

# **Imprimitive Spincharaktere von Überlagerungsgruppen der symmetrischen und alternierenden Gruppen**

von  
Daniel Nett

April 2007

An der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Mathematikers  
vorgelegte

**DIPLOMARBEIT**

in Mathematik

Angefertigt am Lehrstuhl D für Mathematik bei  
Universitätsprofessor Dr. Gerhard Hiß



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>1</b>
<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>I Grundlagen der Darstellungstheorie</b>	<b>7</b>
I.1 Moduln, Darstellungen und Charaktere . . . . .	7
I.2 Einige Aussagen aus der Darstellungstheorie . . . . .	11
I.3 Projektive Darstellungen . . . . .	12
I.4 Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe . . . . .	14
I.5 Überlagerungsgruppen von $S_n$ und $A_n$ . . . . .	18
<b>II Charaktertafeln</b>	<b>23</b>
II.1 Ein verschränktes zentrales Produkt von Gruppen . . . . .	23
II.2 Darstellungen der Objekte aus $\mathcal{G}$ . . . . .	26
II.3 Konjugiertenklassen der $\tilde{S}_n$ und $\tilde{A}_n$ . . . . .	31
II.4 Die Spincharaktere . . . . .	33
II.5 Morris' Rekursionsformel und Branching-Rules . . . . .	34
II.6 Einige kombinatorische Begriffe . . . . .	38
<b>III Induzierte Spincharaktere von verschränkten zentralen Produkten</b>	<b>43</b>
III.1 Die Littlewood-Richardson-Regel für Spincharaktere . . . . .	43
III.2 Vielfachheitsfreie projektive äußere Produkte von Spincharakteren . . . . .	47
<b>IV Ergebnisse</b>	<b>71</b>
IV.1 Serie von imprimitiven Spincharakteren der $\tilde{S}_n$ . . . . .	71
IV.2 Mögliche Fälle imprimitiver Spincharaktere aus dem Satz von Bessenrodt . . . . .	72
IV.3 Serie von imprimitiven Spincharakteren der $\tilde{A}_n$ . . . . .	76
IV.4 Mögliche imprimitive Spincharaktere anderer Art . . . . .	76
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>79</b>



# Einleitung

*O Mensch! Gib acht!  
Was spricht die tiefe Mitternacht?  
„Ich schlief, ich schlief –,  
aus tiefem Traum bin ich erwacht: –  
Die Welt ist tief,  
und tiefer als der Tag gedacht.  
Tief ist ihr Weh –,  
Lust – tiefer noch als Herzeleid:  
Weh spricht: Vergeh!  
doch alle Lust will Ewigkeit –,  
– will tiefe, tiefe Ewigkeit!“*

*Friedrich Nietzsche, ‚Das trunkene Lied‘*

Issai Schur lieferte Anfang des 20. Jahrhunderts in seinen Arbeiten [Sch04] und [Sch07] bedeutende Beiträge zur allgemeinen Theorie der projektiven Darstellungen von endlichen Gruppen. In der darauf folgenden umfangreichen Arbeit [Sch11] wandte er sich den symmetrischen und alternierenden Gruppen  $S_n$  und  $A_n$  zu und führte unter anderem Überlagerungsgruppen  $\tilde{S}_n$  und  $\tilde{A}_n$  dieser Gruppen ein. Seine Ergebnisse sind bis heute die Grundpfeiler der projektiven Darstellungstheorie der Gruppen  $S_n$  und  $A_n$ .

Die lineare Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen, hauptsächlich vorangetrieben von Alfred Young, hat sich rasch entwickelt. Sie verbindet die Theorie von Darstellungen mit der von symmetrischen Funktionen und der Kombinatorik von Tableaus. In der Theorie der projektiven Darstellungen der symmetrischen Gruppen brachten erst etwa 50 Jahre nach den Arbeiten von Schur die Arbeiten [Mor62] und [Mor65] von Alun O. Morris einen vergleichbaren Fortschritt. Ähnlich den kombinatorischen Begriffen in der linearen Darstellungstheorie entwickelte sich eine Theorie um verschobene Tableaus und so genannter  $Q$ -Funktionen. In der Arbeit [Ste89] von 1989 behandelt Stembridge den Zusammenhang von verschobenen Tableaus und den projektiven Darstellungen der symmetrischen Gruppen. In diesem Artikel wird unter anderem ein Satz über projektive äußere Produkte von Spincharakteren von Untergruppen der Überlagerungsgruppen bewiesen. Dieser Satz ist ein Analogon zur Littlewood-Richardson-Regel in der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen.

## Der Inhalt

In dieser Arbeit werden imprimitive Spincharaktere der Überlagerungsgruppen  $\tilde{S}_n$  und  $\tilde{A}_n$  der symmetrischen bzw. alternierenden Gruppen bestimmt, dabei sind imprimitive Charaktere einer Gruppe solche irreduziblen Charaktere, welche von Charakteren echter Untergruppen induziert sind. Wir beschränken uns dabei auf solche Charaktere, die von Spincharakteren von Untergruppen der Form  $\tilde{S}_{n-k} \times_z \tilde{S}_k$  bzw.  $\tilde{A}_{n-k} \times_z \tilde{A}_k$  induziert sind. Diese Gruppen sind die Urbilder unter dem kanonischen Epimorphismus  $\tilde{S}_n \rightarrow S_n$  der so genannten Young-Untergruppen  $S_{n-k} \times S_k$  der symmetrischen Gruppen bzw. deren Untergruppen gerader Permutationen. Das direkte Produkt von Untergruppen der Überlagerungsgruppen  $\tilde{S}_n$  liefert nicht die Überlagerungsgruppen der Young-Untergruppen, daher werden wir das verschränkte zentrale Produkt  $\times_z$  von Untergruppen einführen. Es folgt eine detaillierte Zusammenfassung des Inhalts dieser Arbeit.

Im ersten Kapitel werden grundlegende Definitionen und Aussagen über die Darstellungstheorie endlicher Gruppen im Allgemeinen und die projektive Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe im Speziellen zusammengetragen. Dabei werden im vierten Abschnitt auch einige der Hauptergebnisse der linearen Darstellungstheorie der Gruppen  $S_n$  und  $A_n$  wiedergegeben. Diese dienen zur Motivation und ermöglichen ein besseres Verständnis der entsprechenden Aussagen aus der projektiven Theorie. In diesem Zusammenhang wird auch ein Teil der Ergebnisse von Dragomir Ž. Doković und Jerry Malzan für die symmetrischen und alternierenden Gruppen angegeben. In ihren Arbeiten [DM74] und [DM76] haben sie alle imprimitiven Charaktere dieser Gruppen bestimmt. Auf diese Aussagen wird im weiteren Verlauf der Arbeit nicht mehr verwiesen. Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels werden die Überlagerungsgruppen  $\tilde{S}_n$  und  $\tilde{A}_n$  eingeführt. Ein Leser, der mit der linearen und projektiven Darstellungstheorie vertraut ist, könnte geneigt sein, dieses Kapitel beim ersten Lesen zu überspringen. Werden im weiteren Verlauf Ergebnisse aus dem ersten Kapitel benutzt, so sind entsprechende Verweise gegeben und man kann bei Bedarf nachschlagen.

