Die sporadischen Gruppen

Ausarbeitung eines anlässlich der Ehrenpromotion von Professor Bernd Fischer am 5. Juli 2002 in Gießen gehaltenen Vortrags

Gerhard Hiss

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 01-02, 20D08, 20-02, 20-03
- Keywords and Phrases: Sporadic groups, Fischer groups, Monster, finite simple groups

On July 5, 2002, Professor Bernd Fischer was awarded an Honorary Doctorate Degree by the University of Gießen. This article is an extended version of the talk I gave on this occasion. It surveys the discovery and construction of some of the sporadic simple groups, namely the Mathieu groups, the Higman-Sims group, the Conway groups, the Fischer groups, the Monster and the Babymonster. The "Monstrous Moonshine" conjecture of Thompson, Conway and Norton, and its solution by Borcherds is also sketched.

Gerhard Hiss, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen,
gerhard.hiss@math.rwth-aachen.de

1. Einleitung

Eine Gruppe G heißt *einfach*, wenn sie nicht-trivial ist (d.h. mindestens zwei Elemente besitzt) und jeder surjektive Gruppenhomomorphismus von G auf eine nicht-triviale Gruppe bereits ein Isomorphismus ist. Die endlichen einfachen Gruppen sind die elementaren Bausteine, aus denen alle endlichen Gruppen zusammengesetzt sind. Eine gemeinsame, sich über mehrere Jahrzehnte erstreckende Anstrengung vieler Dutzend Mathematiker führte schließlich zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen, eine der bedeutendsten Errungenschaften der Mathematik des 20. Jahrhunderts.

Gemäß dieser Klassifikation ist jede endliche einfache Gruppe entweder zyklisch von Primzahlordnung, eine alternierende Gruppe, eine endliche Gruppe vom Lie-Typ, oder eine von 26 sporadischen Gruppen. Die alternierende Gruppe A_n ist die Gruppe der geraden Permutationen von n Ziffern. Sie ist einfach für $n \geq 5$. Die endlichen Gruppen vom Lie-Typ sind die endlichen Analoga der Lie-Gruppen über den reellen oder komplexen Zahlen. In Tabelle 1 sind die 16 Serien der endlichen einfachen Gruppen vom Lie-Typ zusammengestellt. Der Parameter q bezeichnet darin jeweils eine Primzahlpotenz, die Parameter n und m natürliche Zahlen.

In dieser Arbeit stehen die sporadischen Gruppen im Mittelpunkt. Deren Faszination ergibt sich aus ihren mannigfaltigen Querverbindungen zu anderen Gebieten der Mathematik, wie etwa der Kombinatorik, der Codierungstheorie, der Geometrie, der Zahlentheorie, der Funktionentheorie oder der String-Theorie. Im Zentrum aller dieser Verbindungen steht das Monster, die größte der sporadischen Gruppen und die wohl faszinierendste Entdeckung von Professor Fischer.

Die sporadischen Gruppen wurden im Zeitraum von 1861–1981 entdeckt. Zwischen der „Entdeckung“ einer sporadischen Gruppe, d.h. ihrer Beschreibung durch Eigenschaften meist gruppentheoretischer Natur, bis zu ihrer „Konstruktion“, die meist gleichbedeutend mit dem Beweis ihrer Existenz war, klaffte oft eine große zeitliche Lücke. Dazwischen wurden weitere Eigenschaften einer hypothetischen Gruppe bestimmt, wie etwa ihre Ordnung, ihre maximalen Untergruppen und ihre Charaktertafel. Diese Eigenschaften gingen oft wesentlich in den Existenzbeweis mit ein.

Eine Liste der sporadischen Gruppen mit Daten zu ihrer Entdeckung und Konstruktion findet sich in Tabelle 2. Eine kurze Einführung in die Geschichte dieser Gruppen gibt Aschbacher in seiner Monographie [1, § 15]. Mehr Einzelheiten finden sich in Gorensteins Buch [15, Abschnitte 2.2–2.10].

Die Bezeichnung „sporadisch“ für diejenigen einfachen Gruppen, die sich in keine bekannte unendliche Serie von Gruppen einfügen, geht vermutlich auf eine Bemerkung in Burnsides Buch [4] zurück. In Note N, S. 504, schreibt Burnside in Bezug auf die Mathieu-Gruppen:

„These apparently sporadic simple groups would probably repay a closer examination than they have yet received.“

Diese Bezeichnung wurde später von Conway aufgegriffen, und taucht wohl zum ersten Mal im Titel von [6] wieder auf.

Bis heute fehlt ein einheitlicher Zugang zur Beschreibung und Konstruktion aller sporadischer Gruppen, und es ist fraglich, ob ein solcher Zugang überhaupt möglich ist. Augenscheinlich wird dieses Problem in den beiden Monographien [1, 21], die

Tabelle 1. Die endlichen einfachen Gruppen vom Lie-Typ

Bezeichnung	Parameter	Name (vereinfacht)
$\mathrm{PSL}_n(q)$	$n \geq 2$, $(n, q) \neq (2, 2), (2, 3)$	lineare Gruppen
$\mathrm{PSU}_n(q)$	$n \geq 3$, $(n, q) \neq (3, 2)$	unitäre Gruppen
$\mathrm{PSp}_{2m}(q)$	$m \geq 2$, $(m, q) \neq (2, 2)$	symplektische Gruppen
$\Omega_{2m+1}(q)$	$m \geq 3$, q ungerade	orthogonale Gruppen
$\mathrm{P}\Omega^+_{2m}(q)$	$m \geq 4$	"
$\mathrm{P}\Omega^-_{2m}(q)$	$m \geq 4$	"
$G_2(q)$	$q \geq 3$	
$F_4(q)$		
$E_6(q)$		
$E_7(q)$		
$E_8(q)$		
${}^2E_6(q)$		
${}^3D_4(q)$		Steinberg-Trialitäts-Gruppen
${}^2B_2(q)$	$q = 2^{2m+1}$, $m \geq 1$	Suzuki-Gruppen
${}^2G_2(q)$	$q = 3^{2m+1}$, $m \geq 1$	Ree-Gruppen
${}^2F_4(q)$	$q = 2^{2m+1}$, $m \geq 1$	Ree-Gruppen
${}^2F_4(2)'$		Tits-Gruppe

jeweils nur einen Teil der sporadischen Gruppen mit ihrem systematischen Ansatz erfassen.

Bei großzügiger Auslegung lässt sich allerdings jede sporadische Gruppe durch eines von zwei grundlegenden Prinzipien beschreiben. Das erste davon ist geometrischer Art: Die Gruppen treten als Symmetriegruppen von Designs, Graphen, Codes oder Gittern auf. So sind etwa die zuerst entdeckten sporadischen Gruppen, die Mathieu-Gruppen, Symmetriegruppen von Golay-Codes. Auch die Beschreibung der klassischen Gruppen als lineare Gruppen die eine Form, z.B. ein Skalarprodukt, invariant lassen, lässt sich diesem Prinzip zuordnen. Dieser geometrisch anschauliche Zugang soll in der vorliegenden Arbeit im Vordergrund stehen. Das zweite Prinzip ist gruppentheoretischer Art: Die Gruppen werden beschrieben mittels des Zentralisators einer Involution. Ausgangspunkt ist ein Satz von Brauer und Fowler, der besagt, dass es bis auf Isomorphie nur endlich viele einfache Gruppen gibt, die eine Involution mit einem vorgegebenen Zentralisator haben. Die erste sporadische Gruppe, die nach den Mathieu-Gruppen gefunden wurde, die Janko-Gruppe J_1, wurde auf diese Weise entdeckt. Der gruppentheoretische Zugang ist natürlich nicht weniger bedeutend als der geometrische, er ist jedoch wesentlich technischer und wird deshalb hier nur am Rande eine Rolle spielen.

2. Die Mathieu-Gruppen

Die fünf Mathieu-Gruppen wurden von Émile Mathieu in den 60er Jahren des 19. Jahrhunderts bei der systematischen Suche nach mehrfach transitiven Permutationsgruppen entdeckt.

Mit einer Permutationsgruppe ist hier eine Untergruppe der vollen symmetrischen Gruppe S_Ω auf der endlichen Menge Ω gemeint. Eine solche Permutationsgruppe $G \leq S_\Omega$ ist *transitiv* auf Ω, wenn je zwei Punkte von Ω durch ein Element

TABELLE 2. Die Entdeckung der sporadischen Gruppen

Gruppe	Entdeckung	Konstruktion
M_{11}	Mathieu 1861 [42]	
M_{12}	"	
M_{22}	"	
M_{23}	"	
M_{24}	"	
J_1	Janko '65 [31, 32]	
J_2	Janko '68 [33]	Hall, Wales '68 [22, 23]
J_3	Janko '68 [33]	G. Higman, McKay '69 [26, 27]
J_4	Janko '76 [34]	Cambridge '80 [2]
HS	D. G. Higman, Sims '67 [28]	
McL	McLaughlin '69 [44]	
Suz	Suzuki '69	
Ru	Rudvalis '72 [47]	Conway, Wales '73 [11]
He	Held '69 [24, 25]	G. Higman, McKay '69 [27]
Ly	Lyons '72 [40, 41]	Sims '73 [48]
ON	O'Nan '76 [46]	Sims '73
Co_1	Conway '69 [6, 7]	
Co_2	"	
Co_3	"	
Fi_{22}	Fischer '71 [12]	
Fi_{23}	"	
Fi_{24}	"	
HN	Thompson '73	Norton '76
Th	Thompson '73	P. Smith $\leq$ '76
B	Fischer '73	Leon, Sims '77 [37]
M	Fischer, Griess, '73	Griess '81 [19, 20]

von G aufeinander abgebildet werden. Mit anderen Worten: Ω bildet eine einzige Bahn unter der Operation von G. Wird jedes Paar verschiedener Punkte von Ω auf jedes andere solche Paar abgebildet, dann operiert G *zweifach transitiv*. Eine Gruppe $G \leq S_\Omega$ ist genau dann zweifach transitiv auf Ω, wenn sie transitiv ist und der Stabilisator G_ω eines beliebigen Punktes $\omega \in \Omega$ transitiv auf $\Omega \setminus \{\omega\}$ ist. (Der Stabilisator G_ω besteht aus denjenigen Elementen von G, die ω festlassen.) Analog ist die dreifache Transitivität oder allgemeiner die m-fache Transitivität für eine natürliche Zahl m definiert. Ist $|\Omega| = n \geq 3$, dann ist S_Ω $(n-1)$-fach transitiv, und die alternierende Gruppe A_Ω der geraden Permutationen noch $(n-2)$-fach.

