$
k_3		$-(q-1)(q^2-q+1)\omega_{k+l}$
$k_{3,1}$		$-(2q-1)\omega_{k+l}$
$k_{3,2}$		ω_{k+l}
$k_{3,3,1}$		ω_{k+l}
$k_{3,3,2}$		ω_{k+l}
h_{1a}	$(q+1)(\gamma_{ik}+\gamma_{il}+\gamma_{i(k-l)})$	
$h_{1a,1}$	$\gamma_{ik}+\gamma_{il}+\gamma_{i(k-l)}$	
h_{1b}	$(q+1)(\gamma_{i(k+l)}+\gamma_{i(k-2l)}+\gamma_{i(l-2k)})$	
$h_{1b,1}$	$\gamma_{i(k+l)}+\gamma_{i(k-2l)}+\gamma_{i(l-2k)}$	
h_{2a}		$-(q-1)(\eta_{i(k+l)}+\eta_{i(k-2l)}+\eta_{i(l-2k)})$
$h_{2a,1}$		$\eta_{i(k+l)}+\eta_{i(k-2l)}+\eta_{i(l-2k)}$
h_{2b}		$-(q-1)(\eta_{ik}+\eta_{il}+\eta_{i(k-l)})$
$h_{2b,1}$		$\eta_{ik}+\eta_{il}+\eta_{i(k-l)}$
h_1	$\gamma_{ik+jl}+\gamma_{il+jk}+\gamma_{i(k-l)-jl}+$ $\gamma_{il-j(k-l)}+\gamma_{i(k-l)+jk}+\gamma_{ik+j(k-l)}$	
h_2		$\eta_{ik+jl}+\eta_{il+jk}+\eta_{i(k-l)-jl}+$ $\eta_{il-j(k-l)}+\eta_{i(k-l)+jk}+\eta_{ik+j(k-l)}$
h_a		
h_b		
h_3		
h_6		

	X_a	X_b	X_3	X_6
1	q^6-1	q^6-1	$(q-1)(q^2-1)(q^3+1)$	$(q+1)(q^2-1)(q^3-1)$
u_1	q^3-1	$-q^3-1$	$(q-1)(q^2-1)$	$-(q+1)(q^2-1)$
u_2	$-q-1$	$q-1$	$-q^2+1$	$-q^2+1$
u_3	$-2q-1$	$2q-1$	$q+1$	$-q+1$
u_4	-1	-1	$-q+1$	$q+1$
u_5	$q-1$	$-q-1$	$-2q+1$	$2q+1$
u_6	-1	-1	1	1
k_2	$(q^2-1)(-1)^k$	$(q^2-1)(-1)^k$		
$k_{2,1}$	$(q-1)(-1)^k$	$-(q+1)(-1)^k$		
$k_{2,2}$	$-(q+1)(-1)^k$	$(q-1)(-1)^k$		
$k_{2,3}$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$		
$k_{2,4}$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$		
k_3	$-(q^3+1)\omega_k$			$-(q+1)(q^2-1)\omega_k$
$k_{3,1}$	$-\omega_k$			$(q+1)\omega_k$
$k_{3,2}$	$-\omega_k$			ω_k
$k_{3,3,1}$	$-\omega_k$			ω_k
$k_{3,3,2}$	$-\omega_k$			ω_k
h_{1a}	$(q-1)\gamma_{ik}$			
$h_{1a,1}$	$-\gamma_{ik}$			
h_{1b}		$(q-1)\gamma_{ik}$		
$h_{1b,1}$		$-\gamma_{ik}$		
h_{2a}	$-(q+1)\eta_{ik}$			
$h_{2a,1}$	$-\eta_{ik}$			
h_{2b}		$-(q+1)\eta_{ik}$		
$h_{2b,1}$		$-\eta_{ik}$		
h_1				
h_2				
h_a	$-\theta_{ik}-\theta_{qik}$			
h_b		$-\theta_{ik}-\theta_{qik}$		
h_3			$\tau_{ik}+\tau_{qik}+\tau_{q^2ik}$	
h_6				$\sigma_{ik}+\sigma_{qik}+\sigma_{q^2ik}$

B.3 Der Fall $q \equiv 1(\mathbf{mod}\, 3)$

Repräsentant	Anzahl der Klassen	Zentralisatorordnung	Klassenlänge
1	1	$q^6(q-1)^2(q+1)^2(q^4+q^2+1)$	1
u_1	1	$q^6(q-1)(q+1)$	$(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
u_2	1	$q^4(q-1)(q+1)$	$q^2(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
u_3	1	$6q^4$	$\frac{1}{6}q^2(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
u_4	1	$2q^4$	$\frac{1}{2}q^2(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
u_5	1	$3q^4$	$\frac{1}{3}q^2(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
u_6	1	q^2	$q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
k_2	1	$q^2(q-1)^2(q+1)^2$	$q^4\Phi_3\Phi_6$
$k_{2,1}$	1	$q^2(q-1)(q+1)$	$q^4(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
$k_{2,2}$	1	$q^2(q-1)(q+1)$	$q^4(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
$k_{2,3}$	1	$2q^2$	$\frac{1}{2}q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
$k_{2,4}$	1	$2q^2$	$\frac{1}{2}q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
k_3	1	$q^3(q-1)^2(q+1)(q^2+q+1)$	$q^3(q+1)\Phi_6$
$k_{3,1}$	1	$q^3(q-1)$	$q^3(q-1)(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
$k_{3,2}$	1	$3q^2$	$\frac{1}{3}q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
$k_{3,3,1}$	1	$3q^2$	$\frac{1}{3}q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
$k_{3,3,2}$	1	$3q^2$	$\frac{1}{3}q^4(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
h_{1a}	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q-1)^2(q+1)$	$q^5(q+1)\Phi_3\Phi_6$
$h_{1a,1}$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q-1)$	$q^5(q-1)(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
h_{1b}	$\frac{1}{2}(q-5)$	$q(q-1)^2(q+1)$	$q^5(q+1)\Phi_3\Phi_6$
$h_{1b,1}$	$\frac{1}{2}(q-5)$	$q(q-1)$	$q^5(q-1)(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
h_{2a}	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q-1)(q+1)^2$	$q^5(q-1)\Phi_3\Phi_6$
$h_{2a,1}$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q+1)$	$q^5(q-1)^2(q+1)\Phi_3\Phi_6$
h_{2b}	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q-1)(q+1)^2$	$q^5(q-1)\Phi_3\Phi_6$
$h_{2b,1}$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q+1)$	$q^5(q-1)^2(q+1)\Phi_3\Phi_6$
h_1	$\frac{1}{12}(q^2-8q+19)$	$(q-1)^2$	$q^6(q+1)^2\Phi_3\Phi_6$
h_2	$\frac{1}{12}(q-1)(q-3)$	$(q+1)^2$	$q^6(q-1)^2\Phi_3\Phi_6$
h_a	$\frac{1}{4}(q-1)^2$	$(q-1)(q+1)$	$q^6(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
h_b	$\frac{1}{4}(q-1)^2$	$(q-1)(q+1)$	$q^6(q-1)(q+1)\Phi_3\Phi_6$
h_3	$\frac{1}{6}(q+2)(q-1)$	q^2+q+1	$q^6(q-1)^2(q+1)^2\Phi_6$
h_6	$\frac{1}{6}q(q-1)$	q^2-q+1	$q^6(q-1)^2(q+1)^2\Phi_3$

	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
1	1	q^6	$\frac{1}{3}q(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$\frac{1}{3}q(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	1		$-\frac{1}{3}q(q-1)(q+1)$	$\frac{1}{3}q(2q^2+1)$
u_2	1		q	
u_3	1		$\frac{1}{3}q(5+q)$	$\frac{1}{3}q(q-1)$
u_4	1		$-\frac{1}{3}q(q-1)$	$-\frac{1}{3}q(q-1)$
u_5	1		$\frac{1}{3}q(q-1)$	$\frac{1}{3}q(q+2)$
u_6	1			
k_2	1	q^2	q	q
$k_{2,1}$	1			q
$k_{2,2}$	1		q	
$k_{2,3}$	1			
$k_{2,4}$	1			
k_3	1	q^3	$\frac{1}{3}(2q-1)(q^2+q+1)$	$-\frac{1}{3}(q-2)(q^2+q+1)$
$k_{3,1}$	1		$\frac{1}{3}(q-1)$	$\frac{1}{3}(q+2)$
$k_{3,2}$	1		$-\frac{1}{3}(2q+1)$	$-\frac{2}{3}(q-1)$
$k_{3,3,1}$	1		$\frac{1}{3}(q-1)$	$\frac{1}{3}(q+2)$
$k_{3,3,2}$	1		$\frac{1}{3}(q-1)$	$\frac{1}{3}(q+2)$
h_{1a}	1	q	1	q
$h_{1a,1}$	1		1	
h_{1b}	1	q	q	1
$h_{1b,1}$	1			1
h_{2a}	1	$-q$	q	-1
$h_{2a,1}$	1			-1
h_{2b}	1	$-q$	-1	q
$h_{2b,1}$	1		-1	
h_1	1	1	1	1
h_2	1	1	-1	-1
h_a	1	-1	1	-1
h_b	1	-1	-1	1
h_3	1	1		
h_6	1	1		

	X_{15}	X_{16}	X_{17}
1	$\frac{1}{2}q(q+1)^2(q^2-q+1)$	$\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$
u_1	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{1}{6}q(q+1)(2q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$
u_2	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$
u_3	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{1}{6}q(5+q)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$
u_4	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$-\frac{1}{6}q(q-1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$
u_5	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{1}{6}q(q-1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$
u_6			
k_2	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	$-\frac{1}{2}(q-1)^2$
$k_{2,1}$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$k_{2,2}$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$k_{2,3}$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$k_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$
k_3	$q(q+1)$	$\frac{1}{3}(q+1)(q^2+q+1)$	
$k_{3,1}$	q	$\frac{1}{3}(2q+1)$	
$k_{3,2}$		$\frac{1}{3}(2q+1)$	
$k_{3,3,1}$		$-\frac{1}{3}(q-1)$	
$k_{3,3,2}$		$-\frac{1}{3}(q-1)$	
h_{1a}	$q+1$	$q+1$	
$h_{1a,1}$	1	1	
h_{1b}	$q+1$	$q+1$	
$h_{1b,1}$	1	1	
h_{2a}			$q-1$
$h_{2a,1}$			-1
h_{2b}			$q-1$
$h_{2b,1}$			-1
h_1	2	2	
h_2			-2
h_a			
h_b			
h_3	-1		
h_6		-1	1

	X_{18}	$X_{19}(k), k=1,2$	X_{31}
1	$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$	$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$	$q^3(q+1)(q^2-q+1)$
u_1	$\frac{1}{6}q(q-1)(2q-1)$	$-\frac{1}{3}q(q-1)(q+1)$	q^3
u_2	$-\frac{1}{2}q(q-1)$		
u_3	$\frac{1}{6}q(5+q)$	$\frac{1}{3}q(q-1)$	
u_4	$-\frac{1}{6}q(q-1)$	$-\frac{1}{3}q(q-1)$	
u_5	$\frac{1}{6}q(q-1)$	$\frac{1}{3}q(q+2)$	
u_6			
k_2	$-\frac{1}{2}(q-1)^2$		$q(q+1)$
$k_{2,1}$	$\frac{1}{2}(q-1)$		q
$k_{2,2}$	$\frac{1}{2}(q-1)$		
$k_{2,3}$	$-\frac{1}{2}(q+1)$		
$k_{2,4}$	$\frac{1}{2}(q-1)$		
k_3	$\frac{1}{3}(q+1)(q-1)^2$	$-\frac{1}{3}(q+1)(q-1)^2$	$q(q+1)$
$k_{3,1}$	$-\frac{1}{3}(q-1)$	$\frac{1}{3}(q-1)$	q
$k_{3,2}$	$\frac{1}{3}(2q+1)$	$\frac{1}{3}(q-1)$	
$k_{3,3,1}$	$-\frac{1}{3}(q-1)$	$\frac{1}{3}(q-1)+q\omega^k$	
$k_{3,3,2}$	$-\frac{1}{3}(q-1)$	$\frac{1}{3}(q-1)+q\omega^{-k}$	
h_{1a}			$q\omega_i$
$h_{1a,1}$			
h_{1b}			$q+1$
$h_{1b,1}$			1
h_{2a}	$q-1$		$-q-1$
$h_{2a,1}$	-1		-1
h_{2b}	$q-1$		
$h_{2b,1}$	-1		
h_1			ω_{i-j}
h_2	-2		
h_a			$-\omega_i$
h_b			
h_3	1	-1	ω_i
h_6		1	

	X_{32}	X_{33}	X_{21}
1	$(q+1)(q^2-q+1)$	$q(q+1)^2(q^2-q+1)$	$q^2(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	1	$q(q+1)$	q^2
u_2	$q+1$	$q(q+1)$	q^2
u_3	$2q+1$	q	
u_4	1	q	
u_5	$-q+1$	q	
u_6	1		
k_2	$q+1$	$(q+1)^2$	$q(q+2\delta)$
$k_{2,1}$	1	$q+1$	$q\delta$
$k_{2,2}$	$q+1$	$q+1$	$q\delta$
$k_{2,3}$	1	1	
$k_{2,4}$	1	1	
k_3	$q(q+1)$	$(q+1)(q^2+1)$	$q(q^2+q+1)$
$k_{3,1}$	q	$q+1$	q
$k_{3,2}$		1	
$k_{3,3,1}$		1	
$k_{3,3,2}$		1	
h_{1a}	ω_i	$q\omega_i+\omega_i$	$q(-1)^i+q+(-1)^i$
$h_{1a,1}$	ω_i	ω_i	$(-1)^i$
h_{1b}	$q+1$	$2q+2$	$q(-1)^i+q+(-1)^i$
$h_{1b,1}$	1	2	$(-1)^i$
h_{2a}	$q+1$		$-q-q(-1)^i+(-1)^i$
$h_{2a,1}$	1		$(-1)^i$
h_{2b}			$-q-q(-1)^i+(-1)^i$
$h_{2b,1}$			$(-1)^i$
h_1	ω_{i-j}	$2\omega_{i-j}$	$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$
h_2			$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$
h_a	ω_i		$-(-1)^i$
h_b			$-(-1)^i$
h_3	ω_i	$-\omega_i$	
h_6			

	X_{22}	X_{23}	X_{24}
1	$(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$q(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$q(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	q^2+1	$q(q^2+1)$	q
u_2	q^2+1	q	$2q$
u_3	1	q	$3q$
u_4	1	q	q
u_5	1	q	
u_6	1		
k_2	$2q\delta+1$	$q^2\delta+q+\delta$	$q^2\delta+q+\delta$
$k_{2,1}$	$q\delta+1$	$q+\delta$	δ
$k_{2,2}$	$q\delta+1$	δ	$q+\delta$
$k_{2,3}$	1	δ	δ
$k_{2,4}$	1	δ	δ
k_3	q^2+q+1	q^2+q+1	$q(q^2+q+1)$
$k_{3,1}$	$q+1$	$q+1$	q
$k_{3,2}$	1	1	
$k_{3,3,1}$	1	1	
$k_{3,3,2}$	1	1	
h_{1a}	$q(-1)^i+(-1)^i+1$	$q(-1)^i+q+(-1)^i$	$q(-1)^i+(-1)^i+1$
$h_{1a,1}$	$(-1)^i+1$	$(-1)^i$	$(-1)^i+1$
h_{1b}	$q(-1)^i+(-1)^i+1$	$q(-1)^i+(-1)^i+1$	$q(-1)^i+q+(-1)^i$
$h_{1b,1}$	$(-1)^i+1$	$(-1)^i+1$	$(-1)^i$
h_{2a}	$-q(-1)^i+1+(-1)^i$	$q(-1)^i-1-(-1)^i$	$q(-1)^i+q-(-1)^i$
$h_{2a,1}$	$(-1)^i+1$	$-1-(-1)^i$	$-(-1)^i$
h_{2b}	$-q(-1)^i+1+(-1)^i$	$q(-1)^i+q-(-1)^i$	$q(-1)^i-1-(-1)^i$
$h_{2b,1}$	$(-1)^i+1$	$-(-1)^i$	$-1-(-1)^i$
h_1	$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$	$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$	$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$
h_2	$(-1)^{i+j}+(-1)^j+(-1)^i$	$-(-1)^{i+j}-(-1)^j-(-1)^i$	$-(-1)^{i+j}-(-1)^j-(-1)^i$
h_a	$(-1)^i$	$-(-1)^i$	$(-1)^i$
h_b	$(-1)^i$	$(-1)^i$	$-(-1)^i$
h_3			
h_6			

	X_{1a}	X'_{1a}
1	$q(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	$q(q^2+q+1)$	q^2+q+1
u_2	$q(q+1)$	$(q+1)^2$
u_3	q	$3q+1$
u_4	q	$q+1$
u_5	q	1
u_6		1
k_2	$(q+1)(q(-1)^k+q+(-1)^k)$	$(q+1)(q(-1)^k+(-1)^k+1)$
$k_{2,1}$	$q(-1)^k+q+(-1)^k$	$q(-1)^k+(-1)^k+1$
$k_{2,2}$	$(q+1)(-1)^k$	$((-1)^k+1)(q+1)$
$k_{2,3}$	$(-1)^k$	$(-1)^k+1$
$k_{2,4}$	$(-1)^k$	$(-1)^k+1$
k_3	$(q+1)(q^2+q+1)$	$(q+1)(q^2+q+1)$
$k_{3,1}$	$2q+1$	$2q+1$
$k_{3,2}$	1	1
$k_{3,3,1}$	1	1
$k_{3,3,2}$	1	1
h_{1a}	$q\gamma_{ik}+q\gamma_{2ik}+\gamma_{ik}$	$q\gamma_{ik}+\gamma_{ik}+\gamma_{2ik}$
$h_{1a,1}$	γ_{ik}	$\gamma_{ik}+\gamma_{2ik}$
h_{1b}	$(q+1)(\gamma_{3ik}+1)$	$(q+1)(\gamma_{3ik}+1)$
$h_{1b,1}$	$\gamma_{3ik}+1$	$\gamma_{3ik}+1$
h_{2a}	$-q-1$	$q+1$
$h_{2a,1}$	-1	1
h_{2b}		
$h_{2b,1}$		
h_1	$\gamma_{ik+2jk}+\gamma_{2ik+jk}+\gamma_{ik-jk}$	$\gamma_{ik+2jk}+\gamma_{2ik+jk}+\gamma_{ik-jk}$
h_2		
h_a	$-\gamma_{ik}$	γ_{ik}
h_b		
h_3		
h_6		