Im zweiten Kapitel definieren wir die verschränkten zentralen Produkte  $U \times_z V$  für Untergruppen  $U$  und  $V$  der Überlagerungsgruppen  $\tilde{S}_n$ , welche ebenfalls Untergruppen von  $\tilde{S}_n$  sind. Anschließend beschreiben wir die Darstellungen dieser Objekte, wofür wir den Zugang aus [HH92] wählen. Des Weiteren enthält das zweite Kapitel die Parametrisierung der Konjugiertenklassen der Gruppen  $\tilde{S}_n$  und  $\tilde{A}_n$ . Diese kann, ähnlich wie bei den symmetrischen und alternierenden Gruppen, über Partitionen natürlicher Zahlen gegeben werden. Anschließend werden die Spincharaktere der Überlagerungsgruppen angegeben. Diese Ergebnisse gehen bereits auf Schur zurück, allerdings geben wir in dieser Arbeit „modernere“ Referenzen für diese Aussagen. Auch die Spincharaktere lassen sich durch gewisse Partitionen parametrisieren. Wir werden daher den Spincharakter von  $\tilde{S}_n$  zu einer Partition  $\lambda$  mit  $\langle \lambda \rangle$  bezeichnen. Durch den Satz II.(2.1) im vierten Abschnitt werden jedoch noch nicht alle Charakterwerte der Spincharaktere von  $\tilde{S}_n$  wiedergegeben. Erst mit Hilfe der Morris'schen Rekursionsformel ist man in der Lage, alle Charakterwerte eines Spincharakters  $\langle \lambda \rangle$  anzugeben. Diese ist eine Entsprechung der Murnaghan-Nakayama-Formel aus der linearen Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen. In diesem Zusammenhang werden einige kombinatorische Begriffe eingeführt, die im Fokus der zweiten Hälfte dieser Arbeit stehen. Des Weiteren werden die Branching-Rules für Spincharaktere angegeben. Diese machen Aussagen über die induzierten bzw. eingeschränk-

ten Spincharaktere von  $\tilde{S}_n$  nach  $\tilde{S}_{n+1}$  bzw.  $\tilde{S}_{n-1}$  und finden ebenfalls eine Entsprechung in der Darstellungstheorie der Gruppen  $S_n$ .

Das dritte Kapitel beinhaltet die Littlewood-Richardson-Regel für Spincharaktere. Diese Regel macht, ähnlich wie im Fall der linearen Darstellungstheorie, eine Aussage über die Konstituenten in einem projektiven äußeren Produkt  $(\langle \mu \rangle \otimes_z \langle \nu \rangle) \uparrow \tilde{S}_n$  von irreduziblen Spincharakteren  $\langle \mu \rangle$  und  $\langle \nu \rangle$  von Untergruppen  $\tilde{S}_{n-k}$  und  $\tilde{S}_k$  der Überlagerungsgruppen  $\tilde{S}_n$ . Diese Charaktere werden wir mit  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  bezeichnen. Die Werte des Skalarprodukts  $(\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \langle \lambda \rangle)$  werden hierbei durch die Anzahl gewisser verschobener Schief-Tableaus der Form  $\lambda/\mu$  mit Inhalt  $\nu$  bestimmt. Daran knüpfen die Sätze im zweiten Abschnitt dieses Kapitels an, in denen die vielfachheitsfreien projektiven äußeren Produkte bestimmt werden. Diese Ergebnisse stammen aus der Arbeit [Bes02] von Christine Bessenrodt und bilden die wichtigste Grundlage für die Untersuchungen im vierten Kapitel. Es wurden die Beweise dieser Aussagen im Vergleich zur Originalarbeit ausgearbeitet und möglichst detailreich in die Arbeit aufgenommen. Des Weiteren wurde hierbei die zentrale Aussage aus [Bes02] um einen Fall erweitert, denn die dort angegebene Charakterisierung vielfachheitsfreier projektiver äußerer Produkte ist unvollständig. Es wird allerdings hier keine Aussage darüber gemacht, ob die Klassifizierung der vielfachheitsfreien projektiven äußeren Produkte damit komplett ist. Für die Bestimmung der imprimitiven Spincharaktere im vierten Kapitel ist dies auch nicht von Nöten. Die Beweise dieser überwiegend kombinatorischen Aussagen sind recht technisch, jedoch wird man bei ihrem Studium mit der „Tableau-Arithmetik“ vertraut. Dies trägt zu einem besseren Verständnis der Beweise im vierten Kapitel bei.

Im vierten und letzten Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit angegeben. Mit Hilfe des Satzes III.(2.4) aus dem dritten Kapitel werden die imprimitiven Spincharaktere von  $\tilde{S}_n$  und  $\tilde{A}_n$  bestimmt, welche von Charakteren der oben erwähnten Untergruppen induziert sind. In den meisten Fällen sind solche induzierten Charaktere reduzibel. In den Beweisen werden dafür die projektiven äußeren Produkte  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  betrachtet, die nur Konstituenten mit Vielfachheit 1 besitzen. Fast immer werden dann zwei nicht zueinander assoziierte Charaktere angegeben, die Konstituenten dieser Produkte sind. Zur Untersuchung im Fall der  $\tilde{A}_n$  werden wir die Clifford-Theorie zusammen mit den für  $\tilde{S}_n$  gewonnenen Ergebnissen benutzen. Mit Hilfe der Branching-Rules für Spincharaktere wird gezeigt, dass es jeweils eine Serie imprimitiver Charaktere von  $\tilde{S}_n$  bzw.  $\tilde{A}_n$  gibt, die von Charakteren der Untergruppen  $\tilde{S}_{n-1}$  bzw.  $\tilde{A}_{n-1}$  induziert sind. Für Untergruppen  $\tilde{S}_{n-k} \times_z \tilde{S}_k$  mit  $n, k \neq 1$  gibt es keine weiteren irreduziblen Spincharaktere  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  von  $\tilde{S}_n$ . Entsprechend gibt es auch keine imprimitiven Spincharaktere der  $\tilde{A}_n$ , die von Charakteren der Untergruppen  $\tilde{A}_{n-k} \times_z \tilde{A}_k$  für  $n, k \neq 1$  induziert sind. Im Fall der  $\tilde{S}_n$  kann allerdings eine Serie von Spincharakteren  $\langle \mu \rangle \otimes_z \langle \nu \rangle$  angegeben werden, deren nach  $\tilde{S}_n$  induzierten Charaktere genau zwei Konstituenten haben:  $\langle \lambda \rangle$  und den dazu assoziierten Spincharakter  $\langle \lambda \rangle^a$  für eine entsprechende Partition  $\lambda$ .

Die Ergebnisse dieser Arbeit entstanden ausschließlich unter Verwendung der Branching-Rules für Spincharaktere (siehe II.(5.3)) und der Littlewood-Richardson-Regel, bzw. deren Anwendung in Form von III.(2.4). Die Ergebnisse über die in dieser Arbeit untersuchte Klasse von imprimitiven Spincharakteren von  $\tilde{S}_n$  sind nach Kenntnisstand des Autors noch nicht veröffentlicht.