2.1. **Mathieus Zugang.** Die Konstruktionen von Mathieu beruhen auf dem Prinzip der transitiven Erweiterung. Gegeben sei die transitive Permutationsgruppe H auf der endlichen Menge Ω. Eine *transitive Erweiterung* von H ist eine transitive Permutationsgruppe G auf der Menge $\Omega_1 = \Omega \cup \{\alpha\}$, wobei $\alpha \notin \Omega$, so dass H gleich dem Stabilisator G_α ist. In diesem Fall ist G automatisch $(m+1)$-fach transitiv auf Ω_1, wenn H schon m-fach transitiv auf Ω war.

Ausgehend von einer transitiven Permutationsgruppe auf 8 Punkten konstruiert Mathieu auf diese Weise in [42, S. 270–274] eine 5-fach transitive Permutationsgruppe auf 12 Punkten, eben die Mathieu-Gruppe M_{12}. In der gleichen Arbeit kündigt Mathieu auch die Konstruktion einer 5-fach transitiven Permutationsgruppe auf 24 Punkten an, die heute mit M_{24} bezeichnet wird. Die Konstruktion wird in [43] ausgeführt.

Die beiden Gruppen M_{11} und M_{23} sind jeweils 4-fach transitiv auf 11 bzw. 23 Punkten. Die Mathieu-Gruppe M_{22} ist noch 3-fach transitiv auf 22 Punkten. Die hier genannten Gruppen ergeben sich aus M_{12} bzw. M_{24} durch Übergang zu Stablisatoren: $M_{23} = (M_{24})_{24}$, $M_{11} = (M_{12})_{12}$ und $M_{22} = (M_{23})_{22}$.

Die kleinste der Mathieu-Gruppen, M_{11}, ist auch zugleich die kleinste der sporadischen Gruppen. Es ist $|M_{11}| = 7\,920$.

Wie man heute weiß, war Mathieu mit seiner Suche sehr erfolgreich. Er hat nämlich alle 4- und 5-fach transitiven Permutationsgruppen gefunden, die von den symmetrischen und alternierenden Gruppen auf der jeweiligen Menge verschieden sind. Der folgende Satz ergibt sich aus der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen (siehe [5, Theorem 4.11]).

Satz: *Es sei Ω eine endliche Menge mit $|\Omega| \geq 6$ und $G \leq S_\Omega$ sei m-fach transitiv für ein $m \geq 4$. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(1) *Es ist $G = S_\Omega$ oder A_Ω.*
(2) *Es ist $m = 4$ und $G = M_{11}$ oder M_{23}.*
(3) *Es ist $m = 5$ und $G = M_{12}$ oder M_{24}.*

2.2. **Witts Zugang.** In [58] stellt Ernst Witt zwei der Mathieu-Gruppen mit den folgenden Worten vor (Hervorhebungen im Original):

„Die Gruppe M_{24} tritt in *natürlicher* Weise bei folgender Aufgabe auf:

Aus 24 Personen sollen $\frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}$ Vereine gebildet werden. Jeder Verein soll aus acht Mitgliedern bestehen. Fünf beliebige Personen sollen jeweils einem einzigen Verein angehören.

[...]

Die Gruppe M_{24} besteht genau aus denjenigen Personenvertauschungen des Systems $\mathfrak{S}(5, 8, 24)$, bei welchem Vereine in Vereine übergehen.

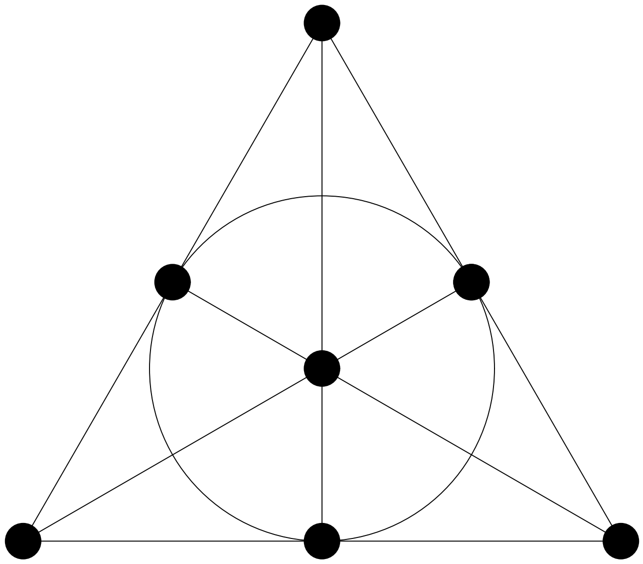
Entsprechend tritt M_{12} als Automorphismengruppe des einzigen Systems $\mathfrak{S}(5, 6, 12)$ auf.“

Ein *Steinersystem* $\mathfrak{S}(l, m, n)$ ist ein System von m-elementigen Teilmengen (den *Vereinen*) einer n-elementigen Menge N (den *Personen*) mit der Eigenschaft, dass je l Elemente von N in genau einer Menge des Systems $\mathfrak{S}(l, m, n)$ enthalten sind (jeweils l Personen gehören genau einem Verein an). Die Automorphismengruppe oder Symmetriegruppe eines Steinersystems $\mathfrak{S}(l, m, n)$ besteht aus denjenigen Permutationen von N (den Personenvertauschungen), die $\mathfrak{S}(l, m, n)$ erhalten (die also einen Verein wieder auf einen Verein abbilden).

Witt beschreibt in seiner oben zitierten Einleitung zwei Steinersysteme $\mathfrak{S}(5, 8, 24)$ und $\mathfrak{S}(5, 6, 12)$ und führt die Mathieu-Gruppen M_{24} und M_{12} als deren Automorphismengruppen ein.

Das Steinersystem $\mathfrak{S}(2, 3, 7)$ ist auch als Fano-Ebene bekannt, die projektive Ebene über dem Körper mit zwei Elementen. Ihre Automorphismengruppe ist die einfache Gruppe der Ordnung 168. Das bekannte Bild der Fano-Ebene, das allerdings nur einen Teil ihrer Symmetrie zeigt, ist in Abbildung 1 wiedergegeben.

Abbildung 1. Ein Bild der Fano-Ebene



Auch Witt benutzt in seiner Arbeit [58] die Methode der transitiven Erweiterung um die Mathieu-Gruppen M_{12} und M_{24} zu konstruieren. Allerdings sind seine Beweise gegenüber denen der Originalarbeiten wesentlich kürzer und übersichtlicher, weil er à priori von zweifach transitiven Gruppen ausgeht. Für solche ist die Existenz von transitiven Erweiterungen erheblich leichter zu verifizieren (oder zu widerlegen).

Die Steinersysteme $\mathfrak{S}(5,8,24)$ und $\mathfrak{S}(5,6,12)$ erhält Witt aus gruppentheoretischen Daten der beiden Gruppen M_{24} und M_{12}. In der Arbeit [59] zeigt Witt unter Anderem die Eindeutigkeit dieser beiden Steinersysteme bis auf Isomorphie.

Die von Mathieu und Witt angewandte Methode der transitiven Erweiterung führt auch bei der Konstruktion der Higman-Sims-Gruppe zum Erfolg. Bevor ich auf dieses Beispiel etwas genauer eingehe, möchte ich eine Verallgemeinerung von mehrfach transitiven Gruppen vorstellen.

2.3. **Rang-3-Gruppen.** Sei $G \leq S_\Omega$ eine transitive Untergruppe der symmetrischen Gruppe auf der endlichen Menge Ω mit $|\Omega| \geq 2$. Wir betrachten die diagonale Operation von G auf dem kartesischen Quadrat $\Omega \times \Omega$: $g(\omega_1, \omega_2) := (g\omega_1, g\omega_2)$, $g \in G$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$. Der *Rang* von G auf Ω ist die Anzahl der Bahnen von G auf $\Omega \times \Omega$. Die Diagonale $\{(\omega,\omega) \mid \omega \in \Omega\} \subset \Omega \times \Omega$ ist offensichtlich eine Bahn unter G, so dass der Rang von G auf Ω mindestens 2 ist. Genau dann ist G zweifach-transitiv auf Ω, wenn G den Rang 2 hat. In diesem Sinne bilden Rang-3-Gruppen eine Verallgemeinerung von mehrfach transitiven Gruppen.

Eine von der Diagonalen verschiedene Bahn von G auf $\Omega \times \Omega$ kann als gerichteter Graph mit Knotenmenge Ω interpretiert werden, auf dem G knoten- und kantentransitiv operiert. Diese Graphen heißen auch *Orbitalgraphen*. Im Falle einer zweifach transitiven Operation erhalten wir den vollständigen Graphen, im Falle einer Rang-3-Operation erhalten wir zwei komplementäre Graphen.

TABELLE 3. Die Rang-3-Gruppen unter den sporadischen Gruppen

Gruppe	Grad	Gruppe	Grad
J_2	100	Ru	4 060
HS	100	Fi_{22}	3 510
McL	275	Fi_{23}	31 671
Suz	1 782	Fi_{24}	306 936

In Tabelle 3 sind diejenigen sporadischen Gruppen zusammengestellt, die eine Rang-3-Operation besitzen.

2.4. **Die Higman-Sims-Gruppe.** Diese Gruppe wurde in der Nacht vom Samstag, den 2., auf Sonntag, den 3. September 1967 entdeckt. Ihre Konstruktion wurde vollständig „von Hand“ ausgeführt und benutzt die oben diskutierten Prinzipien der transitiven Erweiterung und der Rang-3-Gruppen. Die Existenz wurde durch die explizite Angabe eines der beiden Orbital-Graphen in der hypothetischen Rang-3-Permutationsdarstellung der Gruppe bewiesen.