	X_{1b}	X'_{1b}
1	$q(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	$q(q+1)$	$(q+1)(q^2+1)$
u_2	$q(q+2)$	q^2+q+1
u_3	$3q$	$q+1$
u_4	q	$q+1$
u_5		$q+1$
u_6		1
k_2	$(q+1)(q(-1)^k+q+(-1)^k)$	$(q+1)(q(-1)^k+(-1)^k+1)$
$k_{2,1}$	$(q+1)(-1)^k$	$((-1)^k+1)(q+1)$
$k_{2,2}$	$q(-1)^k+q+(-1)^k$	$q(-1)^k+(-1)^k+1$
$k_{2,3}$	$(-1)^k$	$(-1)^k+1$
$k_{2,4}$	$(-1)^k$	$(-1)^k+1$
k_3	$q(q^2+q+1)\omega_k$	$(q^2+q+1)\omega_k$
$k_{3,1}$	$q\omega_k$	$(q+1)\omega_k$
$k_{3,2}$		ω_k
$k_{3,3,1}$		ω_k
$k_{3,3,2}$		ω_k
h_{1a}	$(q+1)(\gamma_{ik}+1)$	$(q+1)(\gamma_{ik}+1)$
$h_{1a,1}$	$\gamma_{ik}+1$	$\gamma_{ik}+1$
h_{1b}	$q\gamma_{ik}+q\gamma_{2ik}+\gamma_{ik}$	$q\gamma_{ik}+\gamma_{ik}+\gamma_{2ik}$
$h_{1b,1}$	γ_{ik}	$\gamma_{ik}+\gamma_{2ik}$
h_{2a}		
$h_{2a,1}$		
h_{2b}	$-q-1$	$q+1$
$h_{2b,1}$	-1	1
h_1	$\gamma_{ik}+\gamma_{jk}+\gamma_{ik+jk}$	$\gamma_{ik}+\gamma_{jk}+\gamma_{ik+jk}$
h_2		
h_a		
h_b	$-\gamma_{ik}$	γ_{ik}
h_3		
h_6		

	X_{2a}	X'_{2a}
1	$q(q-1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$(q-1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	$q(q-1)$	$(q-1)(q^2+1)$
u_2	$q(q-2)$	$-q^2+q-1$
u_3	$-3q$	$q-1$
u_4	$-q$	$q-1$
u_5		$q-1$
u_6		-1
k_2	$(q-1)(q(-1)^k-(-1)^k+q)$	$-(q-1)(q(-1)^k-(-1)^k-1)$
$k_{2,1}$	$-(q-1)(-1)^k$	$((-1)^k+1)(q-1)$
$k_{2,2}$	$-q(-1)^k-q+(-1)^k$	$q(-1)^k-(-1)^k-1$
$k_{2,3}$	$(-1)^k$	$-(-1)^k-1$
$k_{2,4}$	$(-1)^k$	$-(-1)^k-1$
k_3		
$k_{3,1}$		
$k_{3,2}$		
$k_{3,3,1}$		
$k_{3,3,2}$		
h_{1a}	$q-1$	$q-1$
$h_{1a,1}$	-1	-1
h_{1b}		
$h_{1b,1}$		
h_{2a}	$-q\eta_{ik}-q\eta_{2ik}+\eta_{ik}$	$q\eta_{ik}-\eta_{ik}-\eta_{2ik}$
$h_{2a,1}$	η_{ik}	$-\eta_{ik}-\eta_{2ik}$
h_{2b}	$-(q-1)(\eta_{ik}+1)$	$(q-1)(\eta_{ik}+1)$
$h_{2b,1}$	$\eta_{ik}+1$	$-\eta_{ik}-1$
h_1		
h_2	$\eta_{ik}+\eta_{jk}+\eta_{ik+jk}$	$-\eta_{ik}-\eta_{jk}-\eta_{ik+jk}$
h_a	$-\eta_{ik}$	$-\eta_{ik}$
h_b		
h_3		
h_6		

	X_{2b}	X'_{2b}
1	$q(q-1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$(q-1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$
u_1	$-q(q^2-q+1)$	$-q^2+q-1$
u_2	$q(q-1)$	$-(q-1)^2$
u_3	$-q$	$3q-1$
u_4	$-q$	$q-1$
u_5	$-q$	-1
u_6		-1
k_2	$(q-1)(q(-1)^k-(-1)^k+q)$	$-(q-1)(q(-1)^k-(-1)^k-1)$
$k_{2,1}$	$-q(-1)^k-q+(-1)^k$	$q(-1)^k-(-1)^k-1$
$k_{2,2}$	$-(q-1)(-1)^k$	$((-1)^k+1)(q-1)$
$k_{2,3}$	$(-1)^k$	$-(-1)^k-1$
$k_{2,4}$	$(-1)^k$	$-(-1)^k-1$
k_3	$(q-1)(q^2+q+1)$	$(q-1)(q^2+q+1)$
$k_{3,1}$	-1	-1
$k_{3,2}$	-1	-1
$k_{3,3,1}$	-1	-1
$k_{3,3,2}$	-1	-1
h_{1a}		
$h_{1a,1}$		
h_{1b}	$q-1$	$q-1$
$h_{1b,1}$	-1	-1
h_{2a}	$-(q-1)(\eta_{3ik}+1)$	$(q-1)(\eta_{3ik}+1)$
$h_{2a,1}$	$\eta_{3ik}+1$	$-\eta_{3ik}-1$
h_{2b}	$-q\eta_{ik}-q\eta_{2ik}+\eta_{ik}$	$q\eta_{ik}-\eta_{ik}-\eta_{2ik}$
$h_{2b,1}$	η_{ik}	$-\eta_{ik}-\eta_{2ik}$
h_1		
h_2	$\eta_{ik+2jk}+\eta_{2ik+jk}+\eta_{ik-jk}$	$-\eta_{ik+2jk}-\eta_{2ik+jk}-\eta_{ik-jk}$
h_a		
h_b	$-\eta_{ik}$	$-\eta_{ik}$
h_3		
h_6		

	X_1	X_2
1	$(q+1)(q^2+q+1)(q^3+1)$	$(q-1)(q^2-q+1)(q^3-1)$
u_1	$(q+1)(q^2+q+1)$	$-(q-1)(q^2-q+1)$
u_2	$(q+1)(2q+1)$	$(q-1)(2q-1)$
u_3	$4q+1$	$-4q+1$
u_4	$2q+1$	$-2q+1$
u_5	$q+1$	$-q+1$
u_6	1	1
k_2	$(q+1)^2((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$	$(q-1)^2((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$
$k_{2,1}$	$(q+1)((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$	$-(q-1)((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$
$k_{2,2}$	$(q+1)((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$	$-(q-1)((-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l})$
$k_{2,3}$	$(-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l}$	$(-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l}$
$k_{2,4}$	$(-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l}$	$(-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l}$
k_3	$(q+1)(q^2+q+1)\omega_{k+l}$	
$k_{3,1}$	$(2q+1)\omega_{k+l}$	
$k_{3,2}$	ω_{k+l}	
$k_{3,3,1}$	ω_{k+l}	
$k_{3,3,2}$	ω_{k+l}	
h_{1a}	$(q+1)(\gamma_{ik}+\gamma_{il}+\gamma_{i(k-l)})$	
$h_{1a,1}$	$\gamma_{ik}+\gamma_{il}+\gamma_{i(k-l)}$	
h_{1b}	$(q+1)(\gamma_{i(k+l)}+\gamma_{i(k-2l)}+\gamma_{i(l-2k)})$	
$h_{1b,1}$	$\gamma_{i(k+l)}+\gamma_{i(k-2l)}+\gamma_{i(l-2k)}$	
h_{2a}		$-(q-1)(\eta_{i(k+l)}+\eta_{i(k-2l)}+\eta_{i(l-2k)})$
$h_{2a,1}$		$\eta_{i(k+l)}+\eta_{i(k-2l)}+\eta_{i(l-2k)})$
h_{2b}		$-(q-1)(\eta_{ik}+\eta_{il}+\eta_{i(k-l)})$
$h_{2b,1}$		$\eta_{ik}+\eta_{il}+\eta_{i(k-l)}$
h_1	$\gamma_{ik+jl}+\gamma_{il+jk}+\gamma_{i(k-l)-jl}+$ $\gamma_{il-j(k-l)}+\gamma_{i(k-l)+jk}+\gamma_{ik+j(k-l)}$	
h_2		$\eta_{ik+jl}+\eta_{il+jk}+\eta_{i(k-l)-jl}+$ $\eta_{il-j(k-l)}+\eta_{i(k-l)+jk}+\eta_{ik+j(k-l)}$
h_a		
h_b		
h_3		
h_6		

	X_a	X_b	X_3	X_6
1	q^6-1	q^6-1	$(q-1)(q^2-1)(q^3+1)$	$(q+1)(q^2-1)(q^3-1)$
u_1	q^3-1	$-q^3-1$	$(q-1)(q^2-1)$	$-(q+1)(q^2-1)$
u_2	$-q-1$	$q-1$	$-q^2+1$	$-q^2+1$
u_3	$-2q-1$	$2q-1$	$q+1$	$-q+1$
u_4	-1	-1	$-q+1$	$q+1$
u_5	$q-1$	$-q-1$	$-2q+1$	$2q+1$
u_6	-1	-1	1	1
k_2	$(q^2-1)(-1)^k$	$(q^2-1)(-1)^k$		
$k_{2,1}$	$(q-1)(-1)^k$	$-(q+1)(-1)^k$		
$k_{2,2}$	$-(q+1)(-1)^k$	$(q-1)(-1)^k$		
$k_{2,3}$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$		
$k_{2,4}$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$		
k_3		$(q^3-1)\omega_k$	$(q-1)(q^2-1)\omega_k$	
$k_{3,1}$		$-\omega_k$	$(-q+1)\omega_k$	
$k_{3,2}$		$-\omega_k$	ω_k	
$k_{3,3,1}$		$-\omega_k$	ω_k	
$k_{3,3,2}$		$-\omega_k$	ω_k	
h_{1a}	$(q-1)\gamma_{ik}$			
$h_{1a,1}$	$-\gamma_{ik}$			
h_{1b}		$(q-1)\gamma_{ik}$		
$h_{1b,1}$		$-\gamma_{ik}$		
h_{2a}	$-(q+1)\eta_{ik}$			
$h_{2a,1}$	$-\eta_{ik}$			
h_{2b}		$-(q+1)\eta_{ik}$		
$h_{2b,1}$		$-\eta_{ik}$		
h_1				
h_2				
h_a	$-\theta_{ik}-\theta_{qik}$			
h_b		$-\theta_{ik}-\theta_{qik}$		
h_3			$\tau_{ik}+\tau_{qik}+\tau_{q^2ik}$	
h_6				$\sigma_{ik}+\sigma_{qik}+\sigma_{q^2ik}$

B.4 Die Jordan Zerlegung der Charaktere

Die folgende Tabelle stellt die verschiedenen Notationen für die irreduziblen Charaktere der $G_2(q)$ nebeneinander und übersetzt diese in die Sprache der Jordan-Zerlegung von Charakteren. Dabei ist ε gleich 0, 1 oder -1, entsprechend der Kongruenz von q modulo 3.

Repräsentant der halbeinfachen Klasse	Parameter	Zentralisator	Bemerkungen
$h(1,1,1)$		$G_2(q)$	Unipotente Charaktere
$h(-1,-1,1)$		$(SL_2(q) * SL_2(q)) \cdot 2$	nur für $2 \not| q$
$h(\omega,\omega,\omega)$	$\omega^3 = 1$ $\omega \neq 1$	$SL_3(q), \varepsilon = 1$ $SU_3(q^2), \varepsilon = -1$	nur für $3 \not| q$
$h(z,1,z^{-1})$	$z^{q-1} = 1$ $z^2 \neq 1$	$GL_2(q)$	
$h(z,z,z^{-2})$	$z^{q-1} = 1$ $z^2 \neq 1,\ z^3 \neq 1$	$GL_2(q)$	
$h(z,z^{-2},z)$	$z^{q+1} = 1$ $z^2 \neq 1,\ z^3 \neq 1$	$U_2(q^2)$	
$h(z,z^{-1},1)$	$z^{q+1} = 1$ $z^2 \neq 1$	$U_2(q^2)$	
$h(z_1,z_2,z_3)$	$z_i^{q-1} = 1$ $z_i z_j^{\pm 1} \neq 1$	$\mathcal{H}_1$	Reguläre Klasse
$h(z_1,z_2,z_3)$	$z_i^{q+1} = 1$ $z_i z_j^{\pm 1} \neq 1$	$\mathcal{H}_2$	Reguläre Klasse
$h(z^q,z^{1-q},z^{-1})$	$z^{q^2-1} = 1$ $z^{q\pm 1} \neq 1$	$\mathcal{H}_a$	Reguläre Klasse
$h(z,z^q,z^{-q-1})$	$z^{q^2-1} = 1$ $z^{q\pm 1} \neq 1$	$\mathcal{H}_b$	Reguläre Klasse
$h(z,z^q,z^{q^2})$	$z^{q^2+q+1} = 1$ $z^3 \neq 1$	$\mathcal{H}_3$	Reguläre Klasse
$h(z,z^{-q},z^{q^2})$	$z^{q^2-q+1} = 1$ $z^3 \neq 1$	$\mathcal{H}_6$	Reguläre Klasse

Grade der unipotenten Charaktere des Zentarlisators	Enomoto-Yamada $2 \mid q$	Enomoto $3 \mid q$	Chang-Ree $2,\ 3 \nmid q$
1	ϑ_0	ϑ_0	X_{11}
q^6	ϑ_5	ϑ_5	X_{12}
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	ϑ_3	ϑ_3	X_{13}
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	ϑ_4	ϑ_4	X_{14}
$\frac{1}{2}q(q+1)^2(q^2-q+1)$	ϑ_2	ϑ_2	X_{15}
$\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$	ϑ_1	ϑ_1	X_{16}
$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$	ϑ_2'	ϑ_{11}	X_{17}
$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$	ϑ_1'	ϑ_{10}	X_{18}
$\frac{1}{3}q(q^2-1)^2$	$\vartheta_9(1)$	$\vartheta_{12}(1)$	X_{19}
$\frac{1}{3}q(q^2-1)^2$	$\vartheta_9(2)$	$\vartheta_{12}(-1)$	$\bar{X}_{19}$
1		ϑ_6	X_{22}
q		ϑ_8	X_{23}
q		ϑ_9	X_{24}
q^2		ϑ_7	X_{21}
1	ϑ_6		X_{32}
$q(q+\varepsilon)$	ϑ_8		X_{33}
q^3	ϑ_7		X_{31}
1	$\chi_3(k)$	$\chi_3(k)$	X_{1b}'
q	$\chi_4(k)$	$\chi_4(k)$	X_{1b}
1	$\chi_1(k)$	$\chi_1(k)$	X_{1a}'
q	$\chi_2(k)$	$\chi_2(k)$	X_{1a}
1	$\chi_1'(k)$	$\chi_5(k)$	X_{2b}'
q	$\chi_2'(k)$	$\chi_6(k)$	X_{2b}
1	$\chi_3'(k)$	$\chi_7(k)$	X_{2a}'
q	$\chi_4'(k)$	$\chi_8(k)$	X_{2a}
1	$\chi_5(k,l)$	$\chi_9(k,l)$	$X_1(\pi_1)$
1	$\chi_5'(k,l)$	$\chi_{12}(k,l)$	$X_2(\pi_2)$
1	$\chi_6'(k)$	$\chi_{11}(k)$	$X_b(\pi_b)$
1	$\chi_6(k)$	$\chi_{10}(k)$	$X_a(\pi_a)$
1	$\chi_7(k)$	$\chi_{13}(k)$	$X_3(\pi_3)$
1	$\chi_7'(k)$	$\chi_{14}(k)$	$X_6(\pi_6)$

Anhang C

Zerlegungszahlen der $G_2(q)$

C.1 Erläuterungen zu den Tafeln

Wir beginnen mit einigen Erläuterungen zu den folgenden Tafeln. Ist A ein ℓ-Block von $G = G_2(q)$, etwa $A \subseteq \mathcal{E}_\ell(G, s)$, dann heißen die Charaktere in $A \cap \mathcal{E}(G, s)$ die *nicht-exzeptionellen Charaktere* von A. Die übrigen sind die *exzeptionellen Charaktere*. Die nicht-exzeptionellen Charaktere des Hauptblockes sind genau die unipotenten, die darin enthalten sind. Die Einschränkungen der nicht-exzeptionellen Charaktere eines Blockes auf die ℓ'-Klassen erzeugen die Gruppe der verallgemeinerten Brauercharaktere. Im allgemeinen bilden sie zwar kein Basissystem, jedoch enthalten sie stets ein solches. Die Zerlegung der Charaktere eines solchen ausgewählten Basissystems ist in der oberen Hälfte der folgenden Zerlegungsmatrizen angegeben.

Die exzeptionellen Charaktere können zu Familien zusammengefaßt werden. Die Charaktere einer Familie haben alle die gleiche Einschränkung auf die ℓ'-Klassen. Deshalb ist jeweils nur eine Zeile pro Familie angegeben. Die Familien sind in den folgenden Tabellen durch geschweifte Klammern um die Namen der Charaktere gekennzeichnet. Die Anzahl der Charaktere einer Familie ist in der letzten Spalte der Zerlegungsmatrizen angegeben. Der Exponent d, der in diesen Formeln vorkommt, ist im allgemeinen nicht der Defekt des Blockes. Allerdings hängt er eng mit diesem zusammen; seine Definition ist in der Blocküberschrift angegeben. Die erste Spalte einer Zerlegungsmatrix gibt die Grade der gewöhnlichen Charaktere an.

Einträge, die nicht bestimmt werden konnten, sind durch griechische Buchstaben bezeichnet. Schranken für solche Unbestimmten sind unterhalb jeder Zerlegungsmatrix angegeben.

Weiter folgen in einer extra Tabelle die Grade der irreduziblen Brauercharaktere, sofern diese nicht trivial aus den Zerlegungsmatrizen zu bestimmen sind. Blöcke, die nur einen irreduziblen Brauercharakter enthalten, sind nicht aufgeführt. Für die vollständige Aufzählung der ℓ-Blöcke verweisen wir auf die Arbeiten von Shamash [80, 81, 82, 83], sowie auf die Arbeiten von Shamash und dem Autor [52, 51] für $\ell = 2, 3$. Shamash hat in ihren Arbeiten auch die Brauerbäume für Blöcke mit zyklischer Defektgruppe bestimmt.