## Danksagung

Ich verdanke das Thema dieser Arbeit Herrn Prof. Dr. Hiß. Bei ihm möchte ich mich für die ausgezeichnete Betreuung bedanken. Er bewies sehr viel Geduld und nahm sich immer die Zeit für meine Fragen, obgleich er mir bei der Bearbeitung der Aufgabenstellung alle Freiheiten ließ. Seine Anmerkungen und Kritik trugen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei. Darüber hinaus möchte ich mich bei meinen Freunden und Kommilitonen Johannes Orlob, Sebastian Dany, Sebastian Köhler, Jörg Rosenberg, Christian Weber und Alex Müller bedanken. Sie standen mir mit Ratschlägen und Verbesserungsvorschlägen zur Seite und ließen es nie an aufmunternden und anspornenden Worten fehlen. Ebenso möchte ich Max Neunhöffer danken. Er stand mir nicht nur unzählige Male bei Computerproblemen und  $\text{\LaTeX}$ -Fragen unterstützend zur Seite, sondern half mir mit seinen Anregungen auch beim Erstellen dieses Vorworts.<sup>1</sup>

Zu guter Letzt danke ich herzlich meinen Eltern, die mir meine Ausbildung ermöglichten und mich in jeder Hinsicht unterstützt haben. Ich möchte die Arbeit meinem lieben, zum jetzigen Zeitpunkt 15 Monate alten, Neffen und Patenkind Oliver Nett widmen.

---

<sup>1</sup>Ich möchte ein weiteres wichtiges Hilfsmittel, welches mir beim Erstellen dieser Arbeit eine unverzichtbare Hilfe war, nicht unerwähnt lassen, — den Duden ([Dud06]).



# Kapitel I

## Grundlagen der Darstellungstheorie

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit wichtigsten Grundlagen bereitgestellt. Zunächst führen wir elementare Begriffe der Darstellungstheorie endlicher Gruppen mit einem verträglichen Maß an Allgemeinheit ein. Im zweiten Abschnitt werden einige Aussagen aufgeführt, welche in der Arbeit implizit oder explizit verwendet werden. Die Aussagen — wie fast alle in diesem Kapitel — werden ohne Beweise angegeben und sind gewissenhaft mit Literaturverweisen behaftet, so dass der Leser die Details bei Bedarf nachlesen kann.

Im dritten Paragraphen wird die Begriffsbildung der projektiven Darstellungen geschaffen. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen projektiven Darstellungen und Darstellungsgruppen erklärt. Ein Satz, welcher bereits auf Schur zurück geht, liefert uns dann ein hinreichendes Kriterium dafür, wann solche Darstellungsgruppen für endliche Gruppen existieren.

Der vierte Abschnitt gibt einen Überblick über die nicht-projektive Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen, sofern sie im weiteren Verlauf wichtig ist. Dabei beschreiben wir detailliert die Konjugiertenklassen der symmetrischen und alternierenden Gruppen und geben eine Charakterisierung ihrer irreduziblen Darstellungen — all dies mit Hilfe von Partitionen natürlicher Zahlen.

Schließlich schlägt der letzte Abschnitt dieses Kapitels die Brücke zurück zur projektiven Darstellungstheorie. Hier werden die von Schur eingeführten Überlagerungsgruppen der symmetrischen Gruppen definiert. Diese, so stellt sich heraus, sind in den meisten Fällen Darstellungsgruppen der symmetrischen Gruppen. Entsprechend führen wir dann noch die Überlagerungen der alternierenden Gruppen ein, welche ebenfalls in den meisten Fällen Darstellungsgruppen der alternierenden Gruppen sind.

### I.1 Moduln, Darstellungen und Charaktere

In diesem Abschnitt stellen wir einige grundlegende Begriffe und Aussagen zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen zusammen. Im ganzen Paragraphen sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $K$  ein Körper und  $A$  eine endlich-dimensionale  $K$ -Algebra. Weiterhin bezeichnen  $\text{End}(V)$  den Ring der  $K$ -Endomorphismen von  $V$ ,  $\text{GL}(V)$  die  $K$ -Automorphismen von  $V$ ,  $M_n(K)$  den vollen Matrixring der  $(n \times n)$ -Matrizen über  $K$  und  $\text{GL}_n(K)$  die Menge der Einheiten in  $M_n(K)$ .

**(1.1) Definition (Darstellungen von Algebren, vgl. [Fei82, I.19])**

Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Eine (**lineare**) **Darstellung** von  $A$  auf  $V$  ist ein  $K$ -Algebrenhomomorphismus

$$D : A \longrightarrow \text{End}(V).$$

Man nennt  $n$  den **Grad** der Darstellung  $D$ .

Wählt man zu einer gegebenen Darstellung von  $A$  auf  $V$  eine  $K$ -Basis von  $V$ , so erhält man eine Matrixdarstellung

$$D : A \longrightarrow M_n(K).$$

Man spricht bei einem Gruppenhomomorphismus  $D : G \longrightarrow \text{GL}(V)$  von einer Darstellung der Gruppe  $G$  vom Grad  $n$ . Durch die Wahl einer Basis von  $V$  erhält man einen Gruppenhomomorphismus  $G \longrightarrow \text{GL}_n(K)$ , eine Matrixdarstellung von  $G$ .

**(1.2) Definition (Charakter einer Darstellung, vgl. [Isa94, Definition 2.2])**

Sei  $D : G \longrightarrow \text{GL}_n(K)$  eine Matrixdarstellung von  $G$ . Dann nennt man die Abbildung

$$\chi : G \longrightarrow K, g \mapsto \text{Spur}(D(g))$$

den **Charakter** von  $D$ .

**(1.3) Definition (Äquivalenz von Darstellungen, vgl. [Isa94, Definition 1.18])**

Zwei (Matrix-)Darstellungen  $D_1, D_2$  von  $A$  vom gleichen Grad sind **äquivalent**, wenn eine invertierbare Matrix  $P \in \text{GL}_n(K)$  existiert, so dass

$$D_1(a) = P^{-1}D_2(a)P$$

für alle  $a \in A$  gilt.

**(1.4) Definition (Modul, vgl. [Isa94, Definition 1.3])**

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Existiert eine Abbildung  $A \times V \longrightarrow V$ , so dass für alle  $x, y \in A, v, w \in V$  und  $\alpha \in K$

- (a)  $x(v + w) = xv + xw$ ,
- (b)  $(x + y)v = xv + yv$ ,
- (c)  $x(yv) = (xy)v$ ,
- (d)  $\alpha(xv) = (\alpha x)v = x(\alpha v)$ ,
- (e)  $1v = v$

gilt, so ist  $V$  ein  $A$ -**(Links-)Modul**.

Man kann  $A$ -Moduln als Darstellungen bzw. Darstellungen als  $A$ -Moduln auffassen:

**(1.5) Bemerkung**

Ist  $V$  ein  $A$ -Modul, dann ist die Abbildung  $A \longrightarrow \text{End}(V)$ ,  $a \mapsto \varphi_a$ , definiert durch

$$\varphi_a(v) := av \quad \text{für alle } v \in V,$$

eine Darstellung von  $A$ . Ist umgekehrt  $D$  eine Darstellung von  $A$  auf  $V$ , so kann man  $V$  als  $A$ -Modul mit der Multiplikation

$$av := D(a)(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

auffassen. Es seien  $V_1$  und  $V_2$  zwei  $A$ -Moduln. Eine  $K$ -lineare Abbildung  $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$  ist ein  **$A$ -Modulhomomorphismus**, wenn

$$\varphi(av) = a\varphi(v)$$

für alle  $v \in V_1$  und  $a \in A$  gilt. Man nennt zwei Moduln ( $A$ -)**isomorph**, falls es einen  $A$ -Modulisomorphismus gibt. Es sind zwei Moduln also genau dann isomorph, wenn die zugehörigen Darstellungen äquivalent sind.