Der Graph $\mathcal{G}_{\mathrm{HS}}$, der Anlass zur Higman-Sims-Gruppe gibt, kann wie folgt beschrieben werden. Die 100 Knoten von $\mathcal{G}_{\mathrm{HS}}$ bestehen aus einem Symbol $*$, aus den 22 Zahlen $1, 2, \ldots, 22$, sowie aus den 77 Vereinen $B_1, \ldots, B_{77}$ eines Steinersystems $\mathfrak{S}(3,6,22)$, das sich leicht aus einem $\mathfrak{S}(5,8,24)$ durch zweimaliges „Punktieren“ gewinnen lässt.

In $\mathcal{G}_{\mathrm{HS}}$ ist $*$ zu jedem der 22 Knoten aus $\{1, 2, \ldots, 22\}$ verbunden, aber zu keinem der Knoten $B_1, \ldots, B_{77}$. Ein Knoten $i \in \{1, \ldots, 22\}$ ist genau dann zu einem B_j verbunden, wenn i in B_j liegt. Zwei Knoten B_j und B_k sind genau dann verbunden, wenn sie disjunkt sind. Higman und Sims haben in jener denkwürdigen Nacht gezeigt, dass die Automorphismengruppe G von $\mathcal{G}_{\mathrm{HS}}$ transitiv ist. Es ist klar, dass der Stabilisator von $*$ in G isomorph zu $M_{22}.2$ ist, der Automorphismengruppe von $\mathfrak{S}(3,6,22)$. Später ist es Higman und Sims gelungen zu zeigen, dass die Ordnung von G gleich $44\,352\,000 \times 2$ ist, und dass die Kommutatorgruppe von G eine einfache Gruppe ist, die zur damaligen Zeit noch nicht bekannt war.

In einer Email an den Autor [50] erinnert sich Charles Sims an die Ereignisse jener Nacht wie folgt.

“[...]

Don Higman and I were in Oxford for a conference entitled “Computational Problems in Abstract Algebra”, which was held from August 29 to September 2, 1967. [...]

Prior to this conference, Don had been investigating rank 3 groups. He had discovered a number of conditions that the parameters of such a group have to satisfy and had used a computer to generate a list of parameters that satisfied all of his conditions. I was familiar with Don’s work. [...]

At the Oxford conference, Marshall Hall announced the construction of Janko’s second group. There is a long paper by Marshall in the conference proceedings that includes, among other things, a description of how this group was constructed. The group was given as a rank 3 group of degree 100 with subdegrees 1, 36, and 63.

After Marshall's talk, Don and I discussed whether there might be other rank 3 groups of degree 100. If it were not the case that we use the decimal system and that $100 = 10^2$, I am not sure we would have asked this question.

Don consulted his list of rank 3 parameters and found that the subdegrees 1, 18, 81 appeared on the list for degree 100. It did not take us long to realize that the wreath product of S_{10} and Z_2 has a rank 3 representation (on the Cartesian product of two copies of $\{1, \ldots, 10\}$) of degree 100 with these subdegrees.

Encouraged, we looked at the list again. There was one other set of subdegrees for a possible rank 3 group of degree 100, namely 1, 22, 77. The number 22 certainly suggests that the stabilizer of a point should be M_{22} or its automorphism group. (S_{22} and A_{22} don't have representations of degree 77.) We did not immediately see how to construct such a group and agreed to continue our discussions later.

The conference dinner was held on the last day of the conference, Saturday, September 2. This dinner was quite formal. After the main part of the meal, the participants were asked to leave the hall while the staff cleared the tables and prepared for dessert and coffee. As Don and I walked around the courtyard of the college in which the dinner was being held, we again talked about $100 = 1+22+77$. The first question to answer was whether M_{22} has a transitive representation of degree 77. Both Don and I were familiar with combinatorial designs and knew that M_{22} acts on $\mathfrak{S}(3, 6, 22)$. As we walked, we computed the number of blocks in this design. When we got the answer 77, we were sure we were on to something.

At this point, it was time to go back in for dessert. After the dinner was finished, we went to Don's room [...] to continue working. There were some false starts, but eventually we realized that we needed to construct a graph of degree or valence 22 with 100 vertices consisting of a point $*$, the 22 points of an $\mathfrak{S}(3, 6, 22)$, and the 77 blocks of that $\mathfrak{S}(3, 6, 22)$. The point $*$ would be connected in the graph to the 22 points. One of the 22 points p would be connected to $*$ and to the 21 blocks containing p. A block would be connected to the 6 points in the block and to 16 other blocks. We had to do some computations, but it was not hard to show that a block is disjoint from exactly 16 other blocks. Thus in the graph, two blocks should be connected if they are disjoint.

At this point we had the graph and we knew that $\mathrm{Aut}(M_{22})$ was the stabilizer of $*$ in the automorphism group of the graph, but we did not know that the automorphism group had any elements that moved $*$. To get additional elements, we used the fact that Witt had proved that $\mathfrak{S}(3, 6, 22)$ was unique.

I don't think we finished until the early morning hours of Sunday, September 3, 1967. There was one uncertainty. We knew we had a new simple group, but we did not know whether the stabilizer of a point in the simple group was M_{22} or $\mathrm{Aut}(M_{22})$.

[...]"

2.5. **Der Golay-Code.** Eine weitere Konstruktion der Mathieu-Gruppen erhält man mit Hilfe der Golay-Codes, hier vorgestellt am Beispiel der M_{24}. Der binäre Golay-Code $\mathcal{C}_{24}$ ist ein $[24, 12, 8]$-Code über $\mathbb{F}_2$, d.h., ein linearer binärer Code der Länge 24, Dimension 12 und Minimaldistanz 8. Diese Eigenschaften bestimmen $\mathcal{C}_{24}$ bis auf Isomorphie (von Codes). Es gilt nun $M_{24} \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{24})$. (Die Automorphismengruppe eines binären Codes ist die Gruppe der Koordinaten-Permutationen, die die Menge der Codewörter invariant lässt.)

Interpretiert man die Codewörter von $\mathcal{C}_{24}$ als Indikatorfunktionen auf der Menge $\underline{24} := \{1, \ldots, 24\}$, dann beschreiben die Codewörter vom Gewicht 8 ein Steinersystem $\mathfrak{S}(5, 8, 24)$.

Die nachfolgende Konstruktion des Golay-Codes ist besonders leicht zu behalten. Sie stammt von Turyn (siehe [38, S.44ff]) und geht von der Fano-Ebene aus (vgl. Abbildung 1). Wir betrachten die Inzidenzmatrix F der Fano-Ebene (in den folgenden Matrizen sind die Nullen durch Punkte dargestellt):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & 1 & . \\ . & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 1 & . & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus bilden wir die Matrizen I und I^* wie folgt.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 \\ . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & 1 & 1 & . & 1 & . & 1 \\ . & . & . & 1 & 1 & . & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad I^* = \begin{bmatrix} . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ . & . & 1 & . & 1 & 1 & . & 1 \\ . & 1 & . & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Die ersten sieben Spalten der Matrizen I und I^* bestehen aus den ersten vier Zeilen von F, die bei I^* von hinten nach vorne gelesen werden. Diese Zeilen werden jeweils um den Eintrag 1 ergänzt, um die Zeilensumme gerade zu machen. Der Golay-Code $\mathcal{C}_{24}$ besitzt als Basis die Zeilen der folgenden Matrix:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & I \\ 0 & I & I \\ I^* & I^* & I^* \end{bmatrix}$$

3. Die Conway-Gruppen

Bisher haben wir einige sporadische Gruppen kennengelernt, die als Symmetriegruppen von Designs (Steinersysteme), Graphen (Higman-Sims-Graph) oder Codes (Golay-Codes) auftreten. Jetzt wollen wir Symmetriegruppen von Gittern betrachten.

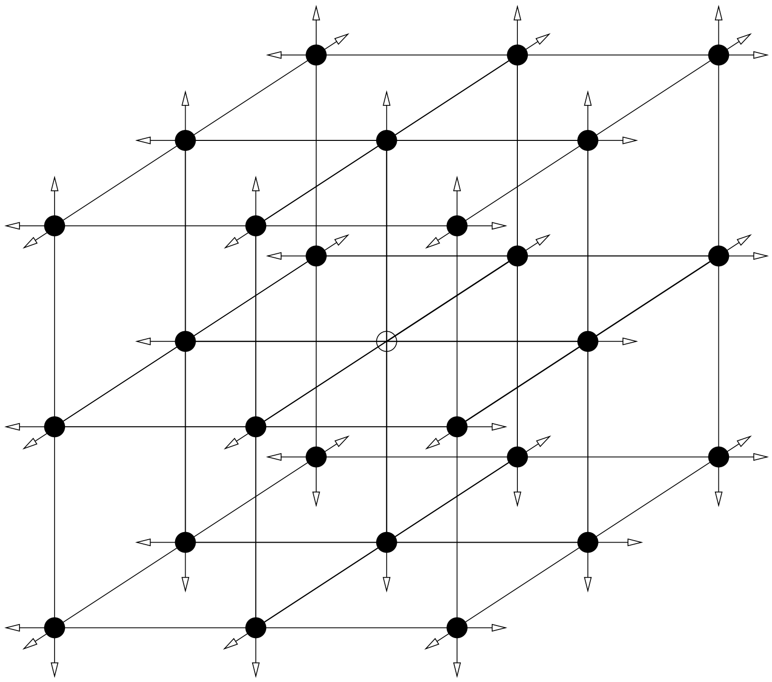
3.1. **Das Leech-Gitter.** Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ kennzeichnen wir im Folgenden durch Unterstreichen. Ein *Gitter* L in $\mathbb{R}^n$ besteht aus den Vektoren

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{v}_i, \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z},$$

wobei $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Die *Symmetriegruppe* von L besteht aus denjenigen orthogonalen Transformationen $\sigma \in O(n)$ mit $\sigma(L) = L$.