Es zeigt sich, daß in der $G_2(q)$, einem Beispiel von kleinem Rang, die geometrischen Konjugiertenklassen $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ von ℓ-Blöcken fast immer volle ℓ-Blöcke sind. Ausnahmen gibt es für $s = 1$, also für die unipotenten Blöcke. Hier gilt jedoch, daß $\mathcal{E}_\ell(G, 1)$ nach Weglassen der Defekt Null Charaktere den Hauptblock bildet. Diese Menge wird mit $\mathcal{E}_\ell(G, 1)'$ bezeichnet. Stets ist die Jordan-Zerlegung der Brauercharaktere erfüllt. Diesem Umstand wird dadurch Rechnung getragen, daß in Blöcken $\mathcal{E}_\ell(G, s)$ mit $s \neq 1$ die Grade der Charaktere gemäß der Faktorisierung 4.7 aufgelistet sind.

Die Bezeichnung der Blöcke folgt Shamashs Notation. Ein Vergleich mit der Schreibweise von Broué und Michel aus Kapitel 4 findet sich in der folgenden Tabelle:

Shamash	Broué–Michel
B_1	$\mathcal{E}_\ell(G, 1)'$
B_2	$\mathcal{E}_\ell(G, h(-1, -1, 1))$
B_3	$\mathcal{E}_\ell(G, h(\omega, \omega, \omega))$
B_{1a}	$\mathcal{E}_\ell(G, h_{1b})$
B_{1b}	$\mathcal{E}_\ell(G, h_{1a})$
B_{2a}	$\mathcal{E}_\ell(G, h_{2b})$
B_{2b}	$\mathcal{E}_\ell(G, h_{2a})$

Die untenstehende Tafel gibt die Anzahl der Blöcke vom Typ B_{ic}, $i = 1, 2$, $c = a, b$, für alle möglichen Fälle an, in denen diese positiven Defekt haben. Dabei verwenden wir folgende Bezeichnungen: $q(n)$ steht für die Kongruenz von q modulo n. In den Zeilen, die zu einer festen Primzahl ℓ gehören, steht $\underline{r}$ für die höchste Potenz von ℓ, die $q - 1$ teilt. Analog ist $\bar{r}$ die höchste Potenz von ℓ, die $q + 1$ teilt.

ℓ	$q(4)$	$q(3)$	B_{1a}	B_{1b}	B_{2a}	B_{2b}
2	1	1	$(\underline{r}-3)/2$	$(\underline{r}-1)/2$	$(q-1)/4$	$(q-1)/4$
		0	$(\underline{r}-1)/2$			$(q-1)/4$
		-1	$(\underline{r}-1)/2$			$(q-5)/4$
	-1	1	$(q-7)/4$	$(q-3)/4$	$(\bar{r}-1)/2$	$(\bar{r}-1)/2$
		0	$(q-3)/4$			$(\bar{r}-1)/2$
		-1	$(q-3)/4$			$(\bar{r}-3)/2$
3	$0, 2$	1	$(\underline{r}-1)/2$		$q/2$	
		-1	$(q-2)/2$		$(\bar{r}-1)/2$	
	$1, -1$	1	$(\underline{r}-2)/2$		$(q-1)/2$	
		-1	$(q-3)/2$		$(\bar{r}-2)/2$	
$\ell \mid q-1$, $\ell \neq 2, 3$	0	1	$(\underline{r}-3)/2$	$(\underline{r}-1)/2$	$q/2$	$q/2$
		0	$(\underline{r}-1)/2$			$q/2$
		-1	$(\underline{r}-1)/2$			$(q-2)/2$
	$1, -1$	1	$(\underline{r}-4)/2$	$(\underline{r}-2)/2$	$(q-1)/2$	$(q-1)/2$
		0	$(\underline{r}-2)/2$			$(q-1)/2$
		-1	$(\underline{r}-2)/2$			$(q-3)/2$
$\ell \mid q+1$, $\ell \neq 2, 3$	0	1	$(q-4)/2$	$(q-2)/2$	$(\bar{r}-1)/2$	$(\bar{r}-1)/2$
		0	$(q-2)/2$			$(\bar{r}-1)/2$
		-1	$(q-2)/2$			$(\bar{r}-3)/2$
	$1, -1$	1	$(q-5)/2$	$(q-3)/2$	$(\bar{r}-2)/2$	$(\bar{r}-2)/2$
		0	$(q-3)/2$			$(\bar{r}-2)/2$
		-1	$(q-3)/2$			$(\bar{r}-4)/2$

In allen folgenden Tabellen sind fehlende Einträge durch 0 zu ersetzen. Durch die Schreibweise $\ell^d \parallel n$ wird angezeigt, daß ℓ^d die höchste Potenz von ℓ ist, die die natürliche Zahl n teilt.

C.2 Hauptblöcke

Primzahl: $\ell = 2$, $2^d \parallel q-1$ **Kongruenz**: $4 \mid q-1$ **Block**: B_1

Grad	Char.	φ_{11}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{12}	Anzahl
1	X_{11}	1							1
$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$	X_{17}		1						1
$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$	X_{18}			1					1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{13}	1			1				1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{14}	1				1			1
$\frac{1}{2}q(q+1)^2(q^2-q+1)$	X_{15}		1				1		1
q^6	X_{12}	1	α	β	1	1		1	1
$\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$	X_{16}			1			1		1
(q^4+q^2+1)	$\{X_{22}\}$	1					1		1
$q(q^4+q^2+1)$	$\{X_{23}\}$	1	1	1		1	1		1
$q(q^4+q^2+1)$	$\{X_{24}\}$	1	1	1	1		1		1
$q^2(q^4+q^2+1)$	$\{X_{21}\}$	1	α	β	1	1	1	1	1
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{1a}\}$	2	1	1	1		2		$\frac{1}{2}(2^d-2)$
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{1a}\}$	2	$\alpha+1$	$\beta+1$	1	2	2	1	$\frac{1}{2}(2^d-2)$
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{1b}\}$	2	1	1		1	2		$\frac{1}{2}(2^d-2)$
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{1b}\}$	2	$\alpha+1$	$\beta+1$	2	1	2	1	$\frac{1}{2}(2^d-2)$
$(q^2-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_a\}$		α	β		2		1	$\frac{1}{4}2^d$
$(q^2-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_b\}$		α	β	2			1	$\frac{1}{4}2^d$
$(q+1)^2(q^4+q^2+1)$	$\{X_1\}$	4	$\alpha+2$	$\beta+2$	2	2	4	1	$\frac{1}{12}(2^d-2)(2^d-4)$

Bemerkungen

- $0 \le \alpha \le q-1$, falls $3 \nmid q$; $0 \le \alpha \le 2q$ für $3 \mid q$.
- $0 \le \beta \le \frac{1}{3}(q+2)$.
- $\varphi_{12}(1) \ge \frac{1}{3}(q-1)^2(q+1)(q^3+2q^2+q+3)$, für $3 \nmid q$.
- $\varphi_{12}(1) \ge \frac{1}{3}(q-1)^2(q^3+2q^2+4q+3)$ für $3 \mid q$.

Grade der irreduziblen Brauercharaktere

Char.	Grad
φ_{11}	1
φ_{17}	$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$
φ_{18}	$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$
φ_{13}	$\frac{1}{3}(q-1)(q^4+q^3+2q^2+2q+3)$
φ_{14}	$\frac{1}{3}(q-1)(q^4+q^3+2q^2+2q+3)$
φ_{15}	$q^2(q^2+1)$
φ_{12}	$\frac{1}{6}(q-1)^2(6q^4+(8-3\alpha-\beta)q^3+(10-3\alpha+\beta)q^2+(8-3\alpha-\beta)q+6)$

Primzahl: $\ell = 2,\ 2^d \parallel q+1$ **Kongruenz**: $4 \mid q+1$ **Block**: B_1

Grad	Char.	φ_{11}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{12}	Anzahl
1	X_{11}	1							1
$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$	X_{17}		1						1
$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$	X_{18}			1					1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{13}	1			1				1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{14}	1				1			1
$\frac{1}{2}q(q+1)^2(q^2-q+1)$	X_{15}		1				1		1
q^6	X_{12}	1	α	β	1	1		1	1
$\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$	X_{16}			1			1		1
(q^4+q^2+1)	$\{X_{22}\}$	1					1		1
$q(q^4+q^2+1)$	$\{X_{23}\}$	1	1	1		1	1		1
$q(q^4+q^2+1)$	$\{X_{24}\}$	1	1	1	1		1		1
$q^2(q^4+q^2+1)$	$\{X_{21}\}$	1	α	β	1	1	1	1	1
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{2a}\}$		1	1		1			$\frac{1}{2}(2^d-2)$
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{2a}\}$		$\alpha-1$	$\beta-1$		1		1	$\frac{1}{2}(2^d-2)$
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{2b}\}$		1	1	1				$\frac{1}{2}(2^d-2)$
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{2b}\}$		$\alpha-1$	$\beta-1$	1			1	$\frac{1}{2}(2^d-2)$
$(q^2-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_a\}$		α	β		2		1	$\frac{1}{4}2^d$
$(q^2-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_b\}$		α	β	2			1	$\frac{1}{4}2^d$
$(q-1)^2(q^4+q^2+1)$	$\{X_2\}$		$\alpha-2$	$\beta-2$				1	$\frac{1}{12}(2^d-2)(2^d-4)$

Bemerkungen

- $1 \leq \alpha \leq q-1$ falls $3 \nmid q$; $1 \leq \alpha \leq 2q$ für $3 \mid q$.
- $1 \leq \beta \leq \frac{1}{3}(q+2)$.
- Im Fall $q = 3$ ist $\beta = 1$. A. Ryba hat mit Hilfe einer Erweiterung von R. Parkers MEAT-AXE gezeigt, daß in diesem Falle $\alpha = 2$ ist.
- Für $q > 3$ sind die Grade der irreduziblen Brauercharaktere die gleichen wie im Fall $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$.

Primzahl: $\ell = 3$, $3^d \parallel q-1$ **Kongruenz**: $3 \mid q-1$ **Block**: B_1

Grad	Char.	φ_{11}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{12}	Anzahl
1	X_{11}	1							1
$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$	X_{18}		1						1
$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$	X_{19}			1					1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{14}		$\alpha+1$		1				1
$\frac{1}{2}q(q+1)^2(q^2-q+1)$	X_{15}	1				1			1
$\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$	X_{16}		α		1		1		1
q^6	X_{12}		β	γ		1		1	1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{13}			1			1		1
$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$	$\bar{X}_{19}$			1					1
q^3+1	$\{X_{32}\}$	1					1		1
$q(q+1)(q^3+1)$	$\{X_{33}\}$	1	α	1	1	1	1		1
$q^3(q^3+1)$	$\{X_{31}\}$		$\alpha+\beta+1$	$\gamma-1$	1	1		1	1
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{1a}\}$	2	α	1	1	1	2		$\frac{1}{2}(3^d-3)$
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{1a}\}$	1	$2\alpha+\beta+1$	γ	2	2	1	1	$\frac{1}{2}(3^d-3)$
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{1b}\}$	2	$2\alpha+1$		2	1	1		$\frac{1}{2}(3^d-1)$
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{1b}\}$	1	$\alpha+\beta$	$\gamma+1$	1	2	2	1	$\frac{1}{2}(3^d-1)$
$(q+1)^2(q^4+q^2+1)$	$\{X_1\}$	3	$3\alpha+\beta+1$	$\gamma+1$	3	3	3	1	$\frac{1}{12}(3^d-3)^2$

Bemerkungen

- $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq q-2$, $1 \leq \gamma \leq q+1$.
- Ist q eine 2-Potenz, so ist $\alpha = \beta = 0$.
- $\gamma = 1$ für $q = 4$ (K. Lux).
- $\varphi_{14}(1) \in \{\frac{1}{6}q(q^2-q+1)(q^2+4q+1), q^2(q^2-q+1)\}$.
- $\varphi_{12}(1) \geq \frac{1}{2}(q-1)^2(q^4+2q^3+3q+2)$.

Grade der irreduziblen Brauercharaktere

Char.	Grad
φ_{11}	1
φ_{18}	$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$
φ_{19}	$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$
φ_{14}	$\frac{1}{6}q(q^2-q+1)[(1-\alpha)q^2+(4+2\alpha)q+(1-\alpha)]$
φ_{15}	$\frac{1}{2}(q^5+q^4+q^2+q-2)$
φ_{16}	q^3
φ_{12}	$\frac{1}{6}(q-1)^2[6q^4+(9-\beta-2\gamma)q^3+(9+\beta-4\gamma)q^2+(9-\beta-2\gamma)q+6]$

Primzahl: $\ell = 3$, $3^d \parallel q+1$ **Kongruenz**: $3 \mid q+1$ **Block**: B_1

Grad	Char.	φ_{11}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{14}	φ_{17}	φ_{16}	φ_{12}	Anzahl
1	X_{11}	1							1
$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$	X_{18}		1						1
$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$	X_{19}			1					1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{14}	1	1		1				1
$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$	X_{17}					1			1
$\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$	X_{16}	2			1		1		1
q^6	X_{12}	1	α	β	1	γ	1	1	1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{13}	1		1			1		1
$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$	$\bar{X}_{19}$			1					1
q^3-1	$\{X_{32}\}$						1		1
$q(q-1)(q^3-1)$	$\{X_{33}\}$		1	1		1			1
$q^3(q^3-1)$	$\{X_{31}\}$		$\alpha-1$	$\beta+1$		γ	1	1	1
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{2a}\}$		2		1	1			$\frac{1}{2}(3^d-1)$
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{2a}\}$		$\alpha-1$	$\beta-1$	1	$\gamma-1$		1	$\frac{1}{2}(3^d-1)$
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{2b}\}$		1	1		1	1		$\frac{1}{2}(3^d-3)$
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{2b}\}$		$\alpha-2$	β		$\gamma-1$	1	1	$\frac{1}{2}(3^d-3)$
$(q-1)^2(q^4+q^2+1)$	$\{X_2\}$		$\alpha-3$	$\beta-1$		$\gamma-2$		1	$\frac{1}{12}(3^d-3)^2$

Bemerkungen

- $1 \leq \alpha \leq q+1$, $1 \leq \beta \leq q-1$, $1 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}q$.
- Im Falle $q=2$ ist $G_2(2) \cong U_3(3).2$ und wir haben $\alpha = \beta = \gamma = 1$.
- Ebenso ist $\alpha = \beta = \gamma = 1$ im Falle $q = 5$ (Lux, Parker).
- $\varphi_{12}(1) \geq \frac{1}{4}(q-1)^2(q+2)^2(q^2+q+1)$.

Grade der irreduziblen Brauercharaktere

Char.	Grad
φ_{11}	1
φ_{18}	$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$
φ_{19}	$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$
φ_{14}	$\frac{1}{6}(q^2-1)(q^3+3q^2-q+6)$
φ_{17}	$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$
φ_{16}	q^3-1
φ_{12}	$\frac{1}{6}(q-1)^2\ [6q^4+(11-\alpha-2\beta-3\gamma)q^3+(13+\alpha-4\beta-3\gamma)q^2$ $+(11-\alpha-2\beta-3\gamma)q+6]$

Primzahl: $\ell \mid q-1$, $l > 3$, $\ell^d \parallel q-1$ **Block**: B_1

Grad	Char.	φ_{11}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{12}	Anzahl
1	X_{11}	1						1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{13}		1					1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{14}			1				1
$\frac{1}{2}q(q+1)^2(q^2-q+1)$	X_{15}				1			1
$\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$	X_{16}					1		1
q^6	X_{12}						1	1
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{1a}\}$	1	1		1	1		$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{1a}\}$			1	1	1	1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{1b}\}$	1		1	1	1		$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{1b}\}$		1		1	1	1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$(q+1)^2(q^4+q^2+1)$	$\{X_1\}$	1	1	1	2	2	1	$\frac{1}{12}(\ell^d-1)(\ell^d-5)$

Primzahl: $\ell \mid q+1$, $\ell > 3$, $\ell^d \parallel q+1$ **Block**: B_1

Grad	Char.	φ_{11}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{12}	Anzahl
1	X_{11}	1						1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{13}	1	1					1
$\frac{1}{3}q(q^4+q^2+1)$	X_{14}	1		1				1
$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$	X_{17}				1			1
$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$	X_{18}					1		1
q^6	X_{12}	1	1	1	α	β	1	1
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{2a}\}$			1	1	1		$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{2a}\}$			1	$\alpha-1$	$\beta-1$	1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{2b}\}$		1		1	1		$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{2b}\}$		1		$\alpha-1$	$\beta-1$	1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$(q-1)^2(q^4+q^2+1)$	$\{X_2\}$				$\alpha-2$	$\beta-2$	1	$\frac{1}{12}(\ell^d-1)(\ell^d-5)$

Bemerkungen

- $1 \le \alpha \le \frac{1}{2}q$.
- $1 \le \beta \le \frac{1}{6}(q+2)$.
- Im Falle $q=4$ und $\ell=5$ ist $\alpha=2$ und $\beta=1$ (K. Lux und G. Hiß).
- $\varphi_{12}(1) > \frac{1}{3}(q-1)^2(q^4+2q^3+4q^2+3q+3)$.