**(1.6) Definition (einfacher Modul und irreduzible Darstellung)**

(vgl. [Isa94, Definition 1.4])

Ein  $A$ -Modul  $V$  heißt **einfach**, falls  $V \neq \{0\}$  ist und  $\{0\}$  und  $V$  die einzigen Untermoduln sind. Entsprechend nennt man eine Darstellung  $D : A \longrightarrow \text{End}(V)$  **irreduzibel**, falls  $V \neq \{0\}$  ist und es kein echten Teilraum  $0 \neq U \leq V$  gibt, der für alle  $a \in A$  invariant unter  $D(a)$  ist. Eine analoge Bezeichnung verwenden wir für Darstellungen der Gruppe  $G$ . Ist  $\chi$  der Charakter einer irreduziblen Darstellung von  $G$ , so nennt man  $\chi$  einen **irreduziblen Charakter**.

Eine Matrixdarstellung  $D : A \longrightarrow M_n(K)$  ist also irreduzibel, wenn keine invertierbare Matrix  $P$  existiert, so dass für alle  $a \in A$  gilt:

$$P^{-1}D(a)P = \begin{pmatrix} D_1(a) & * \\ 0 & D_2(a) \end{pmatrix},$$

wobei  $D_i(a) \in M_{n_i}(K)$  mit  $n_i \geq 1$  für  $i = 1, 2$  ist. Ist  $V$  ein  $KG$ -Modul, so bezeichnen wir mit  $\chi_V$  den Charakter der zugehörigen Darstellung von  $KG$ . Es ist  $\chi_V$  also genau dann ein irreduzibler Charakter, wenn  $V$  ein einfacher Modul ist.

Im Weiteren bezeichnet  $\text{End}_A(V)$  die Menge der  $A$ -Endomorphismen von  $V$ , d. h. für  $\varphi \in \text{End}_A(V)$ ,  $a \in A$  und  $v \in V$  gilt  $\varphi(av) = a\varphi(v)$ . Die Menge  $\text{End}_A(V)$  besteht also genau aus den Endomorphismen, welche die Linksmultiplikationen  $a_V : V \longrightarrow V$ ,  $v \mapsto av$ ,  $a \in A$ , zentralisieren. Eine wichtige Aussage über die Struktur von  $\text{End}_A(V)$  macht folgendes Lemma und — als Spezialfall z. B. immer für  $K = \mathbb{C}$  erfüllt — das darauf folgende Korollar.

**(1.7) Lemma (Lemma von Schur, vgl. [Isa94, Lemma 1.5])**

Ist  $V$  ein einfacher  $A$ -Modul, dann ist  $\text{End}_A(V)$  ein Schiefkörper.

**(1.8) Korollar (siehe [Isa94, Corollary 1.6])**

Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen und  $V$  ein einfacher  $A$ -Modul, so ist  $\text{End}_A(V) \cong K$ .

Da die Spur von Matrizen unter Konjugation invariant ist und eine Darstellung ein Homomorphismus, ist ein Charakter einer Darstellung konstant auf den Konjugiertenklassen der Gruppe.

**(1.9) Definition (Klassenfunktion)**

Mit  $\text{cf}_K(G)$  bezeichnen wir die **Menge der  $K$ -Klassenfunktionen**, d. h.

$$\text{cf}_K(G) = \{\varphi : G \longrightarrow K \mid \varphi(xyx^{-1}) = \varphi(y) \text{ für alle } x, y \in G\}.$$

Für den Fall  $K = \mathbb{C}$  definieren wir das Skalarprodukt von Charakteren wie folgt.

**(1.10) Definition (Skalarprodukt von Klassenfunktionen, vgl. [Isa94, Definition 2.16])**

Seien  $\varphi$  und  $\vartheta$  zwei Klassenfunktionen von  $G$ . Dann bezeichne

$$(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\vartheta(g)}$$

das **Skalarprodukt** von  $\varphi$  und  $\vartheta$ . (Mit  $\bar{\cdot}$  bezeichnen wir hierbei die komplexe Konjugation.)

**(1.11) Definition (induzierte Darstellung, vgl. [Hup67, V.(16.1)])**

Sei  $U$  eine Untergruppe von  $G$ ,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $R : U \longrightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung von  $U$  auf  $V$ . Sei weiter  $\{x_1, \dots, x_t\}$  eine Transversale der Linksnebenklassen von  $U$  in  $G$ . Dann ist

$$(R \uparrow G)(g) = \sum_{i=1}^t \dot{R}(x_i^{-1} g x_i), \quad g \in G,$$

die von  $R$  auf  $G$  **induzierte Darstellung**, wobei  $\dot{R}$  definiert ist durch

$$\dot{R}(y) = \begin{cases} R(y), & \text{falls } y \in U, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist  $\varphi$  der Charakter von  $R$ , so bezeichnet  $\varphi \uparrow G$ , bzw. kurz  $\varphi^G$  den Charakter von  $R \uparrow G$ . Wir nennen  $\varphi^G$  den von  $\varphi$  auf  $G$  **induzierten Charakter**.

**(1.12) Definition (eingeschränkte Darstellung, vgl. [Hup67, V.(16.4)])**

Sei  $R$  eine Darstellung von  $G$  mit Charakter  $\chi$  und  $U$  eine Untergruppe von  $G$ . Dann ist  $R \downarrow U$  die **Einschränkung** von  $R$  auf  $U$  und  $\chi \downarrow U$ , bzw.  $\chi_U$ , bezeichnet den zugehörigen Charakter.

Der letzte Begriff in diesem Abschnitt dient zur Beschreibung der Klasse von Charakteren, welche im vierten Kapitel untersucht wird.

**(1.13) Definition (imprimitiver Charakter, vgl. [CR90, §11A])**

Ein irreduzibler Charakter  $\chi$  von  $G$  heißt **imprimitiv**, falls eine echte Untergruppe  $U \leq G$  und ein (notwendig irreduzibler) Charakter  $\varphi$  von  $U$  existiert, so dass  $\chi = \varphi^G$  ist.

## I.2 Einige Aussagen aus der Darstellungstheorie

Im folgenden Abschnitt sei  $H$  eine Untergruppe und  $N$  ein Normalteiler der endlichen Gruppe  $G$ . Des Weiteren sei  $K = \mathbb{C}$ .

**(2.1) Theorem (Frobenius-Reziprozität, siehe [Isa94, Lemma 5.2])**

Seien  $\chi \in \text{cf}_K(G)$  und  $\varphi \in \text{cf}_K(H)$ . Dann gilt

$$(\varphi, \chi_H)_H = (\varphi^G, \chi).$$

Hier bezeichnet  $(\cdot, \cdot)$  das Skalarprodukt aus I.(1.10) für  $G$  und  $(\cdot, \cdot)_H$  das entsprechende Skalarprodukt für Klassenfunktionen auf  $H$ .

Für  $x \in G$  und  $\varphi \in \text{cf}_K(N)$  ist die Abbildung  ${}^x\varphi : N \rightarrow K$ ,  $n \mapsto \varphi(x^{-1}nx)$  ebenfalls eine Klassenfunktion auf  $N$ . Wir nennen  ${}^x\varphi$  einen zu  $\varphi$  konjugierten Charakter. Wir halten dies in folgender Definition fest.

**(2.2) Definition (konjugierte Darstellung)**

Sei  $N$  ein Normalteiler von  $G$ . Zu einem Element  $g \in G$  und einer Darstellung  $R$  von  $N$  sei

$${}^gR(x) = R(g^{-1}xg) \quad \text{für } x \in N,$$

die **konjugierte Darstellung**  ${}^gR$ . Wir nennen eine Darstellung  $R$  eines Normalteilers  $N$  **selbstkonjugiert**, falls  $R$  für alle  $g \in G$  zu  ${}^gR$  äquivalent ist. Ist  $\chi$  der Charakter von  $R$ , so ist  ${}^g\chi$  der Charakter der konjugierten Darstellung und wir nennen ihn den zu  $\chi$  **konjugierten Charakter**.