Als Beispiel ist das kubische Gitter in Abbildung 2 aufgezeichnet. Es ist leicht zu sehen, dass die Symmetriegruppe des kubischen Gitters isomorph zu $C_2 \times S_4$ ist, wobei C_2 eine zyklische Gruppe der Ordnung 2 bezeichnet, die hier von der Punktspiegelung am Ursprung erzeugt wird. Die symmetrische Gruppe S_4 ist die

ABBILDUNG 2. Das kubische Gitter



Untergruppe der Symmetriegruppe, die aus den Drehungen besteht, die das kubische Gitter invariant lassen. Dabei werden die vier Diagonalen des Einheitswürfels transistiv permutiert.

Im Folgenden sei $\underline{0}$ der Nullvektor in $\mathbb{R}^{24}$ und $\underline{1} \in \mathbb{R}^{24}$ der Vektor mit sämtlichen Einträgen 1. Wie in Abschnitt 2.5 sei $\mathcal{C}_{24}$ der Golay-Code, hier jedoch als Teilmenge von $\mathbb{R}^{24}$ aufgefasst. Das *Leech-Gitter* besteht aus den Vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{8}}(\underline{0} + 2\underline{c} + 4\underline{x}), \qquad \frac{1}{\sqrt{8}}(\underline{1} + 2\underline{c} + 4\underline{y}),$$

mit $\underline{c} \in \mathcal{C}_{24}$, $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{Z}^{24}$ mit $\sum x_i$ gerade und $\sum y_i$ ungerade. Diese Definition ist dem Buch von Conway und Sloane [10, Chapter 4, Section 11] entnommen. Die Symmetriegruppe des Leech-Gitters ist die berühmte Conway-Gruppe Co_0.

Das Leech-Gitter ist in vielerlei Hinsicht bemerkenswert. Zum Beispiel liefert es die dichteste bekannte Kugelpackung in $\mathbb{R}^{24}$ (siehe [10, Subsection 1.5]). Allerdings ist nicht bekannt, ob es auch die dichtest mögliche Kugelpackung in dieser Dimension liefert. Das Leech-Gitter kann auch charakterisiert werden als das (bis auf Isometrie) eindeutig bestimmte selbstduale, unimodulare Gitter in $\mathbb{R}^{24}$, das keine Vektoren der Norm 2 hat. Conway gibt einen kurzen Beweis davon in [10, Chapter 12].

Die spannende Entdeckung der Conway-Gruppen und ihrer Eigenschaften aus dem Leech-Gitter durch John Conway ist in dem sehr lesenswerten Buch von Thomas M. Thompson [53] beschrieben. Einen besonders aufschlussreichen Eindruck von der Arbeitsweise von Conway und der Rolle von John Thompson gibt [53, Chapter 3, Section 3].

Wie schon angedeutet zog die Entdeckung der Conway-Gruppe die Entdeckung weiterer, bis dahin unbekannter, sporadischer Gruppen mit sich. Als erstes ergibt sich die einfache Conway-Gruppe Co_1 als Faktorgruppe von Co_0 modulo ihrem Zentrum der Ordnung 2. Der Stabilisator in Co_0 eines nicht-trivialen kürzesten Vektors des Leech-Gitters ist die einfach sporadische Gruppe Co_2. Der Stabilisator eines Vektor-Paares (v_1, v_2) mit $||v_1 - v_2||^2 = 6$ ist die Conway-Gruppe Co_3. Erstaunlicherweise treten auch viele schon bekannte sporadische Gruppen als Untergruppen (oder Faktorgruppen von Untergruppen) in der Conway-Gruppe auf. So ist etwa der Stabilisator eines Vektor-Paares (v_1, v_2) mit $||v_1 - v_2||^2 = 14$ isomorph zur oben schon erwähnten Higman-Sims-Gruppe. Insgesamt sind auf diese Weise zwölf sporadische Gruppen in der Conway-Gruppe involviert. Für mehr Einzelheiten sei der Leser auf den Artikel von Conway [10, Chapter 10] und den Atlas [8, S. 180ff] verwiesen.

3.2. **Theta-Reihen.** Um die Ordnungen der Conway-Gruppen zu bestimmen und um Stabilisatoren gewisser Vektor-Konfigurationen mit bekannten Gruppen zu identifizieren, war es notwendig, die Anzahlen von Vektoren gegebener Norm im Leech-Gitter zu berechnen. Diesem Zweck dienen Theta-Reihen von Gittern. Sei L ein Gitter in $\mathbb{R}^n$. Die *Theta-Reihe* von L ist die formale Potrenzreihe

$$\Theta_L(q) = \sum_{n=0}^{\infty} N_L(n)\, q^n$$

mit

$$N_L(n) = |\{\underline{x} \in L \mid \underline{x} \cdot \underline{x} = n\}|.$$

So ist zum Beispiel die Theta-Reihe des kubischen Gitters gegeben durch

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r_3(n)\, q^n &= 1 + 6\,q + 12\,q^2 + 8\,q^3 + 6\,q^4 + \\ &\quad 24\,q^5 + 24\,q^6 + 8\,q^7 + 24\,q^8 \cdots \end{aligned}$$

Hier steht $r_3(n)$ für die Anzahl der Möglichkeiten, n als Summe von 3 Quadraten ganzer Zahlen zu schreiben (wobei zwei Summen mit gleichen Summanden in anderer Reihenfolge zweimal gezählt werden).

Die Theta-Reihe des Leech-Gitters ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \theta(2n)\, q^{2n} &= 1 + 196\,560\, q^4 + 16\,773\,120\, q^6 + \\ &\quad 398\,034\,000\, q^8 + 4\,629\,381\,120\, q^{10} + \cdots \end{aligned}$$

mit

$$\theta(2n) = \frac{65520}{691}[\sigma_{11}(n) - \tau(n)]$$

(siehe z.B. [10, Chapter 4, § 11]). Hierbei ist

$$\sigma_{11}(n) = \sum_{d|n} d^{11}$$

die 11. Teilersummenfunktion und $\tau(n)$ Ramanujans Tau-Funktion, die durch die folgende Identität definiert ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, q^n = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}.$$

Diese Beispiele deuten bereits den engen Zusammenhang zwischen Gittern und der Zahlentheorie an, der über Theta-Reihen vermittelt wird.

3.3. **Modulformen.** Eine auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ und in ∞ meromorphe Funktion f heißt *Modulform (vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$)*, wenn gilt:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{H}$ und alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. (Im Gegensatz zu meinem Vortrag folge ich hier der Sprechweise des Buches von Koecher und Krieg [36, Kapitel 3, § 1].) Wegen $-E_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist eine Modulform von ungeradem Gewicht die Nullfunktion.

Eine Modulform f erlaubt eine Fourier-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z},$$

mit einer nicht-negativen ganzen Zahl N und *Fourier-Koeffizienten* $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq -N$ (siehe etwa [36, Kapitel III, § 1]).

Die Modulformen vom Gewicht 0 heißen *Modulfunktionen*. Sie bilden einen Körper $\mathbb{C}(j)$. Hierbei ist j die sogenannte *modulare Invariante* oder *elliptische Modulfunktion*; die Fourier-Reihe von j $(q = e^{2\pi i z})$ ist:

$$\begin{aligned} j(q) \quad = \quad & q^{-1} + 744 + \\ & 196\,884\, q + \\ & 21\,493\,760\, q^2 + \\ & 864\,299\,970\, q^3 + \\ & 20\,245\,856\,256\, q^4 + \\ & 333\,202\,640\,600\, q^5 + \cdots \end{aligned}$$

Eine Modulform heißt *ganz*, wenn sie holomorph auf $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ ist. Ein berühmter Satz von Hecke stellt einen Zusammenhang zwischen Theta-Reihen von gewissen Gittern und ganzen Modulformen her.

Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gitter, das aus den ganzzahligen Linearkombinationen der Basis $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ besteht. Dann heißt L *unimodular*, wenn $\underline{x} \cdot \underline{y}$ für alle $\underline{x}, \underline{y} \in L$ eine ganze Zahl, und die Determinante der Matrix $(\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j)_{i,j}$ gleich 1 ist, und L heißt *gerade*, wenn $\underline{x} \cdot \underline{x}$ für alle $\underline{x} \in L$ eine gerade ganze Zahl ist. In diesem Fall ist die Theta-Reihe von L von der Form $\Theta_L(q) = \sum_{n=0}^{\infty} N_L(2n)\, q^{2n}$ (siehe Abschnitt 3.2).

Satz: (Hecke, siehe [36, Kapitel V, Sätze 5,6]): *Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ ein gerades, unimodulares Gitter. Dann ist n durch 8 teilbar.*

Die Funktion $\Theta_L(e^{\pi i z}) = \sum_{n=0}^{\infty} N_L(2n)\, e^{2\pi i n z}$ ist eine ganze Modulform vom Gewicht $n/2$.

Dieses Resultat erlaubt es z.B. die Theta-Reihe des Leech-Gitters aus ihren ersten beiden Fourier-Koeffizienten zu berechnen.

4. Die Fischer-Gruppen

Diese Gruppen wurden von Bernd Fischer im Rahmen seiner Klassifikation von 3-Transpositionsgruppen gefunden.

4.1. **3-Transpositionsgruppen.** Im Folgenden stehe $|g|$ für die Ordnung des Elementes g einer endlichen Gruppe. Fischer nennt eine endliche Gruppe G eine 3-*Transpositionsgruppe*, wenn eine Konjugiertenklasse C von Involutionen (das sind Elemente der Ordnung 2) in G existiert, die G erzeugt, und so dass gilt:

$$|st| \in \{1, 2, 3\} \quad \text{für alle } s, t \in C.$$

Natürlich ist, mit obiger Bezeichnung, $|st| = 1$ genau dann wenn $s = t$ ist, und für $s \neq t$ ist $|st| = 2$ genau dann, wenn $st = ts$ ist, d.h., wenn s und t vertauschen.