Grade der irreduziblen Brauercharaktere

Char.	Grad
φ_{11}	1
φ_{13}	$\frac{1}{3}(q-1)(q^4+q^3+2q^2+2q+3)$
φ_{14}	$\frac{1}{3}(q-1)(q^4+q^3+2q^2+2q+3)$
φ_{17}	$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$
φ_{18}	$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$
φ_{12}	$\frac{1}{6}(q-1)^2(6q^4+(8-3\alpha-\beta)q^3+(10-3\alpha+\beta)q^2+(8-3\alpha-\beta)q+6)$

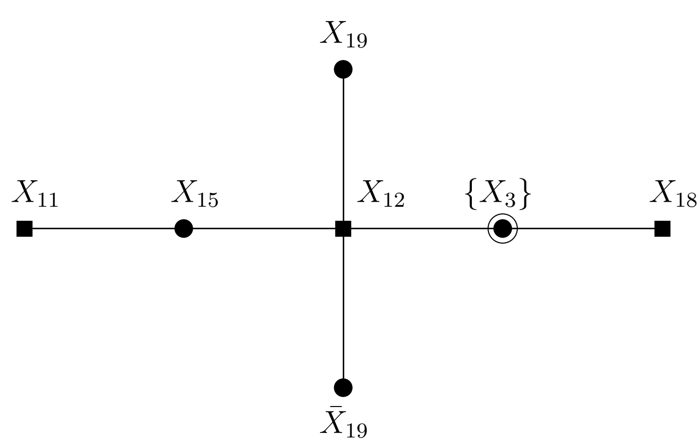
Primzahl: $\ell \mid q^2+q+1$, $\ell > 3$, $\ell^d \parallel q^2+q+1$ **Block**: B_1

Grad	Char.	φ_{11}	φ_{15}	φ_{18}	φ_{19}	$\bar{\varphi}_{19}$	φ_{12}	Anzahl
1	X_{11}	1						1
$\frac{1}{2}q(q+1)^2(q^2-q+1)$	X_{15}	1	1					1
$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$	X_{18}			1				1
$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$	X_{19}				1			1
$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$	$\bar{X}_{19}$					1		1
q^6	X_{12}		1		1	1	1	1
$(q^2-1)^2(q^2-q+1)$	$\{X_3\}$			1			1	$\frac{1}{6}(\ell^d-1)$

Grade der irreduziblen Brauercharaktere

Char.	Grad
φ_{11}	1
φ_{15}	$\frac{1}{2}(q^5+q^4+q^2+q-2)$
φ_{18}	$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$
φ_{19}	$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$
$\bar{\varphi}_{19}$	$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$
φ_{12}	$\frac{1}{6}(q-1)^2(q^2-q+1)(6q^2+11q+6)$

Brauerbaum



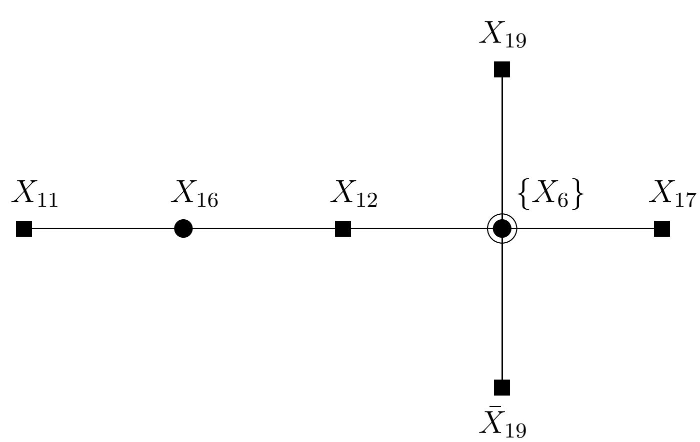
Primzahl: $\ell \mid q^2-q+1$, $\ell > 3$, $\ell^d \parallel q^2-q+1$ **Block**: B_1

Grad	Char.	φ_{11}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{19}	$\bar{\varphi}_{19}$	φ_{12}	Anzahl
1	X_{11}	1						1
$\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$	X_{16}	1	1					1
$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$	X_{17}			1				1
$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$	X_{19}				1			1
$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$	$\bar{X}_{19}$					1		1
q^6	X_{12}		1				1	1
$(q^2-1)^2(q^2+q+1)$	$\{X_6\}$			1	1	1	1	$\frac{1}{6}(\ell^d-1)$

Grade der irreduziblen Brauercharaktere

Char.	Grad
φ_{11}	1
φ_{16}	$\frac{1}{6}(q^5+3q^4+4q^3+3q^2+q-6)$
φ_{17}	$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$
φ_{19}	$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$
$\bar{\varphi}_{19}$	$\frac{1}{3}q(q-1)^2(q+1)^2$
φ_{12}	$\frac{1}{6}(q-1)^2(6q^4+11q^3+13q^2+11q+6)$

Brauerbaum



C.3 Die Blöcke B_3

Primzahl: $\ell = 2$, $2^d \parallel q-1$ **Kongruenz**en: $4 \mid q-1$, $3 \mid q-1$ **Block**: B_3

Grad	Char.	φ_{32}	φ_{33}	φ_{31}	Anzahl
(q^3+1)	X_{32}	1			1
$q(q+1)(q^3+1)$	X_{33}		1		1
$q^3(q^3+1)$	X_{31}	1		1	1
$(q^2+q+1)(q^3+1)$	$\{X'_{1a}\}$	1	1		2^d-1
$q(q^2+q+1)(q^3+1)$	$\{X_{1a}\}$	1	1	1	2^d-1
$(q-1)(q^2+q+1)(q^3+1)$	$\{X_a\}$			1	$\frac{1}{2}2^d$
$(q+1)(q^2+q+1)(q^3+1)$	$\{X_1\}$	2	2	1	$\frac{1}{6}(2^d-1)(2^d-2)$

Primzahl: $\ell = 2$, $2^d \parallel q-1$ **Kongruenz**en: $4 \mid q-1$, $3 \mid q+1$ **Block**: B_3

Grad	Char.	φ_{32}	φ_{33}	φ_{31}	Anzahl
(q^3-1)	X_{32}	1			1
$q(q-1)(q^3-1)$	X_{33}		1		1
$q^3(q^3-1)$	X_{31}	1	1	1	1
$(q^2-q+1)(q^3-1)$	$\{X'_{2b}\}$	1	1		1
$q(q^2-q+1)(q^3-1)$	$\{X_{2b}\}$	1		1	1
$(q+1)(q^2-q+1)(q^3-1)$	$\{X_b\}$	2	1	1	2^d-1

Bemerkung

Die Defektgruppe dieses Blocks ist eine 2-Sylowgruppe der zu $SU_3(q^2)$ isomorphen Untergruppe. Sie ist deshalb eine Semidiedergruppe der Ordnung 2^{d+2}. Blöcke mit einer solchen Defektgruppe und einer solchen Zerlegungsmatrix wurden von K. Erdmann in [26, Lemma 11.4] betrachtet.

Grade der irreduziblen Brauercharaktere

Char.	Grad
φ_{32}	(q^3-1)
φ_{33}	$q(q-1)(q^3-1)$
φ_{31}	$(q^2+1)(q-1)(q^3-1)$

Primzahl: $\ell = 2,\ 2^d \parallel q+1$ **Kongruenz**en: $4 \mid q+1,\ 3 \mid q-1$ **Block**: B_3

Grad	Char.	φ_{32}	φ_{33}	φ_{31}	Anzahl
(q^3+1)	X_{32}	1			1
$q(q+1)(q^3+1)$	X_{33}		1		1
$q^3(q^3+1)$	X_{31}	1		1	1
$(q^2+q+1)(q^3+1)$	$\{X'_{1a}\}$	1	1		1
$q(q^2+q+1)(q^3+1)$	$\{X_{1a}\}$	1	1	1	1
$(q-1)(q^2+q+1)(q^3+1)$	$\{X_a\}$			1	2^d-1

Bemerkung

Die Defektgruppe dieses Blocks ist eine 2-Sylowgruppe der Untergruppe, die isomorph zu $SL_3(q)$ ist. Sie ist deshalb eine Semidiedergruppe der Ordnung 2^{d+2}. Blöcke mit einer solchen Defektgruppe und einer solchen Zerlegungsmatrix wurden von K. Erdmann in [26, Lemma 11.6] betrachtet.

Primzahl: $\ell = 2,\ 2^d \parallel q+1$ **Kongruenz**en: $4 \mid q+1,\ 3 \mid q+1$ **Block**: B_3

Grad	Char.	φ_{32}	φ_{33}	φ_{31}	Anzahl
(q^3-1)	X_{32}	1			1
$q(q-1)(q^3-1)$	X_{33}		1		1
$q^3(q^3-1)$	X_{31}	1	γ	1	1
$(q^2-q+1)(q^3-1)$	$\{X'_{2b}\}$	1	1		2^d-1
$q(q^2-q+1)(q^3-1)$	$\{X_{2b}\}$	1	$\gamma-1$	1	2^d-1
$(q+1)(q^2-q+1)(q^3-1)$	$\{X_b\}$	2	γ	1	$\frac{1}{2}2^d$
$(q-1)(q^2-q+1)(q^3-1)$	$\{X_2\}$		$\gamma-2$	1	$\frac{1}{6}(2^d-1)(2^d-2)$

Bemerkungen

- $1 \le \gamma \le \frac{1}{3}(q+1)$.
- $\varphi_{31}(1) \ge \frac{1}{3}(q-1)^2(q^2+q+1)(2q^2+2q+3)$.

Grade der irreduziblen Brauercharaktere

Char.	Grad
φ_{32}	(q^3-1)
φ_{33}	$q(q-1)(q^3-1)$
φ_{31}	$(q^2+(1-\gamma)q+1)(q-1)(q^3-1)$

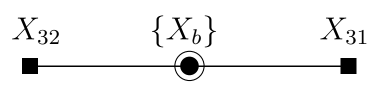
Primzahl: $\ell \mid q-1,\ \ell > 3,\ \ell^d \parallel q-1$ **Kongruenz**: $3 \mid q-1$ **Block**: B_3

Grad	Char.	φ_{32}	φ_{33}	φ_{31}	Anzahl
(q^3+1)	X_{32}	1			1
$q(q+1)(q^3+1)$	X_{33}		1		1
$q^3(q^3+1)$	X_{31}			1	1
$(q^2+q+1)(q^3+1)$	$\{X'_{1a}\}$	1	1		ℓ^d-1
$q(q^2+q+1)(q^3+1)$	$\{X_{1a}\}$		1	1	ℓ^d-1
$(q+1)(q^2+q+1)(q^3+1)$	$\{X_1\}$	1	2	1	$\frac{1}{6}(\ell^d-1)(\ell^d-2)$

Primzahl: $\ell \mid q-1,\ \ell > 3,\ \ell^d \parallel q-1$ **Kongruenz**: $3 \mid q+1$ **Block**: B_3

Grad	Char.	φ_{32}	φ_{31}	Anzahl
(q^3-1)	X_{32}	1		1
$q^3(q^3-1)$	X_{31}		1	1
$(q+1)(q^2-q+1)(q^3-1)$	$\{X_b\}$	1	1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$

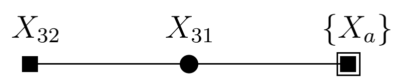
Brauerbaum



Primzahl: $\ell \mid q+1$, $\ell > 3$, $\ell^d \parallel q+1$ **Kongruenz**: $3 \mid q-1$ **Block**: B_3

Grad	Char.	φ_{32}	φ_{31}	Anzahl
(q^3+1)	X_{32}	1		1
$q^3(q^3+1)$	X_{31}	1	1	1
$(q-1)(q^2+q+1)(q^3+1)$	$\{X_a\}$		1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$

Brauerbaum



Primzahl: $\ell \mid q+1$, $\ell > 3$, $\ell^d \parallel q+1$ **Kongruenz**: $3 \mid q+1$ **Block**: B_3

Grad	Char.	φ_{32}	φ_{33}	φ_{31}	Anzahl
(q^3-1)	X_{32}	1			1
$q(q-1)(q^3-1)$	X_{33}		1		
$q^3(q^3-1)$	X_{31}	1	γ	1	
$(q^2-q+1)(q^3-1)$	$\{X'_{2b}\}$	1	1		ℓ^d-1
$q(q^2-q+1)(q^3-1)$	$\{X_{2b}\}$	1	$\gamma-1$	1	ℓ^d-1
$(q-1)(q^2-q+1)(q^3-1)$	$\{X_2\}$		$\gamma-2$	1	$\frac{1}{6}(\ell^d-1)(\ell^d-2)$

Bemerkungen

- $2 \leq \gamma \leq \frac{1}{3}(q+1)$.
- $\varphi_{31}(1) \geq \frac{1}{3}(q-1)^2(q^2+q+1)(2q^2+2q+3)$.

Grad der irreduziblen Brauercharaktere

Char.	Grad
φ_{32}	(q^3-1)
φ_{33}	$q(q-1)(q^3-1)$
φ_{31}	$(q^2+(1-\gamma)q+1)(q-1)(q^3-1)$

Primzahl: $\ell \mid q^2+q+1$, $\ell > 3$, $\ell^d \parallel q^2+q+1$ **Kongr.**: $3 \mid q-1$ **Block**: B_3

Grad	Char.	φ_{32}	φ_{33}	φ_{31}	Anzahl
(q^3+1)	X_{32}	1			1
$q(q+1)(q^3+1)$	X_{33}	1	1		1
$q^3(q^3+1)$	X_{31}		1	1	1
$(q-1)^2(q+1)(q^3+1)$	$\{X_3\}$			1	$\frac{1}{3}(\ell^d-1)$

Grade der irreduziblen Brauercharaktere

Char.	Grad
φ_{32}	(q^3+1)
φ_{33}	$(q^2+q-1)(q^3+1)$
φ_{31}	$(q-1)^2(q+1)(q^3+1)$

Brauerbaum

Primzahl: $\ell \mid q^2-q+1$, $\ell > 3$, $\ell^d \parallel q^2-q+1$ **Kongr.**: $3 \mid q+1$ **Block**: B_3

Grad	Char.	φ_{32}	φ_{33}	φ_{31}	Anzahl
(q^3-1)	X_{32}	1			1
$q(q-1)(q^3-1)$	X_{33}		1		1
$q^3(q^3-1)$	X_{31}	1		1	1
$(q-1)(q+1)^2(q^3-1)$	$\{X_6\}$		1	1	$\frac{1}{3}(\ell^d-1)$

Grade der irreduziblen Brauercharaktere

Char.	Grad
φ_{32}	(q^3-1)
φ_{33}	$q(q^3-1)$
φ_{31}	$(q-1)(q^2+q+1)(q^3-1)$

Brauerbaum

C.4 Die Blöcke B_2

Primzahl: $\ell \mid q-1$, $\ell > 2$, $\ell^d \parallel q-1$ **Kongruenz**: $2 \nmid q$ **Block**: B_2

Grad	Char.	φ_{22}	φ_{23}	φ_{24}	φ_{21}	Anzahl
(q^4+q^2+1)	X_{22}	1				1
$q(q^4+q^2+1)$	X_{23}		1			1
$q(q^4+q^2+1)$	X_{24}			1		1
$q^2(q^4+q^2+1)$	X_{21}				1	1
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{1a}\}$	1		1		$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{1a}\}$		1		1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{1b}\}$	1	1			$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{1b}\}$			1	1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$(q+1)^2(q^4+q^2+1)$	$\{X_1\}$	1	1	1	1	$\frac{1}{4}(\ell^d-1)^2$

Primzahl: $\ell \mid q+1$, $\ell > 2$, $\ell^d \parallel q+1$ **Kongruenz**: $2 \nmid q$ **Block**: B_2

Grad	Char.	φ_{22}	φ_{23}	φ_{24}	φ_{21}	Anzahl
(q^4+q^2+1)	X_{22}	1				1
$q(q^4+q^2+1)$	X_{23}	1	1			
$q(q^4+q^2+1)$	X_{24}	1		1		
$q^2(q^4+q^2+1)$	X_{21}	1	1	1	1	
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{2a}\}$		1			$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{2a}\}$		1		1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{2b}\}$			1		$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{2b}\}$			1	1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$
$(q-1)^2(q^4+q^2+1)$	$\{X_2\}$				1	$\frac{1}{4}(\ell^d-1)^2$

C.5 Die Blöcke B_{1a} und B_{1b}

Primzahl: $\ell = 2$, $2^d \parallel q-1$ **Kongruenz**: $4 \mid q-1$ **Block**: B_{1a}

Grad	Char.	φ'_{1a}	φ_{1a}	Anzahl
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	X'_{1a}	1		1
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	X_{1a}	1	1	1
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{1a}\}$	1		2^d-1
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{1a}\}$	1	1	2^d-1
$(q-1)(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_a\}$		1	$\frac{1}{2}2^d$
$(q+1)(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_1\}$	2	1	$\frac{1}{2}2^d(2^d-1)$

Bemerkung

Um die Zerlegungsmatrizen für die Blöcke B_{1b} zu erhalten, ist a durch b zu ersetzen.

Primzahl: $\ell = 2$, $2^d \parallel q+1$ **Kongruenz**: $4 \mid q+1$ **Block**: B_{1a}

Grad	Char.	φ'_{1a}	φ_{1a}	Anzahl
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	X'_{1a}	1		1
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	X_{1a}	1	1	1
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{1a}\}$	1		1
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{1a}\}$	1	1	1
$(q+1)(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_1\}$	2	1	1
$(q-1)(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_a\}$		1	2^d-1

Bemerkungen

- Die Defektgruppe dieses Blocks ist eine 2-Sylowgruppe der Untergruppe $GL_2(q)$. Sie ist deshalb eine Semidiedergruppe der Ordnung 2^{d+2}. Blöcke mit einer solchen Defektgruppe und einer solchen Zerlegungsmatrix wurden von K. Erdmann in [25, Lemma 8.6] betrachtet.
- Um die Zerlegungsmatrizen für die Blöcke B_{1b} zu erhalten, ist a durch b zu ersetzen.

Primzahl: $\ell \mid q-1$, $\ell > 2$, $\ell^d \parallel q-1$ **Block**: B_{1a}

Grad	Char.	φ'_{1a}	φ_{1a}	Anzahl
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	X'_{1a}	1		1
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	X_{1a}		1	1
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{1a}\}$	1		ℓ^d-1
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{1a}\}$		1	ℓ^d-1
$(q+1)(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_1\}$	1	1	$\frac{1}{2}\ell^d(\ell^d-1)$

Bemerkung

Um die Zerlegungsmatrizen für die Blöcke B_{1b} zu erhalten, ist a durch b zu ersetzen.

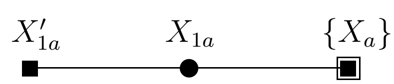
Primzahl: $\ell \mid q+1$, $\ell > 2$, $\ell^d \parallel q+1$ **Block**: B_{1a}

Grad	Char.	φ'_{1a}	φ_{1a}	Anzahl
$(q+1)(q^4+q^2+1)$	X'_{1a}	1		1
$q(q+1)(q^4+q^2+1)$	X_{1a}	1	1	1
$(q-1)(q+1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_a\}$		1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$

Bemerkung

Um die Zerlegungsmatrizen für die Blöcke B_{1b} zu erhalten, ist a durch b zu ersetzen.

Brauerbaum



C.6 Die Blöcke B_{2a} und B_{2b}

Primzahl: $\ell = 2$, $2^d \parallel q-1$ **Kongruenz**: $4 \mid q-1$ **Block**: B_{2a}

Grad	Char.	φ'_{2a}	φ_{2a}	Anzahl
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	X'_{2a}	1		1
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	X_{2a}	1	1	1
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{2a}\}$	1		1
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{2a}\}$	1	1	1
$(q-1)(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_2\}$		1	1
$(q+1)(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_a\}$	2	1	2^d-1

Bemerkungen

- Die Defektgruppe dieses Blocks ist eine 2-Sylowgruppe der Untergruppe $U_2(q)$. Sie ist deshalb eine Semidiedergruppe der Ordnung 2^{d+2}. Blöcke mit einer solchen Defektgruppe und einer solchen Zerlegungsmatrix wurden von K. Erdmann in [25, Lemma 8.8] betrachtet.
- Um die Zerlegungsmatrizen für die Blöcke B_{2b} zu erhalten, ist a durch b zu ersetzen.