Für  $x \in G$  ist genau dann  ${}^x\varphi \in \text{Irr}(N)$ , wenn  $\varphi \in \text{Irr}(N)$  ist.

**(2.3) Theorem (Clifford, vgl. [Isa94, Theorem 6.2])**

Seien  $\chi \in \text{Irr}(G)$  und  $\vartheta \in \text{Irr}(N)$  mit  $(\chi_N, \vartheta) = e \neq 0$  und seien  $\vartheta_1 = \vartheta, \vartheta_2, \dots, \vartheta_t$  sämtliche zu  $\vartheta$  in  $G$  konjugierte Charaktere von  $N$ . Dann ist

$$\chi_N = e \sum_{i=1}^t \vartheta_i.$$

Die Anzahl  $t$  der konjugierten Charaktere von  $\vartheta$  teilt den Index  $|G/N|$ .<sup>1</sup> Insbesondere gibt es somit entweder genau einen oder genau zwei Konjugierte von irreduziblen Charakteren des Normalteilers  $N$ , falls dieser Index 2 ist.

**(2.4) Bezeichnung (Der konjugierte Charakter)**

Falls es genau zwei Konjugierte eines Charakters  $\chi$  gibt, so bezeichnen wir den zu  $\chi$  konjugierten (von  $\chi$  verschiedenen) Charakter auch mit  $\chi^c$ .

Schließlich folgt noch eine Definition und ein Lemma, welches rechtfertigt, in Abschnitt II.4 nur noch die treuen Charaktere der  $\tilde{S}_n$  zu betrachten.

<sup>1</sup>Siehe [Isa94, Kapitel 6].

**(2.5) Definition (Kern von Charakteren, vgl. [Isa94, Definition 2.20])**

Sei  $\chi$  ein Charakter von  $G$ . Dann ist

$$\text{Kern}\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$$

der **Kern** von  $\chi$ .

Ist  $D$  eine zu  $\chi$  gehörige Darstellung, dann ist  $\text{Kern}\chi = \text{Kern}D$ . Ist  $\text{Kern}\chi = \{1\}$ , so nennt man  $\chi$  einen **treuen Charakter**, bzw.  $D$  eine **treue Darstellung**. Die folgende Aussage wird nur für Charaktere formuliert, gilt aber entsprechend für die zugehörigen Darstellungen.

**(2.6) Lemma (Charaktere von  $G$  und  $G/N$  im Vergleich, siehe [Isa94, Lemma 2.22])**

Es sei  $N$  ein Normalteiler von  $G$ . Dann gilt:

- (a) Ist  $\chi$  ein Charakter von  $G$  mit  $N \subseteq \text{Kern}\chi$ , dann ist  $\chi$  konstant auf den Nebenklassen von  $N$  in  $G$  und die Funktion  $\hat{\chi}$  auf  $G/N$ , definiert durch  $\hat{\chi}(gN) = \chi(g)$  für  $g \in G$ , ist ein Charakter von  $G/N$ .
- (b) Falls  $\hat{\chi}$  ein Charakter von  $G/N$  ist, so ist die Funktion  $\chi$ , definiert durch  $\chi(g) = \hat{\chi}(gN)$  für  $g \in G$ , ein Charakter von  $G$ .
- (c) In beiden Fällen ist  $\chi \in \text{Irr}(G)$  genau dann, wenn  $\hat{\chi} \in \text{Irr}(G/N)$  ist.

**I.3 Projektive Darstellungen**

Im Folgenden sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Für die in diesem Abschnitt nicht explizit gekennzeichneten Definitionen vgl. [HH92, Kapitel 1].

**(3.1) Definition (Projektive Darstellungen und Faktorensystem)**

Eine **projektive Darstellung** von  $G$  auf  $V$  ist eine Abbildung  $P: G \rightarrow \text{GL}(V)$ , welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i)  $P(1_G) = \text{id}_V$ .
- (ii) Zu  $x, y \in G$  existiert ein Skalar  $\alpha(x, y) \in \mathbb{C}^*$ , mit

$$P(x)P(y) = \alpha(x, y)P(xy).$$

Die so definierte Abbildung  $\alpha: G \times G \rightarrow \mathbb{C}^*$  nennt man **Faktorensystem** zu  $P$ . Die projektive Darstellung  $P$  heißt **irreduzibel**, wenn  $V \neq \{0\}$  ist und kein echter Teilraum  $0 \neq U \leq V$  unter allen  $P(g)$ ,  $g \in G$ , invariant ist.

Die Assoziativität auf  $\text{GL}(V)$  impliziert, dass für das Faktorensystem

$$\alpha(x, y)\alpha(xy, z) = \alpha(x, yz)\alpha(y, z) \tag{I.1}$$

für alle  $x, y, z \in G$  gilt. Des Weiteren kann man eine projektive Darstellung  $P$  auch als Homomorphismus von  $G$  in die  $PGL(V)$  auffassen, also in die Gruppe  $GL(V)/\text{Skalare}$ . Ein Faktorensystem kann man auch unabhängig von einer projektiven Darstellung definieren: Jede Abbildung  $\alpha : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ , welche (I.1) und zusätzlich

$$\alpha(g, 1) = 1 = \alpha(1, g)$$

für alle  $g \in G$  erfüllt, nennt man ein Faktorensystem.<sup>2</sup>

### (3.2) Definition (Äquivalenz projektiver Darstellungen)

- (i) Zwei projektive Darstellungen  $P_1 : G \longrightarrow GL(V_1)$  und  $P_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$  nennt man **(projektiv) äquivalent**, falls ein Vektorraumisomorphismus  $S : V_1 \longrightarrow V_2$  und eine Abbildung  $\delta : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$  existieren, so dass

$$\delta(x)P_1(x) = S^{-1}P_2(x)S$$

für alle  $x \in G$  gilt.

- (ii) Zwei Faktorensysteme  $\alpha$  und  $\beta$  heißen **äquivalent**, falls es eine Abbildung  $\delta : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$  gibt, mit

$$\delta(x)\delta(y)\alpha(x, y) = \delta(xy)\beta(x, y)$$

für alle  $x, y \in G$ .

Offensichtlich impliziert die Äquivalenz von projektiven Darstellungen eine Äquivalenz der zugehörigen Faktorensysteme. Versieht man die Menge der Faktorensysteme mit der punktweisen Multiplikation, so bildet die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. dieser Multiplikation eine abelsche Gruppe.

### (3.3) Definition (Schurscher Multiplikator)

Die abelsche Gruppe der Äquivalenzklassen der Faktorensysteme heißt **Schurscher Multiplikator** und wird mit  $M(G)$  oder auch  $H^2(G, \mathbb{C}^*)$  bezeichnet.

Ist  $G$  eine endliche Gruppe, so ist der Schursche Multiplikator von  $G$  ebenfalls endlich.<sup>3</sup> Nach Schur entsprechen die projektiven Darstellungen von  $G$  den linearen Darstellungen einer geeigneten zentralen Erweiterung  $(\tilde{G}, \theta)$  von  $G$ .<sup>4</sup> Dabei ist eine zentrale Erweiterung von  $G$  eine Gruppe  $\tilde{G}$  mit Homomorphismus  $\theta$ , so dass folgende Sequenz exakt ist:

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\theta} G \longrightarrow 1, \quad (\text{I.2})$$

wobei  $Z$  zentrale Untergruppe von  $\tilde{G}$  ist. Also gilt  $\tilde{G}/Z \cong \theta(\tilde{G}) = G$ .