Als Beispiel diene die symmetrische Gruppe S_n. Ist $C \subseteq S_n$ die Konjugiertenklasse der Transposition $\{(i,j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$, dann gilt für $(i,j), (k,l) \in C$:

$$|(i,j)(k,l)| = \begin{cases} 1, & \text{falls } |\{i,j\} \cap \{k,l\}| = 2, \\ 2, & \text{falls } |\{i,j\} \cap \{k,l\}| = 0, \\ 3, & \text{falls } |\{i,j\} \cap \{k,l\}| = 1. \end{cases}$$

Da S_n von C erzeugt wird, ist also S_n eine 3-Transpositionsgruppe.

Einen Höhepunkt im Werk von Professor Fischer stellt sicherlich die Klassifikation aller 3-Transpositionsgruppen dar (siehe [12]). Hierbei treten neben bekannten Serien von Gruppen, den symmetrischen Gruppen S_n $(n \geq 2)$, den symplektischen Gruppen $\mathrm{Sp}_{2n}(2)$ $(n > 2)$, den unitären und orthogonalen Gruppen über kleinen Körpern, auch drei neue sporadische Gruppen auf, von Fischer mit $M(22)$, $M(23)$, und $M(24)$ bezeichnet. In heutiger Notation sind dies die drei *Fischer-Gruppen* Fi_{22}, Fi_{23} und Fi_{24} bzw. F_3. Die ersten beiden davon sind einfach, die letzte hat eine einfache Kommutatorgruppe Fi_{24}' vom Index 2.

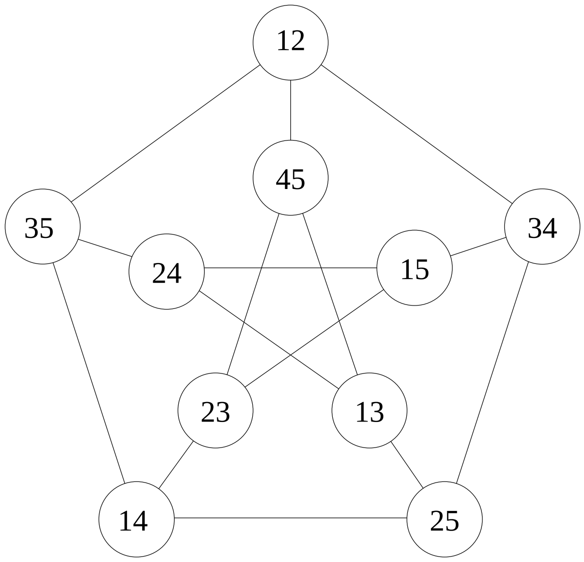
4.2. **Vertauschungsgraphen.** Die Arbeit von Fischer ist stark geometrisch geprägt. Dies hat es ihm erlaubt, die Existenz seiner neuen Gruppen ohne Hilfe von Computern zu beweisen.

Der Klasse C von 3-Transpositionen ordnet Fischer einen Graphen zu, den *Vertauschungsgraphen*. Dessen Knoten sind die Elemente von C, und zwei Knoten s und t sind genau dann verbunden, wenn $st = ts$ ist, d.h., wenn s und t vertauschbar sind. Ein Beispiel für einen Vertauschungsgraphen ist in Bild 3 gegeben. Hier ist $G = S_5$ und C die Menge der Transpositionen auf 5 Ziffern.

Bei den Untersuchungen von Fischer hat sich herausgestellt, dass die maximalen, vollständigen Teilgraphen des Fischer-Graphen eine große Rolle spielen. Diese gehören zu maximalen Teilmengen paarweise vertauschbarer Elemente von C. Der Stabilisator eines solchen maximalen Teilgraphen kontrolliert wesentlich die Struktur von G. Bei den drei oben genannten Fischer-Gruppen sind diese Stabilisatoren Erweiterungen von Mathieu-Gruppen H gemäß der folgenden Tabelle. Dies erklärt die von Fischer eingeführte Bezeichnung seiner Gruppen.

G	Fi_{22}	Fi_{23}	Fi_{24}
H	M_{22}	M_{23}	M_{24}

ABBILDUNG 3. Der Fischer-Graph für S_5



4.3. **Historische Notiz.** Die ersten Erwähnungen der Fischer-Gruppen finden sich in den Vortragsbüchern von Oberwolfach. In [54, S. 31] beschreibt Fischer die Gruppe Fi_{22}. Hier findet sich nicht nur eine Skizze für die Konstruktion dieser Gruppe sondern auch ihre Ordnung. Der Eintrag von Bernd Fischer erfolgte im Rahmen einer „Arbeitsgemeinschaft über Gruppen und Geometrie, 2.–5. 1. 1969“, veranstaltet von Reinhold Baer. Ich zitiere das Vortragsbuch:

„Erweiterungen von $\mathrm{PSU}(6, 2^2)$

Sei D die Menge der unitären Transvektionen in $G = \mathrm{PSU}(6,4)$. Sei $\Gamma(D)$ der Graph mit den Punkten aus D und den Verbindungen d ∘—∘ $d' \Leftrightarrow dd' = d'd \neq 1$. In G gibt es drei Konjugiertenklassen von Untergruppen R mit $|D \cap R| = 126$, $R' \underset{2}{\lneq} R$, $|R| = 2^8 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$, R' ist einfach. $\Gamma(D)$ heißt eine Erweiterung zu Γ mit den Eigenschaften: $|\Gamma| = 3510$; sind a, b verschiedene, nicht verbundene Punkte von Γ, so gibt es genau einen Punkt $z = a \circ b$ in Γ, so daß z mit allen mit a und b verbundenen Punkten verbunden ist; die Abbildungen $p^+ : x \to x \circ p$, $x \to x$, falls $x \circ p$ nicht definiert, sind Automorphismen von Γ. Ferner folgt $|\mathrm{Aut}\,\Gamma| = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. $(\mathrm{Aut}\,\Gamma)'$ ist einfach und hat Index 2 in $\mathrm{Aut}\,\Gamma$. Möglicherweise gibt es zwei weitere Erweiterungen von Γ; die Automorphismengruppen wären einfach und hätten die Ordnungen $2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$ bzw. $2^{22} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 1483^*$.

Bernd Fischer“

In diesem Eintrag wird nicht der Vertauschungsgraph aus Abschnitt 4.2 beschrieben, sondern sein Komplement. Die Gruppe $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ operiert als Rang-3-Gruppe auf den Punkten von Γ, und Γ und sein Komplement sind gerade die beiden Orbitalgraphen dieser Operation (siehe Abschnitt 2.3).

*Vielleicht ein Schreibfehler. Richtig wäre 5481.

Im gleichen Band des Vortragsbuches, im Rahmen der Tagung „Gruppen und Geometrien, 18.–24.5.1969“, bestätigt Bernd Fischer auf den Seiten 204–205 die Existenz der beiden großen Fischer-Gruppen und gibt deren Ordnungen an. Hier verwendet er auch zum ersten Mal die Schreibweise $M(22)$, $M(23)$ und $M(24)$. Es folgt der Wortlaut dieses Eintrags:

„Extensions of finite simple groups

Let $G = \mathrm{PSU}(6,2)$, d an involution in $\mathbb{Z}(S)$, $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Then G admits an extension $M(22)$ which is simple of order $2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ (see p. 31); $M(22)$ is generated by a class D_1 of conjugate involutions and $\mathbb{C}_{M(22)}(x)/\langle x \rangle \simeq \mathrm{PSU}(6,2)$ for $x \in D_1$. The group $M(22)$ has an extension $M(23)$ which is simple of order $2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$; there is a class D_2 of conjugate involutions in $M(23)$ such that $\mathbb{C}_{M(23)}(x)/\langle x \rangle \simeq M(22)$ for $x \in D_2$. Again, there is an extension $M(24)$ generated by a class D_3 of conjugate involutions such that $\mathbb{C}_{M(24)}(x)/\langle x \rangle \simeq M(23)$, and $M(24)'$ is simple of order $2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$.

Bernd Fischer“

5. Das Monster

Die größte der sporadischen Gruppen, von Conway *Monster* getauft, wurde von Fischer im Jahre 1973 entdeckt.

5.1. **Das Monster.** Die erste schriftliche, öffentlich zugängliche Erwähnung des Monsters findet sich wohl in [56, S. 105], dem Vortragsbuch Nr. 26 von Oberwolfach, anlässlich der „Arbeitstagung Professor Baer, 1.1.–5.1. 1974“. Ich zitiere den Eintrag von Bernd Fischer:

„Bemerkungen über einige sporadische Gruppen

Es gibt möglicherweise einfache Gruppen folgender Ordnungen
G_1: $2^{41}\ 3^{13}\ 5^6\ 7^2\ 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ 31\ 47$
G_2: $2^{15}\ 3^{10}\ 5^3\ 7^2\ 13\ 19\ 31$, G_3: $2^{14}\ 3^6\ 5^6\ 7\ 11\ 19$
G_4: $2^{46}\ 3^{20}\ 5^9\ 7^6\ 11^2\ 13^3\ 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$.
Hier ist $G_1 \simeq \mathbb{C}_{G_4}(d)/\langle d \rangle$ für eine Involution d und G_2, G_3 wären in G_1 enthalten. Die Ordnungen von G_2, G_3, G_4 wurden von Conway, Harada und Thompson bestimmt.

B. Fischer“

Die in diesem Zitat G_4 genannte Gruppe ist das Monster. Ausgeschrieben ist die Ordnung des Monsters

$$808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,005\,754\,368\,000\,000\,000$$

oder ungefähr $8 \cdot 10^{53}$.

Die kleinste Realisierung des Monsters als Permutationsgruppe existiert auf

$$97\,239\,461\,142\,009\,186\,000$$

Punkten. Als Matrixgruppe über dem Körper mit 2 Elementen lässt sich das Monster in 196 882 Dimensionen realisieren. Über den rationalen Zahlen existiert eine Matrix-Darstellung des Monsters in 196 883 Dimensionen. Diese wurde von Robert L. Griess, Jr. „von Hand“ konstruiert, und im Jahre 1981 publiziert [19, 20].