Primzahl: $\ell = 2$, $2^d \parallel q+1$ **Kongruenz**: $4 \mid q+1$ **Block**: B_{2a}

Grad	Char.	φ'_{2a}	φ_{2a}	Anzahl
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	X'_{2a}	1		1
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	X_{2a}	1	1	1
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{2a}\}$	1		2^d-1
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{2a}\}$	1	1	2^d-1
$(q+1)(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_a\}$	2	1	$\frac{1}{2}2^d$
$(q-1)(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_2\}$		1	$\frac{1}{2}2^d(2^d-1)$

Bemerkung

Um die Zerlegungsmatrizen für die Blöcke B_{2b} zu erhalten, ist a durch b zu ersetzen.

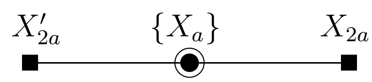
Primzahl: $\ell \mid q-1$, $\ell > 2$, $\ell^d \parallel q-1$ **Block**: B_{2a}

Grad	Char.	φ'_{2a}	φ_{2a}	Anzahl
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	X'_{2a}	1		1
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	X_{2a}		1	1
$(q+1)(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_a\}$	1	1	$\frac{1}{2}(\ell^d-1)$

Bemerkung

Um die Zerlegungsmatrizen für die Blöcke B_{2b} zu erhalten, ist a durch b zu ersetzen.

Brauerbaum



Primzahl: $\ell \mid q+1$, $\ell > 2$, $\ell^d \parallel q+1$ **Block**: B_{2a}

Grad	Char.	φ'_{2a}	φ_{2a}	Anzahl
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	X'_{2a}	1		1
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	X_{2a}	1	1	1
$(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X'_{2a}\}$	1		ℓ^d-1
$q(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_{2a}\}$	1	1	ℓ^d-1
$(q-1)(q-1)(q^4+q^2+1)$	$\{X_2\}$		1	$\frac{1}{2}\ell^d(\ell^d-1)$

Bemerkung

Um die Zerlegungsmatrizen für die Blöcke B_{2b} zu erhalten, ist a durch b zu ersetzen.

Anhang D

Die Brauerbäume der Ree-Gruppen

In diesem Kapitel werden die Brauerbäume der Ree-Gruppen beschrieben. Die Beweise dazu finden sich in Kapitel 8, soweit sie nicht trivial sind.

Da die Suzuki-Gruppen als Komponenten regulärer Untergruppen von ${}^2F_4(q^2)$ auftreten, kommen deren Brauerbäume auch unter den Brauerbäumen von ${}^2F_4(q^2)$ vor. Aus diesem Grunde werden auch die Brauerbäume der Suzuki-Gruppen vorgestellt. Diese sind sehr leicht zu bestimmen und wurden im übrigen schon von Burkhardt [7] angegeben.

Bei der Beschreibung der Brauerbäume werden die Charaktere gemäß der Jordan-Zerlegung von Charakteren bezeichnet. Dies ist hier besonders einfach, weil jede der betrachteten Gruppen selbstdual ist. Dabei schreiben wir kurz χ_s für $\chi_{s,1}$, wenn s regulär ist, d.h. wenn $\chi_{s,1}$ bis auf das Vorzeichen ein Deligne–Lusztig-Charakter ist.

Es zeigt sich, daß die Einteilung der Charaktere in ℓ-Blöcke den Gesetzen der Jordan-Zerlegung von Blöcken genügt. Ist s ein halbeinfaches ℓ'-Element, so schreiben wir B_s für denjenigen ℓ-Block, der zum Hauptblock von $C_G(s)^*$ korrespondiert. Auch stellt sich in allen Fällen heraus, daß die Jordan-Zerlegung von Zerlegungsmatrizen und somit die Jordan-Zerlegung von Brauercharakteren richtig ist. Die Defektgruppen sind immer Sylowgruppen von maximalen Tori, eine Beobachtung, die schon von Schewe in [78] gemacht wurde.

Ein ℓ-Block mit zyklischer Defektgruppe ist genau dann *nilpotent* im Sinne von Broué und Puig [6], wenn er genau einen irreduziblen Brauercharakter enthält. Die nilpotenten Blöcke sind in der folgenden Zusammenstellung weggelassen.

Die Knoten der Bäume sind mit zwei verschiedenen Symbolen gezeichnet. Diese entsprechen den beiden Typen von Charakteren, wie in Kapitel 8 erläutert. Der exzeptionelle Knoten ist durch eine zusätzliche Umrandung gekennzeichnet.

Für die nicht-trivialen Elemente einer Gruppe H schreiben wir $H^\#$.

D.1 Die Brauerbäume der Suzuki-Gruppen

In diesem Abschnitt sei $G = {}^2B_2(q^2)$ eine Suzuki-Gruppe. Diese wird auch mit $\mathrm{Suz}(q^2)$ bezeichnet. Es ist $q^2 = 2^{2n+1}$, $n \geq 0$, also q keine ganze Zahl. Die Suzuki-Gruppen sind für $n > 0$ einfach. Für $n = 0$ ist $G = {}^2B_2(2)$ isomorph zur Frobeniusgruppe der Ordnung 20. Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind auch in diesem Fall richtig. Die Ordnung von G ist

$$|{}^2B_2(q^2)| = q^4(q^2-1)(q^2+\sqrt{2}q+1)(q^2-\sqrt{2}q+1).$$

Sie hat drei maximale Tori T_1, T_2, und T_3. Deren Struktur ist:

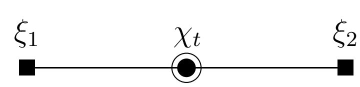
$$\begin{array}{rcl} T_1 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2-1}, \\ T_2 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2+\sqrt{2}q+1}, \\ T_3 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2-\sqrt{2}q+1}. \end{array}$$

Ihre nicht-trivialen Elemente sind regulär. Es gibt genau 4 unipotente Charaktere, die mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_4 bezeichnet werden. Dabei ist ξ_1 der triviale und ξ_2 der Steinberg-Charakter. Die beiden unipotenten Charaktere ξ_3 und ξ_4 sind kuspidal, komplex konjugiert auf unipotenten Klassen und haben den Grad $q(q^2-1)/\sqrt{2}$.

Satz D.1.1 *Sei D eine zyklische ℓ-Gruppe der Ordnung $|D| = \ell^d$, $d > 1$, die Defektgruppe eines ℓ-Blockes ist. Dann ist $\ell \neq 2$ und D ist die ℓ-Sylowgruppe eines der maximalen Tori.*

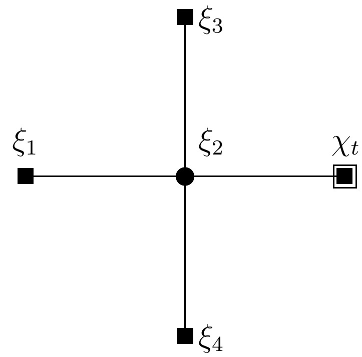
Ist nun ℓ eine ungerade Primzahl, die $|G|$ teilt, dann teilt ℓ genau eine der Zahlen q^2-1, $q^2+\sqrt{2}q+1$ oder $q^2-\sqrt{2}q+1$. Dies ergibt eine natürliche Fallunterscheidung zur Aufzählung der ℓ-Blöcke von G. Wir beschreiben nun der Reihe nach die Blöcke in den drei möglichen Fällen für ℓ.

Satz D.1.2 *Sei $\ell \mid q^2-1$. Dann ist $n > 0$ und $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_1)$. Der Hauptblock hat den Brauerbaum:*



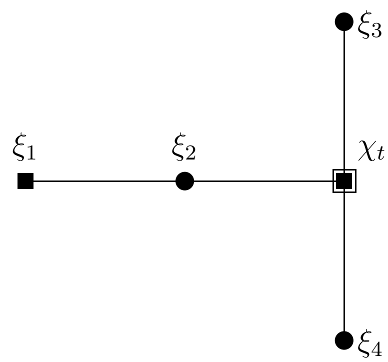
mit $t \in D^\#$. Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe D sind nilpotent.

Satz D.1.3 *Sei* $\ell \mid q^2 + \sqrt{2}q + 1$*. Dann ist* $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_2)$*. Der Hauptblock hat den Brauerbaum:*



mit $t \in D^\#$*. Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe* D *sind nilpotent.*

Satz D.1.4 *Sei* $\ell \mid q^2 - \sqrt{2}q + 1$*. Dann ist* $n > 0$ *und* $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_3)$*. Der Hauptblock hat den Brauerbaum:*



mit $t \in D^\#$*. Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe* D *sind nilpotent.*

Damit sind alle Brauerbäume der Suzuki-Gruppen beschrieben.

D.2 Die Brauerbäume der Ree-Gruppen vom Typ ${}^2G_2$

In diesem Abschnitt sei $G = {}^2G_2(q^2)$ eine Ree-Gruppe. Es ist $q^2 = 3^{2n+1}$, $n \geq 0$, also q keine ganze Zahl. Die Ree-Gruppen dieses Typs sind für $n > 0$ einfach. Für $n = 0$ ist $G = {}^2G_2(3)$ isomorph zu $P\Gamma L_2(8)$. Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind auch in diesem Fall richtig. Die Ordnung von G ist

$$|{}^2G_2(q^2)| = q^6(q^2-1)(q^2+1)(q^2+\sqrt{3}q+1)(q^2-\sqrt{3}q+1).$$

Sie hat vier maximale Tori T_1, T_2, T_3 und T_4. Deren Struktur ist:

$$\begin{array}{rcl} T_1 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2-1} \cong \langle u \rangle \times \mathbb{Z}_{(q^2-1)/2}, \\ T_2 & \cong & \langle u \rangle \times \mathbb{Z}_{(q^2+1)/2} \cong \langle u \rangle \times \langle u' \rangle \times \mathbb{Z}_{(q^2+1)/4}, \\ T_3 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2+\sqrt{3}q+1}, \\ T_4 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2-\sqrt{3}q+1}. \end{array}$$

Dabei sind u und u' vertauschbare Involutionen. Es ist zu beachten, daß wegen $q^2 \equiv 3 (\bmod 8)$ sowohl $(q^2-1)/2$ als auch $(q^2+1)/4$ ungerade sind. Die irregulären Elemente in $\cup_{i=0}^4 T_i$ sind gerade die Elemente aus $\langle u, u' \rangle$.

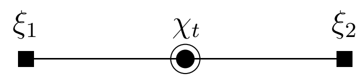
Es gibt genau 8 unipotente Charaktere, die mit ξ_1–ξ_8 bezeichnet werden. Dabei ist ξ_1 der triviale und ξ_2 der Steinberg-Charakter. Die übrigen unipotenten sind kuspidal. Die Numerierung entspricht der Reihenfolge, in der diese Charaktere in Carters Buch aufgeführt sind.

Satz D.2.1 *Sei D eine zyklische ℓ-Gruppe der Ordnung $|D| = \ell^d$, $d > 1$, die Defektgruppe eines ℓ-Blockes ist. Dann ist $\ell \neq 3$ und D ist die ℓ-Sylowgruppe eines der maximalen Tori.*

Die Brauerbäume für den Fall $\ell = 2$ sind trivial. Es sei nun ℓ eine ungerade Primzahl ungleich 3. Dann teilt ℓ genau eine der Zahlen q^2-1, q^2+1, $q^2+\sqrt{3}q+1$ oder $q^2-\sqrt{3}+1$. Dies ergibt eine natürliche Fallunterscheidung zur Aufzählung der ℓ-Blöcke von G. Wir beschreiben nun der Reihe nach die Blöcke in den vier möglichen Fällen für ℓ.

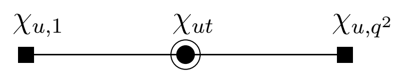
Satz D.2.2 *Sei $\ell \mid q^2 - 1$ und $\ell \neq 2$. Dann ist $n > 0$ und $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_1)$. Es gibt genau die folgenden Blöcke mit Defektgruppe D:*

(a) *Den Hauptblock mit Brauerbaum:*



mit $t \in D^\#$.

(b) *Für $s = u$ existiert ein Block B_u mit Brauerbaum:*

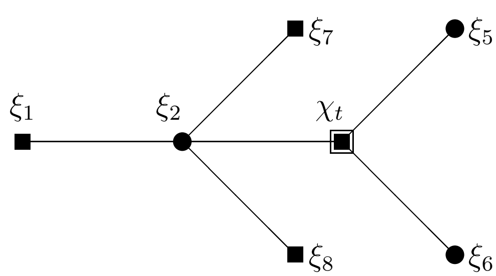


mit $t \in D^\#$. Dabei werden die beiden unipotenten Charaktere von $C_G(u) = \langle u \rangle \times PSL_2(q^2)$ durch ihre Grade bezeichnet.

(c) *Nilpotente Blöcke.*

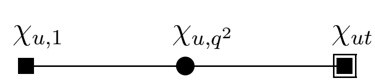
Satz D.2.3 *Sei $\ell \mid q^2 + 1$ und $\ell \neq 2$. Dann ist $n > 0$ und $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_2)$. Es gibt genau die folgenden Blöcke mit Defektgruppe D:*

(a) *Den Hauptblock mit dem folgenden, eben eingebetteten Brauerbaum:*



mit $t \in D^\#$.

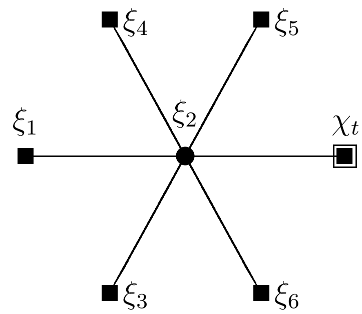
(b) *Für $s = u$ existiert ein Block B_u mit Brauerbaum:*



mit $t \in D^\#$.

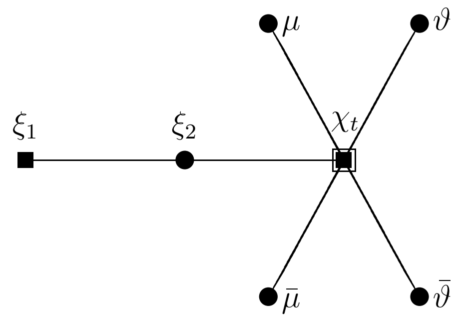
(c) *Nilpotente Blöcke.*

Satz D.2.4 *Sei* $\ell \mid q^2 + \sqrt{3}q + 1$. *Dann ist* $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_3)$. *Der Hauptblock hat den folgenden, eben eingebetteten Brauerbaum:*



mit $t \in D^\#$. *Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe* D *sind nilpotent.*

Satz D.2.5 *Sei* $\ell \mid q^2 - \sqrt{3}q + 1$. *Dann ist* $n > 0$ *und* $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_4)$. *Der Hauptblock hat den Brauerbaum:*



mit $t \in D^\#$ *und* $\{\mu, \vartheta\} \in \{\{\xi_3, \xi_7\}, \{\xi_3, \bar{\xi}_7\}\}$. *Hier konnte die ebene Einbettung des Brauerbaumes nicht bestimmt werden. Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe* D *sind nilpotent.*

Damit sind alle Brauerbäume der Ree-Gruppen ${}^2G_2(q^2)$ beschrieben.

D.3 Die Brauerbäume der Ree-Gruppen vom Typ $^2F_4$

In diesem Abschnitt sei schließlich G eine Ree-Gruppe vom Typ $^2F_4(q^2)$. Es ist $q^2 = 2^{2n+1}$, $n \geq 0$, also q keine ganze Zahl. Die Ree-Gruppen dieses Typs sind einfach, außer für $n = 0$. Die Kommutatorgruppe von $^2F_4(2)$ ist einfach vom Index 2. Sie heißt auch Tits-Gruppe. Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind auch in diesem Fall richtig. Die Zerlegungszahlen von $^2F_4(2)$ sind vollständig bekannt [45].

Die Ordnung der Ree-Gruppen dieses Typs ist

$$|^2F_4(q^2)| = q^{24}(q^2-1)(q^6+1)(q^8-1)(q^{12}+1).$$

Sie haben elf maximale Tori T_1–T_{11}. Deren Struktur ist:

$$\begin{array}{rcl}
T_1 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}, \\
T_2 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q^2+1}, \\
T_3 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q^2-\sqrt{2}q+1}, \\
T_4 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q^2+\sqrt{2}q+1}, \\
T_5 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2-\sqrt{2}q+1} \times \mathbb{Z}_{q^2+\sqrt{2}q+1}, \\
T_6 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2-\sqrt{2}q+1} \times \mathbb{Z}_{q^2-\sqrt{2}q+1}, \\
T_7 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2+\sqrt{2}q+1} \times \mathbb{Z}_{q^2+\sqrt{2}q+1}, \\
T_8 & \cong & \mathbb{Z}_{q^2+1} \times \mathbb{Z}_{q^2+1}, \\
T_9 & \cong & \mathbb{Z}_{q^4-q^2+1}, \\
T_{10} & \cong & \mathbb{Z}_{q^4-\sqrt{2}q^3+q^2-\sqrt{2}q+1}, \\
T_{11} & \cong & \mathbb{Z}_{q^4+\sqrt{2}q^3+q^2+\sqrt{2}q+1}.
\end{array}$$

Außer T_1, T_6, T_7 und T_8 sind diese alle zyklisch.

Es gibt genau 21 unipotente Charaktere, die mit ξ_1–ξ_{21} bezeichnet werden. Dabei ist ξ_1 der triviale und ξ_4 der Steinberg-Charakter. Die Charaktere der Hauptreihe sind ξ_1–ξ_4 sowie ξ_9–ξ_{11}. Die Charaktere ξ_5–ξ_8 sind Konstituenten der Harish-Chandra-Induktionen der beiden kuspidalen, unipotenten Charakteren des Levi-Komplements $\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathrm{Suz}(q^2)$. Die Notation ist so gewählt, daß $\xi_5+\xi_7$ ein induzierter Charakter ist, und daß ξ_5 und ξ_6 komplex konjugiert sind. Die übrigen unipotenten sind kuspidal. Die Numerierung entspricht der Reihenfolge, in der diese Charaktere in Carters Buch aufgeführt sind.

Wir benötigen den folgenden Hilfssatz über die Primteiler von $|G|$.