<sup>2</sup>Siehe z. B. [Wei94, Application 6.5.5]. Dort werden Faktorensysteme in einem allgemeineren Kontext definiert.

<sup>3</sup>Siehe z. B. [Hup67, V.23.2] für dieses nicht-triviale Ergebnis.

<sup>4</sup>Vgl. [Sch04].

**(3.4) Definition (projektive Hebbarkeitseigenschaft, vgl. [CR90, § 11E])**

Eine zentrale Erweiterung  $(\tilde{G}, \theta)$  von  $G$  hat die **projektive Hebbarkeitseigenschaft**, wenn zu jedem Homomorphismus  $P : G \rightarrow \text{PGL}(V)$  mit einem endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  ein Homomorphismus  $\tilde{P} : \tilde{G} \rightarrow \text{GL}(V)$  existiert, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\theta} & G \\ \tilde{P} \downarrow & & P \downarrow \\ \text{GL}(V) & \xrightarrow{\nu} & \text{PGL}(V) \end{array}$$

Hierbei sei  $\nu$  der kanonische Epimorphismus.

**(3.5) Definition (Darstellungsgruppe, vgl. [CR90, Definition 11.41])**

Zentrale Erweiterungen  $\tilde{G}$  mit kleinstmöglicher Ordnung, welche die projektive Hebbarkeitseigenschaft erfüllen, nennt man **Darstellungsgruppen** von  $G$ .

Die Beziehung zwischen dem Schurschen Multiplikator und Darstellungsgruppen von  $G$  liefert das folgende Theorem.

**(3.6) Theorem (Existenz und Charakterisierung von Darstellungsgruppen) (siehe [CR90, Theorem 11.43])**

Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Dann gilt: Die Darstellungsgruppe von  $G$  existiert und lässt sich folgendermaßen charakterisieren: Eine zentrale Erweiterung  $(\tilde{G}, \theta)$  von  $G$  ist genau dann eine Darstellungsgruppe von  $G$ , wenn  $\text{Kern } \theta \leq \tilde{G}'$  und  $|\text{Kern } \theta| = |M(G)|$  ist. In diesem Fall ist  $\text{Kern } \theta \cong M(G)$ .

Man nennt die zentralen Erweiterungen, welche  $\text{Kern } \theta \leq \tilde{G}'$  erfüllen, auch **Schursche (zentrale) Erweiterungen**. In dieser Sprechweise sind die Darstellungsgruppen also gerade die Schurschen Erweiterungen von  $G$ , für die  $\text{Kern } \theta$  die gleiche Ordnung wie der Schursche Multiplikator hat.

## I.4 Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe

Bevor wir uns mit den Überlagerungsgruppen der symmetrischen Gruppen und deren Darstellungen befassen, stellen wir einige zentrale Aussagen über symmetrische Gruppen zusammen. Die in diesem Abschnitt betrachteten Darstellungen sind alle Darstellungen über  $K = \mathbb{C}$ .

Für  $n \in \mathbb{N}$  bezeichne in dieser Arbeit  $S_n$  die symmetrische Gruppe auf  $n$  Ziffern und  $A_n$  die alternierende Gruppe, d. h. die Untergruppe der geraden Permutationen von  $S_n$ . Wenn  $n = 0$  oder  $1$  ist, ist  $S_n = A_n = \{\text{id}\}$  die triviale Gruppe. Für  $n \geq 2$  ist die symmetrische Gruppe endlich präsentierbar durch

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1, & \text{für } 1 \leq i \leq n-1, \\ (s_i s_{i+1})^3 &= 1, & \text{für } 1 \leq i \leq n-2, \\ (s_i s_j)^2 &= 1, & \text{für } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ und } |i-j| > 1, \end{aligned} \tag{I.3}$$



wobei  $s_i$  auf die Transposition  $(i, i+1)$  in  $S_n$  abgebildet wird ([Hup67, Beispiel 19.7]). Die Konjugiertenklassen wie auch die irreduziblen Charaktere der  $S_n$  lassen sich über die Partitionen der Zahl  $n$  parametrisieren. Daher führen wir zunächst die in dieser Arbeit gebrauchten Begriffe im Zusammenhang mit Partitionen ein.

**(4.1) Definition (Partitionen, vgl. [HH92, S. 69f])**

Zu  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  mit  $\lambda_i \in \mathbb{N}$  für alle  $1 \leq i \leq l$  eine **Partition von  $n$** , d. h.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^l \lambda_i = n.$$

Wir schreiben dafür auch  $\lambda \vdash n$  und nennen  $|\lambda| = n$  das **Gewicht** der Partition  $\lambda$ . Ist  $n = 0$ , so ist die **leere Partition**  $()$  die (einzige) Partition von  $n$ . Weiter bezeichnet  $\ell(\lambda) := l$  die **Länge der Partition**. Wir setzen  $\lambda_0 = 0$  und definieren  $\mathbf{n}^{\lambda_i} := \{\lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + 1, \dots, \lambda_1 + \dots + \lambda_i\}$  für  $1 \leq i \leq l$ . Dann bezeichnet  $\mathbf{n}^\lambda := (\mathbf{n}^{\lambda_1}, \dots, \mathbf{n}^{\lambda_l})$  die zugehörige (mengentheoretische) Partition von  $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$ .

Die Menge aller Partitionen von  $n$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{P}_n$ . Für  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  mit  $\ell(\lambda) = l$  heißt  $\sigma(\lambda) := n - l$  das **verallgemeinerte Signum** und  $\varepsilon(\lambda) := (-1)^{\sigma(\lambda)}$  das **Signum von  $\lambda$** . Es seien weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n^+ &:= \{\lambda \vdash n \mid \varepsilon(\lambda) = 1\}, \\ \mathcal{P}_n^- &:= \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_n^+, \\ \mathcal{O}_n &:= \{\lambda \vdash n \mid \text{alle } \lambda_i \text{ sind ungerade}\}, \\ \mathcal{D}_n &:= \{\lambda \vdash n \mid \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l\}, \\ \mathcal{D}_n^+ &:= \mathcal{D}_n \cap \mathcal{P}_n^+, \\ \mathcal{D}_n^- &:= \mathcal{D}_n \cap \mathcal{P}_n^-. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen Elemente aus  $\mathcal{D}_n$  auch als **strikte**, die aus  $\mathcal{P}_n^+$  als **gerade** und die aus  $\mathcal{P}_n^-$  als **ungerade** Partitionen.

Einer Permutation  $\pi$  in  $S_n$  kann man eindeutig einen **Zykeltyp**

$$(1^{a_1} 2^{a_2} \dots k^{a_k})$$

zuordnen, so dass die Zerlegung von  $\pi$  in disjunkte Zykeln aus jeweils  $a_i$  Zykeln der Länge  $i$  besteht. Damit bildet

$$\lambda := \underbrace{(k, \dots, k)}_{a_k\text{-mal}} \underbrace{(k-1), \dots, (k-1)}_{a_{k-1}\text{-mal}} \dots \underbrace{1, \dots, 1}_{a_1\text{-mal}}$$

eine Partition von  $n$ . Wir sagen daher im Folgenden dann nur noch, dass die Permutation  $\pi$  vom Zykeltyp  $\lambda$  ist. Folgendes rechtfertigt noch die Definition von  $\varepsilon$  in I.(4.1): Falls  $\pi \in S_n$  vom Zykeltyp  $\lambda$  ist, dann ist  $\text{sgn}(\pi) = \varepsilon(\lambda)$ . Mit Hilfe dieser Notation beschreibt der folgende Satz die Konjugiertenklassen von  $S_n$  und  $A_n$ .