Vor dem Monster hatte Fischer bereits das Babymonster entdeckt. Dieses wird heute auch mit F_2 bezeichnet und taucht in obigem Zitat als G_1 auf. In Abschnitt 5.3 werde ich etwas näher auf das Babymonster eingehen.

Im Monster, das heute auch F_1 genannt wird, sind insgesamt 20 der 26 sporadischen Gruppen involviert. Darunter befinden sich auch zwei, die erst durch die Entdeckung des Monsters gefunden wurden, die Thompson-Gruppe Th oder F_3 (in obigem Zitat G_2), und die Harada-Norton-Gruppe HN oder F_5 (in obigem Zitat G_3). Es ist daher angebracht zu sagen, dass Bernd Fischer der Entdecker von insgesamt sieben der 26 sporadischen Gruppen ist.

5.2. **Wann und wie wurde das Monster entdeckt?** Robert L. Griess, Jr. wird in der Literatur neben Fischer als unabhängiger Entdecker des Monsters genannt, etwa in [9], in [15, Abschnitt 2.4.F], oder in [1, S. 68]. Griess selbst datiert die Entdeckung des Monsters in der Einleitung von [20] auf den November 1973. Die zweite schriftliche Erwähnung des Monsters fand ich in Griess' Arbeit [16] über die Schurmultiplikatoren der sporadischen Gruppen. In dieser Arbeit, die im Dezember 1974 erschienen ist, gibt Griess den Wert des Schurmultiplikators von F_2 mit „1 or $\mathbb{Z}_2$" und denjenigen von F_1 mit 1 an (Tabelle auf S. 446). Als Referenz für das Monster F_1 nennt er die folgenden drei Quellen:

15. B. Fischer, Lecture, Bielefeld, November 1973.
18. R. Griess, On the subgroup structure of the group of order $2^{46}\,3^{20}\,5^9\,7^6\,11^2\,13^3\,17.$ $19.23.29.31.41.47.59.71$, in preparation.
37. J. Thompson, unpublished.

Die oben genannte Arbeit mit der Nummer 18, die Griess auch als Quelle für die Schurmultiplikatoren von F_1 und F_2 angibt, ist wohl nicht publiziert worden. Die endgültige Entscheidung über den Schurmultiplikator des Babymonsters erfolgte erst mit dem Existenzbeweis für das Monster.

Griess veröffentlichte im Jahre 1976 eine Note [17], in der er ohne Beweis einige Eigenschaften des damals noch hypothetischen Monsters angibt. Hierin geht er von einer einfachen Gruppe F aus, die zwei nicht-konjugierte Involutionen z und t enthält, deren Zentralisatoren die folgenden beiden (vereinfacht dargestellten) Hypothesen erfüllen.

(HC) $C_F(t)$ ist eine Erweiterung einer extraspeziellen Gruppe der Ordnung 2^{25} mit der Conway-Gruppe Co_1.

(HB) $C_F(z)$ ist eine zweifache Überlagerung des Babymonsters.

In dieser Note erwähnt Griess einen Vortrag von Fischer in Bielefeld (vermutlich der vom November 1973), in dem dieser das Monster als einfache Gruppe postuliert, die ein Element ρ der Ordnung 3 enthält, dessen Zentralisator die folgende Hypothese erfüllt:

(HS) $C(\rho)$ ist eine Erweiterung einer extraspeziellen Gruppe der Ordnung 3^{13} und Exponent 3 mit der zweifachen Überlagerung der Suzuki-Gruppe.

Diese Hypothesen sind natürlich nicht unabhängig voneinander. So sagt Griess in [17, S. 114, Zeile 8] über die zentrale Involution z der zweifachen Überlagerung der Suzuki-Gruppe:

„Thompson then determined that $C(z)$ must have shape as in (B) above, and proceeded to derive other local information as consequences".

Der Ausdruck "shape as in (B) above" meint hier eine Gruppe, die die Hypothese (HC) erfüllt. Weitere Abhängigkeiten zwischen diesen drei Hypothesen diskutieren Gorenstein in [15, Abschnitt 2.4.F] und Aschbacher in [1, S. 68]. Welche davon zuerst in Betracht gezogen wurde, um das Monster vorauszusagen, konnte ich anhand der Literatur nicht feststellen.

Die Aufgabe, einfache Gruppen durch Vorgabe des Zentralisators einer Involution, wie etwa in den Hypothesen (HC) und (HB), zu klassifizieren, und dabei möglicherweise neue einfache Gruppen zu finden, war für die damaligen Gruppentheoretiker sehr naheliegend. Zum einen kann es nach dem schon erwähnten Satz von Brauer und Fowler bis auf Isomorphie nur endlich viele solche einfachen Gruppen geben, so dass deren Klassifikation möglich erscheint. Zum anderen wurde die erste sporadische Gruppe, die nach den Mathieu-Gruppen entdeckt wurde, die Janko-Gruppe J_1, durch genau dieses Prinzip der Charakterisierung mittels des Zentralisators einer Involution gefunden. Auch die anderen drei Janko-Gruppen, sowie die Held- und die Lyons-Gruppe verdanken ihre Entdeckung dieser Methode (siehe [15, Abschnitt 2.4]).

Im Sommer 1973 hatte Fischer das Babymonster entdeckt, während die Entdeckung der Conway-Gruppen und der Suzuki-Gruppe bereits einige Jahre zurücklag. Deshalb halte ich es für plausibel, dass die Vorhersage des Monsters zuerst aufgrund der Hypothese (HB) erfolgt ist.

Am 3. September 2002 hatte ich Gelegenheit, mit Professor Fischer über diese Fragen zu sprechen. In diesem Gespräch bekräftigte Fischer, seinen Überlegungen zuerst die Hypothese (HB) zugrunde gelegt zu haben. Weiter sagte er, dass ihm etwa drei Wochen nach Entdeckung des Babymonsters die wesentlichen Eigenschaften des Monsters bekannt gewesen seien. Dies war also schon einige Zeit vor dem November 1973 der Fall, wenn man, wie etwa Griess in [20, Abschnitt 15], und wie das auch durch das Oberwolfach-Vortragsbuch Nr. 25 [55, S. 58] belegt wird, die „Geburt" des Babymonsters auf den Sommer des Jahres 1973 datiert. Im gleichen Gespräch bestätigte Fischer die bedeutende Rolle, die Thompson und Conway bei der Beschreibung der Eigenschaften des Monsters gespielt haben.

5.3. **Das Babymonster.** Wie sein Name suggeriert, ist das *Babymonster* „ein Kind des Monsters", denn seine Existenz ergibt sich sehr leicht aus derjenigen des Monsters. Das Babymonster wurde allerdings *vor* dem Monster gefunden, und hat umgekehrt, wie oben ausgeführt, Anlass zur Vorhersage des Monsters gegeben.

Das Babymonster ist eine weitere bemerkenswerte Entdeckung von Professor Fischer, die sich unmittelbar an seine Klassifikation der 3-Transpositionsgruppen anschließt. Nachdem diese so erfolgreich abgeschlossen worden war, lag es nahe, $\{3,4\}$-Tranpositionsgruppen zu untersuchen. (Dazu wird die Definition der 3-Transpositionsgruppen dahin gehend erweitert, dass auch Produkte der Ordnung 4 erlaubt sind.) Im Verlauf dieser Untersuchungen wurde Fischer auf eine hypothetische Gruppe geführt, die er in [55, S. 58] im Rahmen der Tagung „Endliche Gruppen und Permutatiosngruppen, 6.8.73–10.8.73" wie folgt beschreibt:

„$\{3,4\}$-Transpositions in Finite Groups

Is there a finite simple group G satisfying
(i) $G = \langle D \rangle$, $D = d^G$, $d^2 = 1 \neq d$,
(ii) $x, y, \in D \Rightarrow o(x, y) \in \{1, 2, 3, 4\}$,

Tabelle 4. Ausschnitt aus der gewöhnlichen Charaktertafel des Monsters

$1a$	$2a$	$2b$	$3a$
1	1	1	1
196883	4371	275	782
21296876	91884	−2324	7889
842609326	1139374	12974	55912
18538750076	8507516	123004	249458
19360062527	9362495	−58305	297482
293553734298	53981850	98970	1055310

(iii) $\mathbb{C}_G(d)/\langle d\rangle$ contains ${}^2E_6(2)$ as a subgroup of index 2,
(iv) $\mathbb{C}_G(d)$ has 5 orbits on D:
$D = d \cup (D \cap \mathbb{C}_G(d)' \setminus \{d\}) \cup (D \cap \mathbb{C}_G(d) \setminus \mathbb{C}_G(d)') \cup A_d \cup V_d$
for $A_d = \{x \mid o(dx) = 3\}$, $V_d = \{v \in D \mid o(vd) = 4\}$
and $|V_d| = 2812^\dagger \cdot |D \cap \mathbb{C}_G(d)' \setminus \{d\}|$?

Such a group would have order $2^{41}\ 3^{13}\ 5^6\ 7^2\ 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$. Some of the centralizers can be determined.

Bernd Fischer“

Jeffrey Leon und Charles Sims bewiesen als Erste die Existenz der in diesem Zitat beschriebenen Gruppe, eben des Babymonsters. Dazu konstruierten sie mit Hilfe von Computern eine Permutationsgruppe auf

$$13\,571\,955\,000$$

Punkten und zeigten, dass diese die geforderten Eigenschaften besitzt (siehe [37]). Diese Leistung ist auch aus heutiger Sicht noch äußerst bemerkenswert. Weitere Anmerkungen zu dieser Konstruktion gibt Sims in [49].

Soweit ich weiß ist die Klassifikation der $\{3, 4\}$-Tranpositionsgruppen bis heute noch nicht abgeschlossen.