Lemma D.3.1 *Es sei ℓ ein ungerader Primteiler ungleich 3 von $|G|$. Dann teilt ℓ genau eine der folgenden Zahlen:*

$$\begin{gathered}
q^2-1,\\
q^2+1,\\
q^2-\sqrt{2}q+1,\\
q^2+\sqrt{2}q+1,\\
q^4-q^2+1,\\
q^4-\sqrt{2}q^3+q^2-\sqrt{2}q+1,\\
q^4+\sqrt{2}q^3+q^2+\sqrt{2}q+1.
\end{gathered}$$

Zur Beschreibung der Blöcke benötigen wir außerdem die folgenden Bezeichnungen und Tatsachen über die irregulären Elemente von G. Der besseren Übersichtlichkeit wegen sind diese in Form von Tabellen zusammengefaßt.

Lemma D.3.2 (a) *Die zyklischen maximalen Tori T_2–T_5 erlauben folgende Faktorisierungen.*

Torus	Faktorisierung	Ordnung der Faktoren	Bemerkungen
T_2	$T_{21}\times T_{22}$	$\lvert T_{21}\rvert = q^2-1$ $\lvert T_{22}\rvert = q^2+1$	$\lvert T_{22}\cap T_8\cap T_9\rvert = 3$
T_3	$T_{31}\times T_{32}$	$\lvert T_{31}\rvert = q^2-1$ $\lvert T_{32}\rvert = q^2-\sqrt{2}q+1$	
T_4	$T_{41}\times T_{42}$	$\lvert T_{41}\rvert = q^2-1$ $\lvert T_{42}\rvert = q^2+\sqrt{2}q+1$	$T_{41}=T_{31}=T_3\cap T_4$
T_5	$T_{51}\times T_{52}$	$\lvert T_{51}\rvert = q^2-\sqrt{2}q+1$ $\lvert T_{52}\rvert = q^2+\sqrt{2}q+1$	$T_{51}=T_{32}$ $T_{52}=T_{42}$

(b) *Die irregulären Elemente aus obigen Faktoren haben im einzelnen die folgenden Zentralisatoren und Normalisatoren.*

T mit $t\in T^{\#}$	$C_G(t)$	$N_G(\langle t\rangle)$
T_{21}	$\mathbb{Z}_{q^2-1}\times SL_2(q^2)$	$(\mathbb{Z}_{q^2-1}:2)\times SL_2(q^2)$
$T_{22}, t^3\neq 1$	$\mathbb{Z}_{q^2+1}\times SL_2(q^2)$	$(\mathbb{Z}_{q^2+1}:2)\times SL_2(q^2)$
$T_{22}\cap T_8\cap T_9$	$SU_3(q^4)$	$SU_3(q^4):2$
T_{31}	$\mathbb{Z}_{q^2-1}\times \mathrm{Suz}(q^2)$	$(\mathbb{Z}_{q^2-1}:2)\times \mathrm{Suz}(q^2)$
T_{32}	$\mathbb{Z}_{q^2-\sqrt{2}q+1}\times \mathrm{Suz}(q^2)$	$(\mathbb{Z}_{q^2-\sqrt{2}q+1}:4)\times \mathrm{Suz}(q^2)$
T_{42}	$\mathbb{Z}_{q^2+\sqrt{2}q+1}\times \mathrm{Suz}(q^2)$	$(\mathbb{Z}_{q^2+\sqrt{2}q+1}:4)\times \mathrm{Suz}(q^2)$

Wir können nun die zyklischen Defektgruppen von G bestimmen.

Satz D.3.3 *Sei D eine zyklische ℓ-Gruppe der Ordnung $|D| = \ell^d$, $d \geq 1$, die Defektgruppe eines ℓ-Blockes ist. Dann ist $\ell > 2$ und D ist die ℓ-Sylowgruppe eines der zyklischen maximalen Tori. Mit den Bezeichnungen aus* Lemma D.3.2 *haben wir im einzelnen die folgenden Möglichkeiten für D:*

T mit $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T)$	Faktor $S \leq T$ mit $D \leq S$	ℓ teilt	Bedingung
T_2	T_{21}	q^2-1	
T_3	T_{31}	q^2-1	
T_9	T_9	3	$\|D\| = 3$
T_2	T_{22}	q^2+1	$\|D\| > 3$
T_3	T_{32}	$q^2-\sqrt{2}q+1$	
T_4	T_{42}	$q^2+\sqrt{2}q+1$	
T_9	T_9	q^4-q^2+1	$\|D\| > 3$
T_{10}	T_{10}	$q^4-\sqrt{2}q^3+q^2-\sqrt{2}q+1$	
T_{11}	T_{11}	$q^4+\sqrt{2}q^3+q^2+\sqrt{2}q+1$	

Die Zentralisatoren und Normalisatoren von D stehen in den ersten sieben Fällen in der Tabelle von Lemma D.3.2 (b). *In den letzten drei Fällen ist D eine TI-Menge. Der Zentralisator von D ist dann der jeweilige D enthaltende maximale Torus. Die Normalisatoren sind $T_9{:}\,Z_6$, $T_{10}{:}\,Z_{12}$, bzw. $T_{11}{:}\,Z_{12}$.*

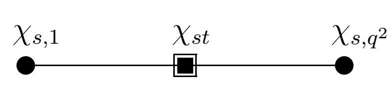
Die Verteilung der Charaktere von G auf die zyklischen ℓ-Blöcke ergibt sich aus dem folgenden Hilfssatz.

Lemma D.3.4 *Sei A ein ℓ-Block mit zyklischer Defektgruppe $D \neq 1$. Dann existiert ein ℓ'-Element s in einem maximalen Torus T, der D als Sylowgruppe besitzt, mit $A \subseteq \mathcal{E}_\ell(G,s)$.*

Wir betrachten nun der Reihe nach die einzelnen Fälle aus obigem Satz D.3.3.

Satz D.3.5 *Sei $\ell \mid q^2-1$ und $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_2)$. Dann ist $n > 0$ und $D \leq T_{21}$. Es gibt genau die folgenden Blöcke mit Defektgruppe D:*

(a) *Für jedes $s \in T_{22}$ mit $s^3 \neq 1$ existiert ein Block B_s mit Brauerbaum:*

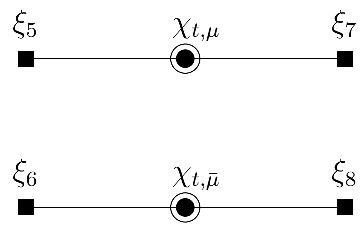


mit $t \in D^{\#}$. Es gibt insgesamt $(q^2-2)/2$ solcher Blöcke.

(b) *Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe D sind nilpotent.*

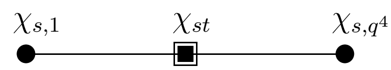
Satz D.3.6 *Sei $\ell \mid q^2 - 1$ und $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_3)$. Dann ist auch $T \in \mathrm{Syl}_\ell(T_4)$. Dieser Fall tritt nur für $n > 0$ auf. Es gibt genau die folgenden Blöcke mit Defektgruppe D:*

(a) *Zwei komplex konjugierte, unipotente Blöcke mit je zwei irreduziblen Brauercharakteren und Brauerbaum:*



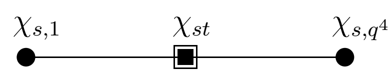
mit $t \in D^*$. Hierbei bezeichnet μ den unipotenten kuspidalen Charakter von $\mathrm{Suz}(q^2)$, der dort ξ_3 genannt wurde.

(b) *Für jedes $s \in T_{32}^{\#}$ existiert ein Block B_s mit Brauerbaum:*



mit $t \in D^{\#}$. Es gibt insgesamt $(q^2 - \sqrt{2}q)/4$ solcher Blöcke.

(c) *Für jedes $s \in T_{42}^{\#}$ existiert ein Block B_s mit Brauerbaum:*



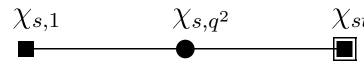
mit $t \in D^{\#}$. Es gibt insgesamt $(q^2 + \sqrt{2}q)$ solcher Blöcke.

(d) *Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe D sind nilpotent.*

Satz D.3.7 *Sei $\ell = 3$ und $|D| = 3$. Dann ist $D \in \mathrm{Syl}_3(T_9)$. Jeder Block mit Defektgruppe D ist nilpotent.*

Satz D.3.8 *Sei $\ell \mid q^2+1$ und $|D|>3$. Dann ist $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_2)$ Dieser Fall tritt nur für $n>0$ auf. Wir haben $D \leq T_{22}$. Es gibt genau die folgenden Blöcke mit Defektgruppe D:*

(a) *Für jedes $s \in T_{21}^{\#}$ existiert ein Block B_s mit Brauerbaum:*

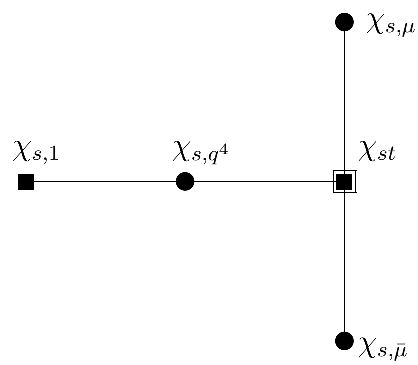


mit $t \in D^{\#}$. Es gibt insgesamt $(q^2-2)/2$ solcher Blöcke.

(b) *Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe D sind nilpotent.*

Satz D.3.9 *Sei $\ell \mid q^2-\sqrt{2}q+1$. Dann ist $n>0$ und $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_5)$. Wir haben $D \leq T_{32} = T_{51}$. Es gibt genau die folgenden Blöcke mit Defektgruppe D:*

(a) *Für jedes $s \in T_{31}^{\#}$ existiert ein Block B_s mit Brauerbaum:*



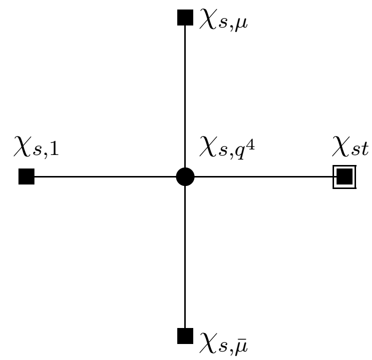
mit $t \in D^{\#}$. Dabei bezeichnet μ wieder wie oben den kuspidalen, unipotenten Charakter ξ_3 von $\mathrm{Suz}(q^2)$. Es gibt insgesamt $(q^2-2)/2$ solcher Blöcke.

(b) *Für jedes $s \in T_{52}^{\#}$ existiert ein Block B_s mit dem gleichen Brauerbaum wie unter* (a)*, wobei die Charaktere allerdings den entgegengesetzten Typ haben. Es gibt insgesamt $(q^2+\sqrt{2}q)/4$ solcher Blöcke.*

(c) *Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe D sind nilpotent.*

Satz D.3.10 *Sei* $\ell \mid q^2 + \sqrt{2}q + 1$*. Dann ist* $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_5)$*. Wir haben* $D \leq T_{42} = T_{52}$*. Es gibt genau die folgenden Blöcke mit Defektgruppe* D*:*

(a) *Für jedes* $s \in T_{41}^{\#}$ *existiert ein Block* B_s *mit Brauerbaum:*



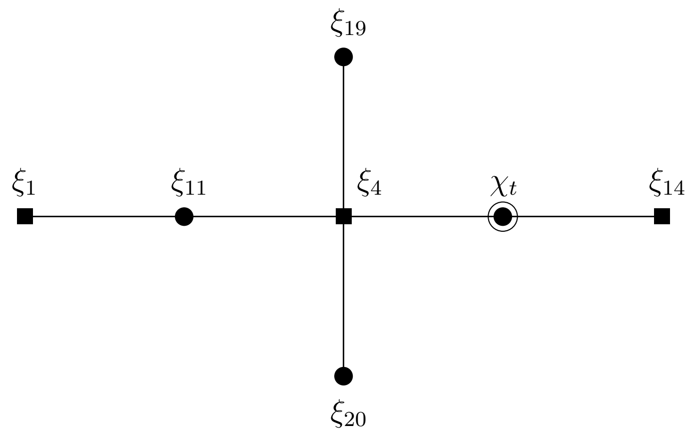
mit $t \in D^{\#}$*. Dabei hat* μ *die gleiche Bedeutung wie oben. Es gibt insgesamt* $(q^2 - 2)/2$ *solcher Blöcke.*

(b) *Für jedes* $s \in T_{51}^{\#}$ *existiert ein Block* B_s *mit dem gleichen Brauerbaum wie unter* (a)*, wobei die Charaktere allerdings den entgegengesetzten Typ haben. Es gibt insgesamt* $(q^2 - \sqrt{2}q)/4$ *solcher Blöcke.*

(c) *Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe* D *sind nilpotent.*

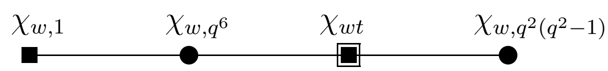
Satz D.3.11 *Sei $\ell \mid q^4 - q^2 + 1$ und $|D| > 3$. Dann ist $D \in \mathrm{Syl}_\ell(T_9)$. Es gibt genau die folgenden Blöcke mit Defektgruppe D:*

(a) *Den Hauptblock mit Brauerbaum:*



mit $t \in D^\#$.

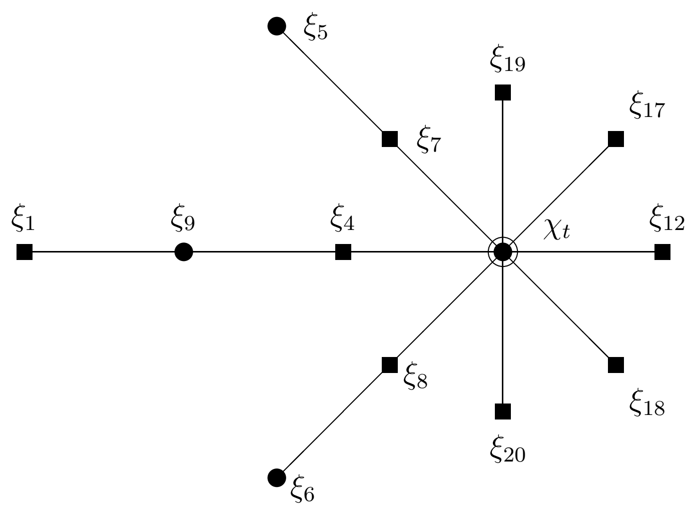
(b) *Einen Block B_w mit Brauerbaum:*

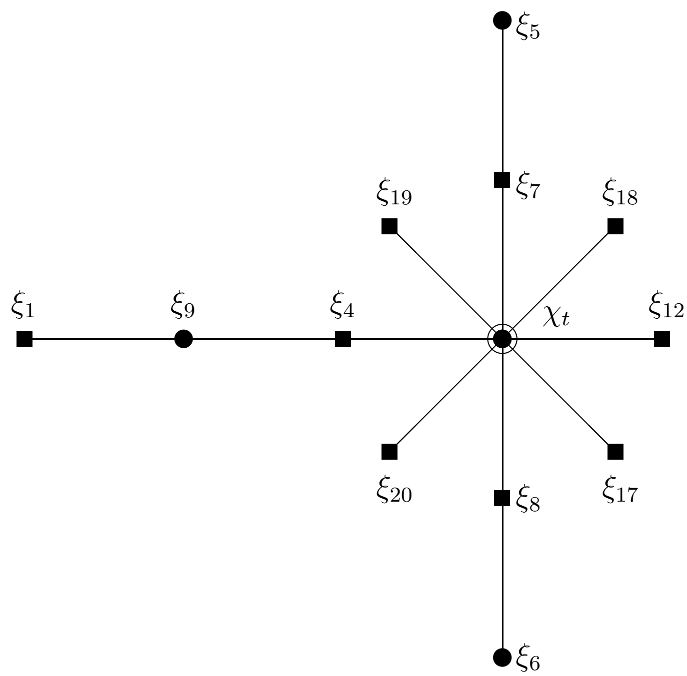


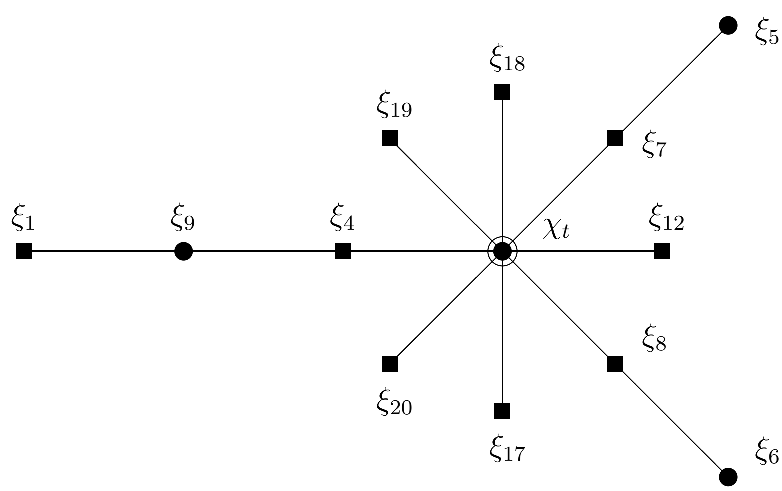
mit $t \in D^\#$. Hierbei ist $w \in T_9$ ein Element der Ordnung 3.

(c) *Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe D sind nilpotent.*

Satz D.3.12 *Sei $\ell \mid q^4 - \sqrt{2}q^3 + q^2 - \sqrt{2}q + 1$. Dann ist $n > 0$ und $T \in \mathrm{Syl}_\ell(T_{10})$. Der eingebettete Brauerbaum des Hauptblocks befindet sich unter den drei folgenden Bäumen:*

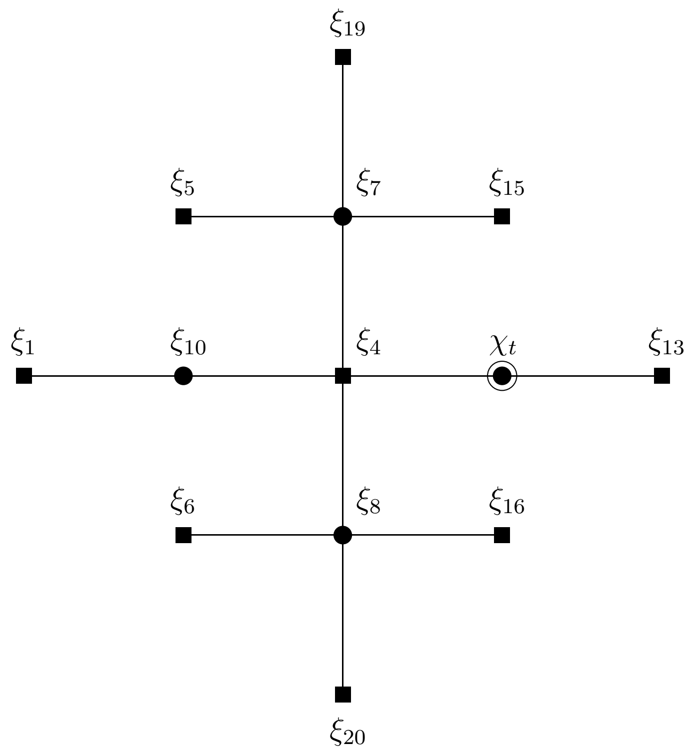






mit $t \in D^{\#}$. Der Knoten bei χ_t ist nur für $\ell > 13$ exzeptionell. Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe D sind nilpotent.