**(4.2) Theorem (Konjugiertenklassen der  $S_n$  und  $A_n$ , vgl. [JK81, 1.2])**

Zwei Permutationen  $\pi$  und  $\sigma$  sind genau dann in  $S_n$  konjugiert, wenn sie vom gleichen Zykeltyp sind. Eine Konjugiertenklasse gerader Permutationen bildet entweder eine  $A_n$ -Konjugiertenklasse oder teilt sich in genau zwei  $A_n$ -Konjugiertenklassen. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn der zugehörige Zykeltyp aus  $\mathcal{D}_n^+ \cap \mathcal{O}_n$  ist.

Die Partitionen von  $n$  parametrisieren zugleich auch die Menge der irreduziblen Charaktere von  $S_n$ . So stehen die Partitionen  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  in Bijektion mit den Charakteren  $\varphi \in \text{Irr}(S_n)$ . Um diese Bijektion genauer zu beschreiben, führt man Young-Diagramme ein.

**(4.3) Definition (Young-Diagramm und konjugierte Partition)**

(vgl. [JK81, Abschnitt 1.4])

Zu einer Partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$  ist das **Young-Diagramm** definiert durch

$$Y(\lambda) := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq \lambda_i\},$$

wofür wir auch kurz  $[\lambda]$  schreiben. Die zu  $\lambda$  **konjugierte Partition** bezeichnen wir mit  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$ , wobei

$$\lambda'_j = |\{i \mid \lambda_i \geq j\}|.$$

Entsprechend bezeichnet dann  $[\lambda']$  das zu  $[\lambda]$  **konjugierte Young-Diagramm**.

Man kann ein Young-Diagramm zur gegebenen Partition  $\lambda$  auch als eine matrixförmige Anordnung von „Knoten“ visualisieren. Betrachten wir dazu ein Beispiel. Sei  $\lambda = (3, 2, 1^2)$  eine Partition von 7. Dann sind die zu  $\lambda$  und  $\lambda'$  gehörigen Young-Diagramme

$$[\lambda] = \begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ \times & \times & \\ \times & & \\ \times & & \end{array} \qquad [\lambda'] = \begin{array}{cccc} & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & & & \\ & \times & & & \\ & & \times & & \end{array}$$

Es geht  $[\lambda']$  also aus  $[\lambda]$  durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen hervor. Für die Beschreibung der irreduziblen Charaktere der alternierenden Gruppen brauchen wir noch einen weiteren Begriff.

**(4.4) Definition (selbst-assoziert, vgl. [JK81, Abschnitt 1.4])**

Sei  $\lambda$  Partition von  $n$ . Ist  $\lambda = \lambda'$ , so nennt man  $\lambda$  und das zugehörige Young-Diagramm **selbst-assoziert**.

Als nächstes führen wir eine Klasse von Untergruppen der symmetrischen Gruppe ein, die so genannten Young-Untergruppen.

**(4.5) Definition (Young-Untergruppen, siehe [JK81, 1.3.2])**

Es sei

$$S_\lambda := \{\pi \in S_n \mid \pi(n^{\lambda_i}) = n^{\lambda_i} \text{ für alle } 1 \leq i \leq l\}$$

die zu  $\lambda$  gehörige **Young-Untergruppe von  $S_n$** , also

$$S_\lambda \cong \times_{i=1}^l S_{\lambda_i}.$$

Zu  $\lambda \vdash n$  seien  $IS_\lambda$  die triviale Darstellung auf  $S_\lambda$ , d. h.

$$IS_\lambda : S_\lambda \longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}), \pi \mapsto \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \quad \text{für alle } \pi \in S_\lambda,$$

und  $AS_\lambda$  die Signumsdarstellung, eingeschränkt auf  $S_\lambda$ , d. h.

$$AS_\lambda : S_\lambda \longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}), \pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \quad \text{für alle } \pi \in S_\lambda.$$

**(4.6) Theorem (Charakterisierung der irreduziblen Darstellungen von  $S_n$ )**

(siehe [JK81, Theorem 2.1.3])

Sei  $\lambda$  eine Partition von  $n$  und  $S_\lambda$  und  $S_{\lambda'}$  die zu  $\lambda$  bzw.  $\lambda'$  korrespondierenden Young-Untergruppen. Dann haben die Darstellungen  $IS_\lambda \upharpoonright S_n$  und  $AS_{\lambda'} \upharpoonright S_n$  genau einen gemeinsamen irreduziblen Konstituenten.

Man findet in der Literatur für diese mittels der Partitionen indizierten Darstellungen bzw. Charaktere keine einheitliche Notation. Daher sei hier auf die in dieser Arbeit gemachten Konventionen hingewiesen. Es sind Darstellungen stets mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet; entsprechend seien die im Satz gemeinten Konstituenten mit  $R_\lambda$  gekennzeichnet. Für die zugehörigen Charaktere werden dann die Symbole  $\langle \lambda \rangle$  oder auch  $\zeta^\lambda$  verwendet. Wir können nun die Menge der irreduziblen Darstellungen der  $S_n$  vollständig beschreiben.

**(4.7) Theorem (Die irreduziblen Darstellungen der  $S_n$ )**

(siehe [JK81, Theorem 2.1.11])

Die Menge  $\{R_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$  bildet ein vollständiges Vertretersystem der Äquivalenzklassen der irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe auf  $n$  Ziffern.

Schließlich charakterisieren wir noch die Menge der irreduziblen Darstellungen von  $A_n$ .

**(4.8) Theorem (Charakterisierung der irreduziblen Darstellungen von  $A_n$ )**

(siehe [JK81, Theorem 2.5.7])

Sei  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  und  $n \geq 2$ . Dann gilt:

- (a) Es ist  $R_\lambda \downarrow A_n = R_{\lambda'} \downarrow A_n$  irreduzibel, falls  $\lambda \neq \lambda'$ .
- (b) Wenn  $\lambda = \lambda'$  ist, dann ist  $R_\lambda \downarrow A_n$  die Summe von zwei zueinander konjugierten irreduziblen Konstituenten.

**(4.9) Bemerkung**

Die Frage nach den imprimitiven Charakteren der symmetrischen und alternierenden Gruppen haben D. Djoković und J. Malzan bereits in ihren Artikeln [DM74] und [DM76] vollständig beantwortet. So gibt es für  $n \geq 2$  keinen imprimitiven Charakter der  $S_n$ , welcher von einem irreduziblen Charakter einer echten Untergruppe der Form  $S_a \times S_b$  induziert ist. Genauer gibt es in  $\mathrm{Irr}(S_n)$  keine imprimitiven Charaktere, welche von Charakteren intransitiver Untergruppen induziert sind.

Bei den alternierenden Gruppe gibt es imprimitive Charaktere, welche induzierte Charaktere von Charakteren einer echten Untergruppe der Form  $A_a \times A_b$  sind. Dies sind die Charaktere  $\zeta = \sigma \upharpoonright A_n$  mit einem irreduziblen Charakter  $\sigma$  von  $A_{n-1}$ , wobei  $\zeta = \langle \alpha \rangle \downarrow A_n$  mit  $\alpha = (m+1, m^{m-1}) \in \mathcal{P}_n$  ist. Es ist  $\sigma \upharpoonright A_n = (\sigma^c) \upharpoonright A_n = \zeta$ , wobei  $\sigma + \sigma^c = \langle \lambda \rangle \downarrow A_{n-1}$  für  $\lambda = (m^m) \in \mathcal{P}_{n-1}$  ist.