5.4. **Monstrous Moonshine.** Die (rationalisierte) Charaktertafel des Monsters wurde in einer gewaltigen einwöchigen Arbeitssitzung im Jahre 1978 von Fischer, Livingstone und Thorne in Birmingham ausgerechnet (siehe [13]). Einige Charakterwerte des Monsters finden sich in Tabelle 4. Die Spaltenüberschriften bezeichnen Elementordnungen, gemäß der Konvention des Atlas [8], wobei Elemente gleicher Ordnung durch Buchstaben unterschieden werden. Die gesamte Charaktertafel ist eine 194×194-Matrix und nimmt acht Seiten des Atlas in Anspruch.

John McKay machte Ende der 70er Jahre die bemerkenswerte Beobachtung $196\,884 = 1 + 196\,883$. Auf der linken Seite dieser Gleichung steht der Fourier-Koeffizient der j-Funktion zu q^1 (vgl. Abschnitt 3.2), auf der rechten Seite die Summe der Grade der kleinsten Darstellungen des Monsters in Charakteristik 0.

†Dies ist ein Schreibfehler. Die richtige Zahl ist 2816.

Thompson trieb diese „Numerologie“ noch etwas weiter (siehe [52]):

$$\begin{aligned} 196\,884 &= 1 + 196\,883, \\ 21\,493\,760 &= 1 + 196\,883 + 21\,296\,876, \\ 864\,299\,970 &= 2 \times 1 + 2 \times 196\,883 + 21\,296\,876 + 842\,609\,326. \end{aligned}$$

In [51] baute er diese Beobachtung zu einer Vermutung aus, die von Conway und Norton in [9] numerisch untermauert, weiter analysiert und ergänzt wurde. Sie ist seither unter dem Namen *Monstrous-Moonshine-Vermutung* bekannt.

Mit Hilfe von Vertex-Operator-Algebren konstruierten Frenkel, Lepowsky, und Meurmann in [14] einen graduierten $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$V = V_{-1} \oplus V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots$$

mit $V_0 = \{0\}$, auf dem das Monster linear graduiert operiert (d.h. auf jedem V_i operiert das Monster linear), so dass gilt:

$$j(q) - 744 = \sum_{n=-1}^{\infty} \dim_{\mathbb{C}}(V_n)\, q^n.$$

Nach einer Reihe von vorbereitenden Arbeiten hat Richard Borcherds, ein Schüler von Conway, in [3] die Moonshine-Vermutungen bewiesen.

Satz (Borcherds): *Zu jedem Element $x \in M$ existiert eine Fuchs'sche Gruppe K_x, so dass die Riemannsche Fläche $\mathbb{H}/K_x$ vom Geschlecht 0 ist, und der zugehörige Funktionenkörper einen Hauptmodul f_x (d.h. der Funktionenkörper ist $\mathbb{C}(f_x)$) mit der Fourierentwicklung*

$$f_x = \sum_{n=-1}^{\infty} \mathrm{Spur}(x, V_n)\, q^n.$$

hat.

Dieser Satz deckt tiefliegende Zusammenhänge zwischen dem Monster und der Theorie von Modulformen auf. Zum Beweis setzt Borcherds Ideen aus der String-Theorie ein. Für dieses Ergebnis (und für weitere bahnbrechende Resultate), hat Borcherds auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1998 in Berlin die Fields-Medaille erhalten.

6. Ausblick

Was bleibt für uns und die nächsten Generationen zu tun?

Wie die Erforschung des Sonnensystems nicht endet mit der Entdeckung, Benennung und Vermessung der Planeten, oder die Chemie nicht mit der Entdeckung und Beschreibung der Elemente (Dank an Klaus Lux für dieses Bild), hört auch die Gruppentheorie nicht mit der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen auf, sondern tritt vielmehr in eine neue Ära ein. Um den Nutzen der Klassifikation zu erhöhen, sind nunmehr die wesentlichen strukturellen Eigenschaften der endlichen einfachen Gruppen zu erforschen.

Hierzu gehören z.B. ihre Untergruppen und ihre Darstellungen als Matrixgruppen. Bei den Untergruppen wird man sich zunächst darauf beschränken, die maximalen zu beschreiben. Bei den Matrixdarstellungen steht zunächst die Konstruktion und Klassifikation der irreduziblen im Vordergrund. Während für die unendlichen Serien der einfachen Gruppen theoretische Methoden verwendet werden, die oft geometrischer Natur sind und generische Resultate liefern, ist man bei den sporadischen Gruppen oft auf Ad-Hoc-Methoden und insbesondere die Benutzung von Computern angewiesen.

Zum Programm, die maximalen Untergruppen der sporadischen Gruppen zu bestimmen, hat Robert Wilson (Birmingham) die weitaus meisten Ideen, Methoden und Ergebnisse beigesteuert. Inzwischen sind die maximalen Untergruppen aller sporadischen Gruppen, mit Ausnahme derjenigen des Monsters, bekannt. Auch beim Monster kennt man die meisten maximalen Untergruppen. Daneben gibt es eine Liste von relativ kleinen Gruppen, die Kandidaten für maximale Untergruppen des Monsters sind. Für einige davon ist bekannt, dass sie Untergruppen sind (z.B. weil sie in bereits bekannten Untergruppen vorkommen), für andere ist nicht einmal bekannt, ob sie überhaupt Untergruppen sind. Erst kürzlich konnten Wilson und seine Schülerin Beth Holmes zeigen, dass $\mathrm{PGL}_2(29)$ und $\mathrm{PSL}_2(59)$ maximale Untergruppen des Monsters sind (siehe [29] für den ersten Fall; der zweite ist noch nicht publiziert). Auf der anderen Seite gelang ihnen der Nachweis, dass es keine maximale Untergruppe des Monsters gibt, deren Sockel isomorph zu $\mathrm{PSL}_2(23)$ ist, obwohl $\mathrm{PSL}_2(23)$ eine Untergruppe des Monsters ist.

Zur Zeit gehen Holmes und Wilson diese Kandidatenliste systematisch durch. Ihre Arbeit wird substanziell von Computern unterstützt. Es ist möglich, explizit mit Elementen des Monsters zu rechnen, z.B. die Ordnung des Produktes von zwei Elementen zu bestimmen. Dazu werden verschiedene Matrixdarstellungen von M über endlichen Körpern (mit 2, 3, oder 7 Elementen) eingesetzt, die von Wilson und Mitautoren konstruiert wurden (siehe [39, 30]).

Es ist überflüssig zu sagen, dass Rechnungen mit Matrizen dieser Größe nicht automatisch ablaufen: der Platzbedarf für eine Monstermatrix über dem Körper mit 2 Elementen beträgt ca. 5 Gigabyte. Erst einmal wurden zwei solche Matrizen wirklich multipliziert. Diese Rechnung erfolgte im Dezember 1998 und dauerte, unter Einbeziehung aller damals am Lehrstuhl D für Mathematik in Aachen zur Verfügung stehenden Rechner (15 PCs unterschiedlicher Stärke) etwa 45 Stunden. Für die oben angesprochenen Aufgaben müssten viele Hundert solcher Matrizen multipliziert werden. Deshalb benötigen diese Rechnungen spezielle, auf das Monster zugeschnittene, Datenstrukturen und Programme.

Auch zum Rechnen mit den anderen sporadischen Gruppen werden Matrixdarstellungen herangezogen, vorzugsweise solche von kleinem Grad. Viele Matrixdarstellungen sind explizit bekannt, und über die Web-Seite von Robert Wilson [57] zu erhalten. Eine Liste der kleinsten Matrixdarstellungen der sporadischen Gruppen ist in Tabelle 5 zusammengestellt.

Ein weiteres Programm, das noch viele Jahrzehnte in Anspruch nehmen wird, ist die Bestimmung der irreduziblen Matrixdarstellungen der sporadischen Gruppen über Körpern positiver Charakteristik. (Die entsprechende Information für Körper der Charakteristik 0 ist seit vielen Jahren vorhanden und in Form von Charaktertafeln im Atlas [8] zugänglich.) Über Körpern endlicher Charakteristik sind vollständige Ergebnisse für die 16 kleinsten der sporadischen Gruppen bekannt, und für die ersten 10 davon publiziert [35]. Unsere Web-Seite [45] stellt den jeweils neuesten Stand der Ermittlungen vor.

Als Beispiel seien die Grade der irreduziblen 2-modularen Darstellungen der Fischer-Gruppe Fi_{22} angegeben, die erst kürzlich von Jürgen Müller, Felix Noeske,

TABELLE 5. Die kleinsten Matrixdarstellungen der sporadischen Gruppen

Grp.	Dim.	Kp.
M_{11}	5	$\mathbb{F}_3$
M_{12}	10	$\mathbb{F}_2$
M_{22}	10	$\mathbb{F}_2$
M_{23}	11	$\mathbb{F}_2$
M_{24}	11	$\mathbb{F}_2$
J_1	7	$\mathbb{F}_{11}$
J_2	6	$\mathbb{F}_4$
J_3	18	$\mathbb{F}_9$
J_4	112	$\mathbb{F}_2$
HS	20	$\mathbb{F}_2$
McL	21	$\mathbb{F}_3$
Suz	64	$\mathbb{F}_3$
Ru	28	$\mathbb{F}_2$

Grp.	Dim.	Kp.
He	50	$\mathbb{F}_7$
Ly	111	$\mathbb{F}_5$
ON	154	$\mathbb{F}_3$
Co_1	24	$\mathbb{F}_2$
Co_2	22	$\mathbb{F}_2$
Co_3	22	$\mathbb{F}_2$
Fi_{22}	77	$\mathbb{F}_3$
Fi_{23}	253	$\mathbb{F}_3$
Fi_{24}	781	$\mathbb{F}_3$
HN	132	$\mathbb{F}_4$
Th	248	$\mathbb{F}_2$
B	4370	$\mathbb{F}_2$
M	196 882	$\mathbb{F}_2$

John Thackray und dem Autor erhalten wurden:

$$\begin{array}{rrrrr} 1, & 78, & 350, & 572, & 1\,352, \\ 7\,942, & 24\,596, & 5\,824, & 5\,824, & 31\,668, \\ 34\,892, & 62\,952, & 62\,952, & 163\,084(?), & 2\,555\,904. \end{array}$$

Der zweit-letzte der aufgeführten Grade ist noch mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Die angegeben Zahl stellt jedenfalls eine untere Schranke für den Grad der betreffenden irreduziblen Darstellung dar.