Satz D.3.13 *Sei* $\ell \mid q^4 + \sqrt{2}q^3 + q^2 + \sqrt{2}q + 1$. *Dann ist* $T \in \mathrm{Syl}_\ell(T_{11})$. *Der Hauptblock besitzt den folgenden eingebetteten Brauerbaum:*



mit $t \in D^{\#}$. *Der Knoten bei* χ_t *ist nur für* $\ell > 13$ *exzeptionell. Alle weiteren Blöcke mit Defektgruppe* D *sind nilpotent.*

Damit sind alle Brauerbäume von $G = {}^2F_4(q^2)$ bestimmt.

Anhang E

Tensorprodukte in $G_2(q)$

Dieses Kapitel enthält die Skalarprodukte einiger Tensorprodukte von Charakteren in $G = G_2(q)$ mit einigen anderen Charakteren. Nicht alle dieser Skalarprodukte werden in den Beweisen dieser Arbeit benötigt. Sie sind einerseits der Vollständigkeit wegen, andererseits in der Hoffnung angegeben, daß sie auch für zukünftige Untersuchungen nützlich sein werden.

E.1 Produkte unipotenter Charaktere

Die folgenden Seiten enthalten die Skalarprodukte

$$\langle X_i \otimes X_j, X_k \rangle,$$

mit $12 \leq i \leq j \leq k \leq 20$ (wobei wir X_{20} für $\bar{X}_{19}$ geschrieben haben), für alle Werte von q. Es sind nur die von 0 verschiedenen Skalarprodukte angegeben. Gibt es also in den folgenden Tafeln keinen Eintrag für das Tripel (i, j, k) mit $i \leq j \leq k$, dann ist $\langle X_i \otimes X_j, X_k \rangle = 0$. Daraus können mit Hilfe der Formeln

$$\langle \chi \otimes \psi, \vartheta \rangle = \langle \psi \otimes \chi, \vartheta \rangle$$

und

$$\langle \chi \otimes \psi, \vartheta \rangle = \langle \chi \otimes \bar{\vartheta}, \bar{\psi} \rangle$$

(wobei $\bar{\mu}$ für den zu μ komplex konjugierten Charakter steht), die Skalarprodukte $\langle \chi \otimes \psi, \vartheta \rangle$ für alle Tripel χ, ψ, ϑ von unipotenten Charakteren von G bestimmt werden.

In den folgenden Tafeln ist X_i durch $\mathbf{i}$, $12 \leq i \leq 19$ und $\bar{X}_{19}$ durch $\overline{\mathbf{19}}$ abgekürzt. Unter der Überschrift $\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}$ steht in der mit $\mathbf{k}$ indizierten Zeile das Skalarprodukt $\langle X_i \otimes X_j, X_k \rangle$.

$q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$, q gerade

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{12}$
$\mathbf{12}$: (q^4+q^2-q+1)
$\mathbf{13}$: $1/3(q^3+4q+2)$
$\mathbf{14}$: $1/3(q+1)(q^2-q+2)$
$\mathbf{15}$: $1/2(q^3+q^2+q+4)$
$\mathbf{16}$: $1/6(q^3+3q^2+7q+14)$
$\mathbf{17}$: $1/2(q^3-q^2+q-2)$
$\mathbf{18}$: $1/6(q^3-3q^2+7q-4)$
$\mathbf{19}$: $1/3(q^2-q-1)(q+1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q^2-q-1)(q+1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{13}$
$\mathbf{13}$: $1/9(q-2)^2$
$\mathbf{14}$: $1/9(q^2+2q+10)$
$\mathbf{15}$: $1/6(q^2+q+6)$
$\mathbf{16}$: $1/18(q^2-q+16)$
$\mathbf{17}$: $1/6(q^2-q+4)$
$\mathbf{18}$: $1/18(q-2)(q-5)$
$\mathbf{19}$: $1/9(q+1)^2$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+1)^2$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{14}$
$\mathbf{14}$: $1/9(q+1)(q-2)$
$\mathbf{15}$: $1/6(q^2+q+6)$
$\mathbf{16}$: $1/18(q^2+5q+22)$
$\mathbf{17}$: $1/6(q+1)(q-2)$
$\mathbf{18}$: $1/18(q+1)(q-2)$
$\mathbf{19}$: $1/9(q+1)(q-2)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+1)(q-2)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: $1/4(q^2+2q+8)$
$\mathbf{16}$: $1/12(q^2+4q+24)$
$\mathbf{17}$: $1/4q^2$
$\mathbf{18}$: $1/12(q-2)q$
$\mathbf{19}$: $1/6q(q+1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/6q(q+1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: $1/36(q^2+2q+64)$
$\mathbf{17}$: $1/12(q^2+2q+4)$
$\mathbf{18}$: $1/36(q-2)^2$
$\mathbf{19}$: $1/18(q+4)(q+1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/18(q+4)(q+1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{17}$
$\mathbf{17}$: $1/4(q-2)q$
$\mathbf{18}$: $1/12(q-2)^2$
$\mathbf{19}$: $1/6(q+1)(q-2)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/6(q+1)(q-2)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{18}$
$\mathbf{18}$: $1/36(q-2)(q-8)$
$\mathbf{19}$: $1/18(q+1)(q-2)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/18(q+1)(q-2)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{19}$
$\mathbf{19}$: $1/9(q+1)(q-2)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+1)(q-2)$

$\mathbf{12} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+1)(q-2)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{13}$
$\mathbf{13}$: $1/3(q+1)$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: $1/3(q+1)$
$\mathbf{18}$: $1/3(q-2)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{14}$
$\mathbf{19}$: $1/3(q+1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+1)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{19}$
$\mathbf{19}$: $1/3(q+1)$

$\mathbf{13} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+1)$

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{14}$
$\mathbf{14}$: $1/3(q+1)$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: $1/3(q+4)$
$\mathbf{18}$: $1/3(q+1)$

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{19}$
$\mathbf{19}$: $1/3(q-2)$

$\mathbf{14} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-2)$

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: $1/2(q+4)$
$\mathbf{16}$: 2
$\mathbf{17}$: $1/2q$

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: 2

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{17}$
$\mathbf{17}$: $1/2q$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: $1/6(q+10)$
$\mathbf{18}$: $1/6(q-2)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{18}$
$\mathbf{18}$: $1/6(q-2)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+1)$

$\mathbf{17} \otimes \mathbf{17}$
$\mathbf{17}$: $1/2q$

$\mathbf{18} \otimes \mathbf{18}$
$\mathbf{18}$: $1/6(q-2)$

$\mathbf{18} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+1)$

$\mathbf{19} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-2)$

$q \equiv 1 (\bmod 3)$, q gerade

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{12}$
12: (q^4+q^2+q+1)
13: $1/3(q^3+4q+4)$
14: $1/3(q^3+q+4)$
15: $1/2(q+2)(q^2-q+3)$
16: $1/6(q^3+3q^2+7q+16)$
17: $1/2q(q^2-q+1)$
18: $1/6(q^3-3q^2+7q-2)$
19: $1/3(q^2+q-1)(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q^2+q-1)(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{13}$
13: $1/9(q+2)^2$
14: $1/9(q^2-2q+10)$
15: $1/6(q^2+q+10)$
16: $1/18(q^2+7q+28)$
17: $1/6q(q-1)$
18: $1/18(q+2)(q-1)$
19: $1/9(q-1)^2$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q-1)^2$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{14}$
14: $1/9(q+2)(q-1)$
15: $1/6(q^2+q+4)$
16: $1/18(q^2+q+16)$
17: $1/6q(q-1)$
18: $1/18(q-1)(q-4)$
19: $1/9(q+2)(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+2)(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{15}$
15: $1/4(q^2+2q+8)$
16: $1/12(q^2+4q+28)$
17: $1/4q^2$
18: $1/12(q^2-2q+4)$
19: $1/6(q+2)(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/6(q+2)(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{16}$
16: $1/36(q^2+10q+88)$
17: $1/12q(q+2)$
18: $1/36(q+2)^2$
19: $1/18(q+2)(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/18(q+2)(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{17}$
17: $1/4(q-2)q$
18: $1/12q(q-4)$
19: $1/6q(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/6q(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{18}$
18: $1/36(q+2)(q-4)$
19: $1/18(q-1)(q-4)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/18(q-1)(q-4)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{19}$
19: $1/9(q+2)(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+2)(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+2)(q-1)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{13}$
13: $1/3(q+5)$
15: 1
16: $1/3(q+5)$
18: $1/3(q+2)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{14}$
19: $1/3(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-1)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{15}$
15: 1
16: 1

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{16}$
16: 1

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{19}$
19: $1/3(q-1)$

$\mathbf{13} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-1)$

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{14}$
14: $1/3(q+5)$
15: 1
16: $1/3(q+2)$
18: $1/3(q-1)$

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{15}$
15: 1
16: 1

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{16}$
16: 1

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{19}$
19: $1/3(q+2)$

$\mathbf{14} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+2)$

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{15}$
15: $1/2(q+4)$
16: 2
17: $1/2q$

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{16}$
16: 2

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{17}$
17: $1/2q$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{16}$
16: $1/6(q+14)$
18: $1/6(q+2)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{18}$
18: $1/6(q+2)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-1)$

$\mathbf{17} \otimes \mathbf{17}$
17: $1/2q$

$\mathbf{18} \otimes \mathbf{18}$
18: $1/6(q+2)$

$\mathbf{18} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-1)$

$\mathbf{19} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+2)$

$q \equiv 0 (\bmod 3)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{12}$
$\mathbf{12}$: (q^4+q^2+2)
$\mathbf{13}$: $1/3(q+1)(q^2-q+3)$
$\mathbf{14}$: $1/3(q+1)(q^2-q+3)$
$\mathbf{15}$: $1/2(q^3+q^2+q+5)$
$\mathbf{16}$: $1/6(q+3)(q^2+5)$
$\mathbf{17}$: $1/2(q-1)(q^2+1)$
$\mathbf{18}$: $1/6(q-1)(q^2-2q+3)$
$\mathbf{19}$: $1/3q(q-1)(q+1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3q(q-1)(q+1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{13}$
$\mathbf{13}$: $1/9q^2$
$\mathbf{14}$: $1/9(q^2+9)$
$\mathbf{15}$: $1/6(q^2+q+6)$
$\mathbf{16}$: $1/18(q^2+3q+18)$
$\mathbf{17}$: $1/6q(q-1)$
$\mathbf{18}$: $1/18(q-3)q$
$\mathbf{19}$: $1/9q^2$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9q^2$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{14}$
$\mathbf{14}$: $1/9q^2$
$\mathbf{15}$: $1/6(q^2+q+6)$
$\mathbf{16}$: $1/18(q^2+3q+18)$
$\mathbf{17}$: $1/6q(q-1)$
$\mathbf{18}$: $1/18(q-3)q$
$\mathbf{19}$: $1/9q^2$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9q^2$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: $1/4(q^2+2q+9)$
$\mathbf{16}$: $1/12(q^2+4q+27)$
$\mathbf{17}$: $1/4(q-1)(q+1)$
$\mathbf{18}$: $1/12(q+1)(q-3)$
$\mathbf{19}$: $1/6q(q+1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/6q(q+1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: $1/36(q^2+6q+81)$
$\mathbf{17}$: $1/12(q+3)(q-1)$
$\mathbf{18}$: $1/36(q-3)(q+3)$
$\mathbf{19}$: $1/18q(q+3)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/18q(q+3)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{17}$
$\mathbf{17}$: $1/4(q-1)^2$
$\mathbf{18}$: $1/12(q-1)(q-3)$
$\mathbf{19}$: $1/6q(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/6q(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{18}$
$\mathbf{18}$: $1/36(q-3)^2$
$\mathbf{19}$: $1/18(q-3)q$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/18(q-3)q$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{19}$
$\mathbf{19}$: $1/9q^2$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9q^2$

$\mathbf{12} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9q^2$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{13}$
$\mathbf{13}$: $1/3(q+3)$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: $1/3(q+3)$
$\mathbf{18}$: $1/3q$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{14}$
$\mathbf{19}$: $1/3q$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3q$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{19}$
$\mathbf{19}$: $1/3q$

$\mathbf{13} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3q$

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{14}$
$\mathbf{14}$: $1/3(q+3)$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: $1/3(q+3)$
$\mathbf{18}$: $1/3q$

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{19}$
$\mathbf{19}$: $1/3q$

$\mathbf{14} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3q$

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: $1/2(q+5)$
$\mathbf{16}$: 2
$\mathbf{17}$: $1/2(q-1)$

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: 2

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{17}$
$\mathbf{17}$: $1/2(q+1)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: $1/6(q+15)$
$\mathbf{18}$: $1/6(q-3)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{18}$
$\mathbf{18}$: $1/6(q+3)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3q$

$\mathbf{17} \otimes \mathbf{17}$
$\mathbf{17}$: $1/2(q-1)$

$\mathbf{18} \otimes \mathbf{18}$
$\mathbf{18}$: $1/6(q-3)$

$\mathbf{18} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3q$

$\mathbf{19} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3q$

$q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$, q ungerade

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{12}$
12: (q^4+q^2-q+2)
13: $1/3(q^3+4q+2)$
14: $1/3(q+1)(q^2-q+2)$
15: $1/2(q^3+q^2+q+5)$
16: $1/6(q^3+3q^2+7q+17)$
17: $1/2(q^3-q^2+q-3)$
18: $1/6(q^3-3q^2+7q-7)$
19: $1/3(q+1)(q^2-q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+1)(q^2-q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{13}$
13: $1/9(q-2)^2$
14: $1/9(q^2+2q+10)$
15: $1/6(q^2+q+6)$
16: $1/18(q^2-q+16)$
17: $1/6(q^2-q+4)$
18: $1/18(q-2)(-5+q)$
19: $1/9(q+1)^2$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+1)^2$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{14}$
14: $1/9(q+1)(q-2)$
15: $1/6(q^2+q+6)$
16: $1/18(q^2+5q+22)$
17: $1/6(q+1)(q-2)$
18: $1/18(q+1)(q-2)$
19: $1/9(q+1)(q-2)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+1)(q-2)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{15}$
15: $1/4(q^2+2q+9)$
16: $1/12(q^2+4q+27)$
17: $1/4(q-1)(q+1)$
18: $1/12(q+1)(q-3)$
19: $1/6q(q+1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/6q(q+1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{16}$
16: $1/36(q^2+2q+73)$
17: $1/12(q+1)^2$
18: $1/36(q+1)(-5+q)$
19: $1/18(q+4)(q+1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/18(q+4)(q+1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{17}$
17: $1/4(q-1)^2$
18: $1/12(q^2-4q+7)$
19: $1/6(q+1)(q-2)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/6(q+1)(q-2)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{18}$
18: $1/36(-5+q)^2$
19: $1/18(q+1)(q-2)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/18(q+1)(q-2)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{19}$
19: $1/9(q+1)(q-2)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+1)(q-2)$

$\mathbf{12} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+1)(q-2)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{13}$
13: $1/3(q+1)$
15: 1
16: $1/3(q+1)$
18: $1/3(q-2)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{14}$
19: $1/3(q+1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+1)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{15}$
15: 1
16: 1

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{16}$
16: 1

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{19}$
19: $1/3(q+1)$

$\mathbf{13} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+1)$

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{14}$
14: $1/3(q+1)$
15: 1
16: $1/3(q+4)$
18: $1/3(q+1)$

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{15}$
15: 1
16: 1

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{16}$
16: 1

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{19}$
19: $1/3(q-2)$

$\mathbf{14} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-2)$

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{15}$
15: $1/2(q+5)$
16: 2
17: $1/2(q-1)$

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{16}$
16: 2

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{17}$
17: $1/2(q+1)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{16}$
16: $1/6(q+13)$
18: $1/6(-5+q)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{18}$
18: $1/6(q+1)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+1)$

$\mathbf{17} \otimes \mathbf{17}$
17: $1/2(q-1)$

$\mathbf{18} \otimes \mathbf{18}$
18: $1/6(-5+q)$

$\mathbf{18} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+1)$

$\mathbf{19} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-2)$

$q \equiv 1 (\bmod 3)$, q ungerade

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{12}$
$\mathbf{12}$: (q^4+q^2+q+2)
$\mathbf{13}$: $1/3(q^3+4q+4)$
$\mathbf{14}$: $1/3(q^3+q+4)$
$\mathbf{15}$: $1/2(q^3+q^2+q+7)$
$\mathbf{16}$: $1/6(q^3+3q^2+7q+19)$
$\mathbf{17}$: $1/2(q-1)(q^2+1)$
$\mathbf{18}$: $1/6(q-1)(q^2-2q+5)$
$\mathbf{19}$: $1/3(q-1)(q^2+q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-1)(q^2+q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{13}$
$\mathbf{13}$: $1/9(q+2)^2$
$\mathbf{14}$: $1/9(q^2-2q+10)$
$\mathbf{15}$: $1/6(q^2+q+10)$
$\mathbf{16}$: $1/18(q^2+7q+28)$
$\mathbf{17}$: $1/6q(q-1)$
$\mathbf{18}$: $1/18(q+2)(q-1)$
$\mathbf{19}$: $1/9(q-1)^2$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q-1)^2$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{14}$
$\mathbf{14}$: $1/9(q+2)(q-1)$
$\mathbf{15}$: $1/6(q^2+q+4)$
$\mathbf{16}$: $1/18(q^2+q+16)$
$\mathbf{17}$: $1/6q(q-1)$
$\mathbf{18}$: $1/18(q-1)(q-4)$
$\mathbf{19}$: $1/9(q+2)(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+2)(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: $1/4(q^2+2q+9)$
$\mathbf{16}$: $1/12(q^2+4q+31)$
$\mathbf{17}$: $1/4(q-1)(q+1)$
$\mathbf{18}$: $1/12(q-1)^2$
$\mathbf{19}$: $1/6(q+2)(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/6(q+2)(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: $1/36(q^2+10q+97)$
$\mathbf{17}$: $1/12(q+3)(q-1)$
$\mathbf{18}$: $1/36(5+q)(q-1)$
$\mathbf{19}$: $1/18(q+2)(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/18(q+2)(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{17}$
$\mathbf{17}$: $1/4(q-1)^2$
$\mathbf{18}$: $1/12(q-1)(q-3)$
$\mathbf{19}$: $1/6q(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/6q(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{18}$
$\mathbf{18}$: $1/36(q-1)^2$
$\mathbf{19}$: $1/18(q-1)(q-4)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/18(q-1)(q-4)$