7. DANK

Viele Personen und Institutionen haben mich bei der Vorbereitung meines Vortrags und bei der Verfassung diese Artikels unterstützt. Ihnen allen gilt mein herzlicher Dank.

Meinolf Geck, Frank Lübeck, Klaus Lux, Jürgen Müller, Joachim Neubüser, Max Neunhöffer, Felix Noeske, Charles Sims und Jonathan Thackray haben bei den Recherchen geholfen, Informationen geliefert, das Manuskript gelesen und zahlreiche Verbesserungen vorgeschlagen. Professor Charles Sims danke ich ganz besonders herzlich für die Zustimmung, seine Email zur Geschichte der Higman-Sims-Gruppe hier zu veröffentlichen. Dem Direktor des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach, Professor Gert-Martin Greuel, danke ich für die Erlaubnis, aus den Vortragsbüchern zu zitieren.

Die Institutionen *Internet*, *MathSciNet*, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* von Neil Sloane, *Eric Weisstein's World of Mathematics* waren von unschätzbarer Hilfe bei der Vorbereitung meines Vortags und dieser Ausarbeitung.

Nach meinem Vortrag in Gießen haben mich zahlreiche Zuhörer auf Ungenauigkeiten mathematischer und historischer Natur aufmerksam gemacht. Ich habe (fast) alle diese Vorschläge in den vorliegenden Text eingebaut. Insbesondere möchte ich in diesem Zusammenhang den Herrn Danzer, Fischer, Hering, Huppert, Laue, Pickert, Stellmacher, Stroth und Timmesfeld danken.

Meinem Kollegen Aloys Krieg danke ich für die Anregung, meinen Vortrag zu einem Beitrag für den DMV-Jahresbericht auszuarbeiten.

Mein ganz besonders herzlicher Dank gebührt Herrn Professor Fischer, der sehr bereitwillig alle meine Fragen zur Entdeckungsgeschichte der Fischer-Gruppen (und einiger anderer sporadischer Gruppen) beantwortet hat, und mir damit auch sehr viel von der Stimmung der damaligen aufregenden Zeit in der Gruppentheorie vermittelt hat.

Literatur

[1] M. Aschbacher, Sporadic groups, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
[2] D. J. Benson, The simple group J_4, PhD-thesis, University of Cambridge, 1981.
[3] R. E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109** (1992), 405–444.
[4] W. Burnside, Theory of groups of finite order, 2nd edition, Cambridge, 1911.
[5] P. J. Cameron, Permutation groups, Cambridge University Press, 1999.
[6] J. H. Conway, A perfect group of order $8,315,553,613,086,720,000$ and the sporadic simple groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **61** (1968), 398–400.
[7] J. H. Conway, A group of order $8,315,553,613,086,720,000$, *Bull. London Math. Soc. 1* (1969), 79–88.
[8] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker und R. A. Wilson, Atlas of finite groups, Clarendon Press, 1985.
[9] J. H. Conway und S. P. Norton, Monstrous moonshine, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 308–339.
[10] J. H. Conway und N.J.A. Sloane, Sphere packings, lattices and groups, Third edition, Springer, 1999.
[11] J. H. Conway und D. B. Wales, Construction of the Rudvalis group of order 145, 926, 144, 000, *J. Algebra* **27** (1973), 538–548.
[12] B. Fischer, Finite groups generated by 3-transpositions. I, *Invent. Math.* **13** (1971), 232–246.
[13] B. Fischer, D. Livingstone und M. P. Thorne, The charaters of the „Monster" simple group, Birmingham, 1978.
[14] I. Frenkel, J. Lepowsky und A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Applied Mathematics, 134, Academic Press, Boston, 1988.
[15] D. Gorenstein, Finite simple groups, an introduction to their classification, Plenum Press, 1982.
[16] R. L. Griess, Jr., Schur multipliers of some sporadic simple groups, *J. Algebra* **32** (1974), 445–466.
[17] R. L. Griess, Jr., The structure of the "Monster" simple group, in: W. R. Scott und F. Gross (Hrsg.), Proceedings of the conference on finite groups, Academic Press, 1976, S. 113–118.
[18] R. L. Griess, Jr., Schur multipliers of the known finite simple groups. II, in: B. Cooperstein und G. Mason (Hrsg.), The Santa Cruz conference on finite groups, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. 37, American Mathematical Society, 1980, S. 279–282.
[19] R. L. Griess, Jr., A construction of F_1 as automorphisms of a 196,883-dimensional algebra, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **78** (1981), 686–691.
[20] R. L. Griess, Jr., The friendly giant, *Invent. Math.* **69** (1982), 1–102.
[21] R. L. Griess, Jr., Twelve sporadic groups, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
[22] M. Hall, Jr. und D. Wales, The simple group of order 604,800, in: Theory of Finite Groups (Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968), Benjamin, New York, 1969, pp. 79–90.
[23] M. Hall, Jr. und D. Wales, The simple group of order 604,800, *J. Algebra* **9** (1968), 417–450.
[24] D. Held, Some simple groups related to M_{24}, in: Theory of Finite Groups (Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968), Benjamin, New York, 1969, pp. 121–124.
[25] D. Held, The simple groups related to M_{24}, *J. Algebra* **13** (1969), 253–296.

[26] G. HIGMAN UND J. MCKAY, On Janko's simple group of order 50, 232, 960 in: Theory of Finite Groups (Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968), Benjamin, New York 1969, pp. 65–77.

[27] G. HIGMAN UND J. MCKAY, On Janko's simple group of order 50,232,960, *Bull. London Math. Soc. 1* (1969), 89–94; correction, ibid. *1* (1969), 219.

[28] D. G. HIGMAN UND C. C. SIMS, A simple group of order 44, 352, 000, *Math. Z.* **105** (1968), 110–113.

[29] P. E. HOLMES UND R. A. WILSON, A new maximal subgroup of the Monster, *J. Algebra* **251** (2002), 435–447.

[30] P. E. HOLMES UND R. A. WILSON, A new computer construction of the Monster using 2-local subgroups, *J. London Math. Soc.* **67** (2003), 349–364.

[31] Z. JANKO, A new finite simple group with abelian 2-Sylow subgroups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **53** (1965), 657–658.

[32] Z. JANKO, A new finite simple group with abelian Sylow 2-subgroups and its characterization, *J. Algebra* **3** (1966), 147–186.

[33] Z. JANKO, Some new simple groups of finite order, I, in: Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967/68), Vol. 1, Academic Press, London, 1969, pp. 25–64.

[34] Z. JANKO, A new finite simple group of order 86775571046077562880 which possesses M_{24} and the full covering group of M_{22} as subgroups, *J. Algebra* **42** (1976), 564–596.

[35] C. JANSEN, K. LUX, R. PARKER UND R. WILSON, An atlas of Brauer characters, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[36] M. KOECHER UND A. KRIEG, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer, 1998.

[37] J. S. LEON UND C. C. SIMS, The existence and uniqueness of a simple group generated by $\{3,4\}$-transpositions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 1039–1040.

[38] J. H. VAN LINT, Introduction to coding theory, Second edition, Springer, 1992.

[39] S. LINTON, R. PARKER, P. WALSH UND R.WILSON, Computer construction of the Monster, *J. Group Theory* **1** (1998), 307–337.

[40] R. LYONS, Evidence for a new finite simple group, *J. Algebra* **20** (1972), 540–569.

[41] R. LYONS, Errata: „Evidence for a new finite simple group“ (J. Algebra 20 (1972), 540–569), *J. Algebra* **34** (1975), 188–189.

[42] É. MATHIEU, Mémoire sur l'étude de plusieurs quantités, sur la maniér de les former et sur les substitutions qui les laissent invariables, *J. Math. Pures Appl.* **6** (1861), 241–323.

[43] É. MATHIEU, Sur la fonction cinq fois transitive de 24 Quantités, *J. Math. Pures Appl.* **18** (1873), 25–46.

[44] J. MCLAUGHLIN, A simple group of order 898, 128, 000, in: Theory of Finite Groups (Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968), Benjamin, New York, 1969, pp. 109–111.

[45] The Modular Atlas Homepage, `http://www.math.rwth-aachen.de/~MOC/`

[46] M. E. O'NAN, Some evidence for the existence of a new simple group, *Proc. London Math. Soc.* **32** (1976), 421–479.

[47] A. RUDVALIS, A rank 3 simple group of order $2^{14}3^35^371329$, I, *J. Algebra* **86** (1984), 181–218.

[48] C. C. SIMS, The existence and uniqueness of Lyons' group, in: Finite groups '72 (Proc. Gainesville Conf., Univ. Florida, Gainesville, Fla., 1972), North-Holland Math. Studies, Vol. 7, North-Holland, Amsterdam, 1973, S. 138–141.

[49] C. C. SIMS, How to construct a baby monster, in: M. J. COLLINS (Hrsg.), Finite simple groups II, Academic Press, 1980, S. 339–345.

[50] C. C. SIMS, History of Higman-Sims Group, Email an Gerhard Hiss, 4. Juni 2002.

[51] J. G. THOMPSON, Finite groups and modular functions, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 347–351.

[52] J. G. THOMPSON, Some numerology between the Fischer-Griess Monster and the elliptic modular function, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 352–353.

[53] T. M. THOMPSON, From error-correcting codes through sphere packings to simple groups, MAA, 1983.

[54] Vortragsbuch Nr. 14, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

[55] Vortragsbuch Nr. 25, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

[56] Vortragsbuch Nr. 26, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

[57] R. A. WILSON, ATLAS of Finite Group Representations, http://www.mat.bham.ac.uk/atlas/

[58] E. Witt, Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **12** (1938), 256–264, in: I. Kersten (Hrsg.), Ernst Witt, Collected Papers, Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1998, S. 279–287.

[59] E. Witt, Über Steinersche Systeme, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **12** (1938), 265–275, in: I. Kersten (Hrsg.), Ernst Witt, Collected Papers, Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1998, S. 288–298.