$\mathbf{12} \otimes \mathbf{19}$
$\mathbf{19}$: $1/9(q+2)(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+2)(q-1)$

$\mathbf{12} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/9(q+2)(q-1)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{13}$
$\mathbf{13}$: $1/3(5+q)$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: $1/3(5+q)$
$\mathbf{18}$: $1/3(q+2)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{14}$
$\mathbf{19}$: $1/3(q-1)$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-1)$

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{13} \otimes \mathbf{19}$
$\mathbf{19}$: $1/3(q-1)$

$\mathbf{13} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-1)$

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{14}$
$\mathbf{14}$: $1/3(5+q)$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: $1/3(q+2)$
$\mathbf{18}$: $1/3(q-1)$

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: 1
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: 1

$\mathbf{14} \otimes \mathbf{19}$
$\mathbf{19}$: $1/3(q+2)$

$\mathbf{14} \otimes \overline{\mathbf{19}}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+2)$

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{15}$
$\mathbf{15}$: $1/2(5+q)$
$\mathbf{16}$: 2
$\mathbf{17}$: $1/2(q-1)$

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: 2

$\mathbf{15} \otimes \mathbf{17}$
$\mathbf{17}$: $1/2(q+1)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{16}$
$\mathbf{16}$: $1/6(q+17)$
$\mathbf{18}$: $1/6(q-1)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{18}$
$\mathbf{18}$: $1/6(5+q)$

$\mathbf{16} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-1)$

$\mathbf{17} \otimes \mathbf{17}$
$\mathbf{17}$: $1/2(q-1)$

$\mathbf{18} \otimes \mathbf{18}$
$\mathbf{18}$: $1/6(q-1)$

$\mathbf{18} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q-1)$

$\mathbf{19} \otimes \mathbf{19}$
$\overline{\mathbf{19}}$: $1/3(q+2)$

E.2 Produkte mit X_{32}

Dieser Abschnitt enthält die Skalarprodukte

$$\langle X_{32} \otimes X_i, X_j \rangle$$

für alle $12 \leq i \leq 20$, $31 \leq i \leq 33$, $21 \leq i \leq 24$ (falls q ungerade) und $j \geq i$ aus dem gleichen Bereich. Für q sind alle nicht durch 3 teilbaren Primzahlpotenzen zugelassen, wobei die Zeilen und Spalten der folgenden Tafeln, die mit den Charakteren X_{21}–X_{24} indiziert sind, natürlich nur für ungerades q zu nehmen sind. Die Nullen sind in den Tabellen durch Punkte ersetzt. Für X_i haben wir die gleiche Abkürzung wie im vorigen Abschnitt verwendet.

$$q \equiv -1 (\bmod 3)$$

12	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\overline{\mathbf{19}}$	**31**	**32**	**33**	**21**	**22**	**23**	**24**	
q	1	.	1	1	.	.	.	.	q	.	1	q	.	1	2	**12**
	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	**13**
		.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	**14**
			.	1	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	1	**15**
				.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	**16**
					.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	**17**
						.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	**18**
							.	.	.	.	.	.	.	.	.	**19**
								.	.	.	.	.	.	.	.	$\overline{\mathbf{19}}$
									q	.	.	$q+1$	.	1	1	**31**
										.	1	.	.	.	1	**32**
											.	1	.	.	.	**33**
												$q+1$	1	1	2	**21**
													1	.	.	**22**
														1	1	**23**
															1	**24**

$q \equiv 1 (\bmod 3)$

12	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	$\overline{\mathbf{19}}$	**31**	**32**	**33**	**21**	**22**	**23**	**24**	
$q+2$	1	.	1	1	.	.	.	.	$q+2$	.	3	$q+2$	.	1	2	**12**
	2	.	.	1	.	1	.	.	.	2	2	1	.	.	2	**13**
		.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	**14**
			1	.	.	.	.	.	1	.	2	1	.	.	.	**15**
				1	.	.	.	.	1	1	2	1	.	.	1	**16**
					1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	**17**
						1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	**18**
							.	.	.	.	.	.	.	.	.	**19**
								.	.	.	.	.	.	.	.	$\overline{\mathbf{19}}$
									$q+2$	.	2	$q+1$	.	1	1	**31**
										2	1	.	.	.	1	**32**
											4	3	.	.	2	**33**
												$q+3$	1	1	2	**21**
													1	.	.	**22**
														1	1	**23**
															3	**24**

Bibliographie

[1] T. R. Berger and R. Knörr, On Brauer's height 0 conjecture, *Nagoya Math. J.*, **109** (1988), 109–116.

[2] N. Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Éléments de Mathématique, Hermann, Paris, 1968.

[3] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, *in:* Représentations linéaires des groupes finis, Luminy, 16–21 mai 1988, *Astérisque*, **181–182** (1990), 61–92. Siehe auch die Ankündigung in: *C. R. Acad. Sci. Paris*, **307** (1988), 13–18.

[4] M. Broué, Isométries de caractères et equivalences de Morita ou dérivées, *Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci.*, **71** (1990), 45–63.

[5] M. Broué et J. Michel, Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini, *J. reine angew. Math.*, **395** (1989), 56–67.

[6] M. Broué and L. Puig, A Frobenius theorem for blocks, *Invent. Math.*, **56** (1980), 117–128.

[7] R. Burkhardt, Über die Zerlegungszahlen der Suzukigruppen, *J. Algebra*, **59** (1979), 421–433.

[8] D. W. Burry, Components of induced modules, *J. Algebra*, **87** (1984), 483–492.

[9] R. W. Carter, Simple Groups of Lie Type, Wiley, London, 1972.

[10] R. W. Carter, Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters, Wiley, New York, 1985.

[11] B. Chang and R. Ree, The characters of $G_2(q)$, *in*: Symposia Mathematica Vol. 13, pp. 395–413, Academic Press, London, 1974.

[12] B. W. Char et al., MAPLE reference manual, University of Waterloo, Canada, 1985.

[13] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, Atlas of Finite Groups, Oxford University Press, London, 1984.

[14] C. W. Curtis and I. Reiner, Methods of Representation Theory Vol. II, Wiley, New York, 1987.

[15] P. Deligne and G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. of Math.*, **103** (1976), 103–161.

[16] P. Deligne and G. Lusztig, Duality for representations of a reductive group over a finite field II, *J. Algebra*, **81** (1983), 540–545.

[17] D. I. Deriziotis and G. O. Michler, Character tables and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **303** (1987), 39–70.

[18] F. Digne et J. Michel, Foncteurs de Lusztig et caractères des groupes linéaires et unitaires sur un corps fini, *J. Algebra*, **107** (1987), 217–255.

[19] R. Dipper, On the decomposition numbers of the finite general linear groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **290** (1985), 315–343.

[20] R. Dipper, On the decomposition numbers of the finite general linear groups II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **292** (1985), 123–133.

[21] R. Dipper, On quotients of Hom-functors and representations of finite general linear groups I, *J. Algebra*, **130** (1990), 235–259.

[22] R. Dipper and G. James, The q-Schur algebra, *Proc. London Math. Soc.*, **59** (1989), 23–50.

[23] H. Enomoto, The characters of the finite Chevalley group $G_2(q), q = 3^f$, *Japan. J. Math.*, **2** (1976), 191–248.

[24] H. Enomoto and H. Yamada, The characters of $G_2(2^n)$, *Japan. J. Math.*, **12** (1986), 325–377.

[25] K. Erdmann, Algebras and semidihedral defect groups I, *Proc. London Math. Soc.*, **57** (1988), 109–150.

[26] K. Erdmann, Algebras and semidihedral defect groups II, *Proc. London Math. Soc.*, **60** (1990), 123–165.

[27] A. P. Fakiolas, The Lusztig isomorphism for Hecke algebras of dihedral type, *J. Algebra*, **126** (1989), 466–492.

[28] W. Feit, The Representation Theory of Finite Groups, North-Holland Publishing Company, New York, 1982.

[29] W. Feit, Possible Brauer trees, *Illinois J. Math.*, **28** (1984), 43–56.

[30] H. Fitting, Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen, *Math. Ann.*, **107** (1933), 514–542.

[31] P. Fleischmann, Projective simple modules of symmetric algebras and their specializations with applications to Hecke algebras, *Arch. Math. (Basel)*, **55** (1990), 247–258.

[32] P. Fong, On decomposition numbers of J_1 and $R(q)$, *in*: Symposia Mathematica Vol. XIII, pp. 415–22, Academic Press, London 1974.

[33] P. Fong and B. Srinivasan, Blocks with cyclic defect groups in $GL(n, q)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **3** (1980), 1041–1044.

[34] P. Fong and B. Srinivasan, The blocks of finite general linear and unitary groups, *Invent. Math.*, **69** (1982), 109–153.

[35] P. Fong and B. Srinivasan, Brauer trees in $GL(n, q)$, *Math. Z.*, **187** (1984), 81–88.

[36] P. Fong and B. Srinivasan, The blocks of finite classical groups, *J. reine angew. Math.*, **396** (1989), 122–191.

[37] P. Fong and B. Srinivasan, Brauer trees in classical groups, *J. Algebra*, **131** (1990), 179–225.

[38] M. Geck, Eine Anwendung von MAPLE in der Darstellungstheorie der unitären Gruppen, Diplomarbeit, RWTH Aachen, 1987.

[39] M. Geck, Irreducible Brauer characters of the 3-dimensional special unitary groups in non-defining characteristic, *Comm. Algebra*, **18** (1990), 563–584.

[40] M. Geck, On the decomposition numbers of the finite unitary groups in non-defining characteristic, *Math. Z.*, **207** (1991), 83–89.

[41] M. Geck, Verallgemeinerte Gelfand-Graev Charaktere und Zerlegungszahlen endlicher Gruppen vom Lie-Typ, Dissertation, Aachen 1990.

[42] J. Grabmeier, Unzerlegbare Moduln mit trivialer Youngquelle und Darstellungstheorie der Schuralgebra, *Bayreuther Math. Schriften*, **20** (1985), 9–152.

[43] J. A. Green, A transfer theorem for modular representations, *J. Algebra*, **1** (1964), 73–84.

[44] D. G. Higman, Lectures on Permutation Representations, Vorlesungen aus dem Mathematischen Institut Gießen, Heft 4, 1977.

[45] G. Hiss, The modular characters of the Tits simple group and its automorphism group, *Comm. Algebra*, **14** (1986), 125–154.

[46] G. Hiss, Representations of Chevalley groups in special characteristics, Vortrag, Oberwolfach 1987.

[47] G. Hiss, On the decomposition numbers of $G_2(q)$, *J. Algebra*, **120** (1989), 339–360.

[48] G. Hiss, The number of trivial composition factors of the Steinberg module, *Archiv Math.*, **54** (1990), 247–251.

[49] G. Hiss, Regular and semisimple blocks in finite reductive groups, *J. London Math. Soc.*, **41** (1990), 63–68.

[50] G. Hiss and K. Lux, Brauer Trees of Sporadic Groups, Oxford University Press, Oxford, 1989.

[51] G. Hiss and J. Shamash, 3-blocks and 3-modular characters of $G_2(q)$, *J. Algebra*, **131** (1990), 371–387.

[52] G. Hiss and J. Shamash, 2-Blocks and 2-decomposition numbers of the Chevalley groups $G_2(q)$, *Math. Comput.*, **59** (1992), 645–672.

[53] R. B. Howlett and R. W. Kilmoyer, Principal series representations of finite groups with split BN-pairs, *Comm. Algebra*, **8** (1980), 543–583.

[54] R. B. Howlett and I. Lehrer, Induced cuspidal representations and generalized Hecke rings, *Invent. Math.*, **58** (1980), 37–64.

[55] J. E. Humphreys, Defect groups for finite groups of Lie type, *Math. Z.*, **119** (1971), 149–152.

[56] J. E. Humphreys, Modular representations of finite groups of Lie type, *in*: Finite Simple Groups II, pp. 259–290, Academic Press, New York/London, 1980.

[57] N. Iwahori, On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **10** (1964), 215–236.

[58] G. James and A. Kerber, The Representation Theory of the Symmetric Group, *Encyclopedia Math.*, **16** (1981).

[59] N. Kawanaka, Shintani lifting and Gelfand–Graev representations, *in*: The Arcata Conference on Representations of Finite Groups, pp. 147–163, 1987.

[60] P. B. Kleidman and M. W. Liebeck, On a theorem of Feit and Tits, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **107** (1989), 315–322.

[61] M. Klemm, Über den p-Rang von Inzidenzmatrizen, *J. Combin. Theory*, **43** (1986), 138–139.

[62] P. Landrock, Finite Group Algebras and their Modules, London Mathematical Society Lecture Note Series Vol. 84, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[63] P. Landrock and G. O. Michler, Principal 2-blocks of the simple groups of Ree type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **260** (1980), 83–111.

[64] H. Lüneburg, Some remarks concerning the Ree groups of type (G_2), *J. Algebra*, **3** (1966), 256–259.

[65] G. Lusztig, On the finiteness of the number of unipotent classes, *Invent. Math.*, **34** (1976), 201–213.

[66] G. Lusztig, Irreducible representations of finite classical groups, *Invent. Math.*, **43** (1977), 125–175.

[67] G. Lusztig, On a theorem of Benson and Curtis, *J. Algebra*, **71** (1981), 490–498.

[68] G. Lusztig, Characters of Reductive Groups over a Finite Field, *Ann. Math. Studies*, **107**, Princeton University Press, 1984.

[69] G. Malle, The maximal subgroups of ${}^2F_4(q^2)$, *J. Algebra*, **139** (1991), 52–69.

[70] G. Malle, Die unipotenten Charaktere von ${}^2F_4(q^2)$, *Comm. Algebra*, **18** (1990), 2361–2381.

[71] R. P. Martineau, On representations of the Suzuki groups over fields of odd characteristics, *J. London Math. Soc.*, **6** (1972), 153–160.

[72] H. Matsumoto, Générateur et relations des groupes de Weyl généralisés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 3419–3422.

[73] R. A. Parker, A Collection of Modular Characters, unveröffentlicht, 1987.

[74] L. Puig, Hecke algebras and source algebras of groups of Lie type, unveröffentlicht.

[75] L. Puig, Rôle de l'algèbre de source dans la théorie des blocs de Brauer, unveröffentlicht.

[76] L. Puig, Algèbres de source de certaines blocs de groupes de Chevalley, *in:* Représentations linéaires des groupes finis, Luminy, 16–21 mai 1988, *Astérisque*, **181–182** (1990), 221–236.

[77] H. Sawada, A characterization of the modular representations of finite groups with split (B, N)-pairs, *Math. Z.*, **155** (1977), 29–41.

[78] K. D. Schewe, Blöcke exzeptioneller Chevalley-Gruppen, *Bonner Mathematische Schriften*, **165**, 1985.

[79] I. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, *in*: I. Schur, Gesammelte Abhandlungen I, pp. 1–70, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[80] J. Shamash, Blocks and Brauer trees for groups of type $G_2(q)$, *in*: The Arcata Conference on Representations of Finite Groups, pp. 283–295, 1987.

[81] J. Shamash, Brauer trees for blocks of cyclic defect in the groups $G_2(q)$ for primes dividing $q^2 \pm q + 1$, *J. Algebra*, **123** (1989), 378–396.

[82] J. Shamash, Blocks and Brauer trees in the groups $G_2(q)$ for primes dividing $q \pm 1$, *Comm. Algebra*, **17** (1989), 1901–1949.

[83] J. Shamash, Blocks and Brauer trees for the groups $G_2(2^k)$, $G_2(3^k)$, *Comm. Algebra*, **20** (1992), 1375–1387.

[84] Shi Jian-Yi, The Kazhdan-Lusztig Cells in Certain Affine Weyl Groups, Springer Lecture Notes in Mathematics Vol. 1179, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 1986.

[85] K. Shinoda, The conjugacy classes of the finite Ree groups of type (F_4), *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA*, **21** (1974), 1–15.

[86] W. A. Simpson and J. S. Frame, The character tables for $SL(3, q)$, $SU(3, q^2)$, $PSL(3, q)$, $PSU(3, q^2)$, *Can. J. Math.*, **25** (1973), 486–494.

[87] B. Srinivasan, Representations of finite Chevalley groups, Springer Lecture Notes in Mathematics Vol. 764, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979.

[88] R. Steinberg, Prime power representations of finite linear groups II, *Can. J. Math.*, **9** (1957), 347–351.

[89] R. Steinberg, Endomorphisms of linear algebraic groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **80** (1968).

[90] N. B. Tinberg, The Steinberg component of a finite group with a split (B, N)-pair, *J. Algebra*, **104** (1986), 126–134.

[91] F. D. Veldkamp, Regular elements in anisotropic tori, *in*: Contributions to Algebra, pp. 389–424, Academic Press, New York, 1977.

[92] H. N. Ward, On Rees series of simple groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121** (1966), 62–89.

[93] D. White, The 2-blocks and decomposition numbers of $Sp(4, q)$, q odd, *J. Algebra*, **131** (1990), 703–725.

[94] D. L. Winter, The automorphism group of an extraspecial p-group, *Rocky Mountain J. Math.*, **2** (1972), 159–168.

Index

Lebenslauf

27.07.1955	in Freiburg i.Br. geboren als Sohn des Landwirts Richard Hiß und seiner Ehefrau Berta, geb. Trautwein
29.04.1962	Eintritt in die Grund– und Hauptschule Eichstetten
19.04.1966	Eintritt in das Rotteck-Gymnasium Freiburg
30.05.1974	Abitur
01.10.1974–31.12.1975	Wehrdienst in Sigmaringen
05.04.1976	Beginn des Studiums der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg. Stipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes
30.04.1981	Diplom in Mathematik
01.10.1981–03.07.1982	Studium an der University of Warwick, Coventry, England, mit einem Stipendium der Studienstiftung
07.07.1983	Promotion in Freiburg bei Prof. O.H. Kegel
01.10.1983–14.03.1984	Wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl D für Mathematik der RWTH Aachen
15.03.1984–31.07.1987	Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft am Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen
01.11.1986–30.11.1986	Forschungsaufenthalt an der University of Illinois at Chicago Circle
01.08.1987–14.11.1989	Hochschulassistent am Lehrstuhl B für Mathematik, RWTH Aachen
seit 15.11.1989	Hochschulassistent am Interdisziplinären Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen der Universität Heidelberg