## I.5 Überlagerungsgruppen von $S_n$ und $A_n$

Im folgenden Abschnitt werden Überlagerungsgruppen der symmetrischen bzw. alternierenden Gruppen eingeführt, welche in den meisten Fällen Darstellungsgruppen für diese sind. Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

### (5.1) Definition (Schursche Überlagerung, siehe [Sch11, Seite 164f])

Es seien  $\tilde{S}_n$  die Gruppe mit Erzeugern  $z, t_1, \dots, t_{n-1}$  und Relationen

$$\begin{aligned} z^2 &= 1, \\ zt_j &= t_jz, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ t_j^2 &= z, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ (t_j t_{j+1})^3 &= z, \quad 1 \leq j \leq n-2, \\ t_j t_k &= z t_k t_j, \quad \text{für } |j-k| > 1 \text{ und } 1 \leq j, k \leq n-1, \end{aligned}$$

und  $\hat{S}_n$  die Gruppe mit Erzeugern  $z', t'_1, \dots, t'_{n-1}$  und Relationen

$$\begin{aligned} z'^2 &= t_j'^2 = (z' t'_j)^2 = 1, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ (t'_j t'_{j+1})^3 &= 1, \quad 1 \leq j \leq n-2, \\ t'_j t'_k &= z' t'_k t'_j, \quad \text{für } |j-k| > 1 \text{ und } 1 \leq j, k \leq n-1. \end{aligned}$$

Für  $n = 0$  und  $n = 1$  ist  $\tilde{S}_n = \langle z \rangle = \hat{S}_n$ . Diese Gruppen nennt man **Schursche Überlagerungsgruppen** von  $S_n$ .

Es geht bereits auf Schur zurück, dass diese beiden Gruppen für  $n \geq 4$  Darstellungsgruppen der symmetrischen Gruppe sind.<sup>5</sup> Wir werden uns in dieser Arbeit allerdings auf die Betrachtung von  $\tilde{S}_n$  beschränken, da sich die Darstellungstheorie dieser beiden Gruppen nur wenig unterscheidet.

### (5.2) Theorem (siehe [HH92, Theorem 2.8])

Für  $n \geq 4$  gilt: Die Gruppe  $\tilde{S}_n$  hat Ordnung  $2 \cdot n!$  und  $\{1, z\}$  ist zentrale Untergruppe, welche im Kommutator von  $\tilde{S}_n$  liegt. Der Quotient  $\tilde{S}_n / \{1, z\}$  ist isomorph zu  $S_n$ .

Wir legen dazu eine Bezeichnung fest, die wir für den Rest der Arbeit benutzen werden.

### (5.3) Bezeichnung (Projektion $\theta$ )

Bezeichnet  $\theta$  die kanonische Abbildung  $\tilde{S}_n \longrightarrow S_n$ , dann erhalten wir eine kurze exakte Sequenz wie in (I.2):

$$1 \longrightarrow \langle z \rangle \longrightarrow \tilde{S}_n \xrightarrow{\theta} S_n \longrightarrow 1.$$

Es sei im Folgenden mit  $\theta$  immer diese Projektion (bzw. deren Einschränkung auf eine entsprechende Untergruppe von  $\tilde{S}_n$ ) gemeint.

<sup>5</sup>Siehe [Sch11].

Unter der Projektion  $\theta$  gehen die Erzeuger  $t_i$  auf die Transpositionen  $s_i$  der  $S_n$ , welche die Ziffern  $i$  und  $i+1$  vertauschen.

Nach I.(3.6) brauchen wir nun nur noch zu wissen, welche Ordnung der Schursche Multiplikator von  $S_n$  hat, um festzustellen, wann  $\tilde{S}_n$  eine Darstellungsgruppe von  $S_n$  ist.

**(5.4) Theorem (Ordnung des Schurschen Multiplikator, siehe [HH92, Theorem 2.9])**

Der Schursche Multiplikator von  $S_n$  hat Ordnung 2 für  $n \geq 4$  und ist trivial sonst. Für  $n \geq 4$  ist somit  $\tilde{S}_n$  eine Darstellungsgruppe von  $S_n$ .

**(5.5) Korollar (vgl. [HH92, Corollary 2.10])**

Sei  $n \geq 4$  und  $\alpha$  ein Faktorensystem, welches nicht äquivalent zum trivialen Faktorensystem ( $S_n \times S_n \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto 1$  für alle  $x, y$ ) ist. Dann kann jede irreduzible projektive Darstellung mit Faktorensystem  $\alpha$  zu einer linearen Darstellung von  $\tilde{S}_n$  gehoben werden, in welcher  $z$  als  $-E$  dargestellt wird. (Dabei bezeichne hier  $E$  die Einheitsmatrix von dem entsprechenden Format.)

**Beweis.** Sei  $n \geq 4$ . Nach obigem Satz ist  $\tilde{S}_n$  eine Darstellungsgruppe von  $S_n$  und besitzt damit die projektive Hebbbarkeitseigenschaft. Sei  $\alpha$  ein Faktorensystem, welches nicht äquivalent zum trivialen Faktorensystem ist, und  $P : S_n \rightarrow \text{GL}_d(\mathbb{C})$  eine projektive Darstellung zum Faktorensystem  $\alpha$ . Sei weiter  $R = \nu \circ P : S_n \rightarrow \text{PGL}_d(\mathbb{C})$  die Komposition mit dem natürlichen Epimorphismus, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & & S_n \\ & \swarrow P & \downarrow R \\ \text{GL}_d(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\nu} & \text{PGL}_d(\mathbb{C}) \end{array}$$

Nach Satz I.(3.4) lässt sich  $R$  zu einer linearen Darstellung  $\tilde{R} : \tilde{S}_n \rightarrow \text{GL}_d(\mathbb{C})$  heben, so dass

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S}_n & \xrightarrow{\theta} & S_n \\ \tilde{R} \downarrow & & \downarrow R \\ \text{GL}_d(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\nu} & \text{PGL}_d(\mathbb{C}) \end{array}$$

kommutiert. Es sei  $\{\tilde{g} \mid g \in S_n\}$  ein Repräsentantensystem für  $\tilde{S}_n / \langle z \rangle$  und  $\beta : S_n \times S_n \rightarrow \langle z \rangle$  definiert durch  $\tilde{g}h = \beta(g, h)\tilde{g}h$  für alle  $g, h \in S_n$ . Angenommen, es ist  $z$  im Kern der Darstellung  $\tilde{R}$  von  $\tilde{S}_n$ . Wir definieren eine Abbildung  $\bar{R}$  auf  $S_n$  durch

$$\begin{aligned} \bar{R} : S_n &\longrightarrow \text{GL}_d(\mathbb{C}), \\ g &\longmapsto \tilde{R}(\tilde{g}), \end{aligned}$$

für alle  $g \in S_n$ . Dann ist  $\bar{R}$  eine (lineare) Darstellung von  $S_n$ , denn es gilt

$$\bar{R}(gh) = \tilde{R}(\tilde{g}h) = \tilde{R}(\tilde{g}h\beta(g, h)) = \tilde{R}(\tilde{g})\tilde{R}(\tilde{h})\tilde{R}(\beta(g, h)) = \tilde{R}(\tilde{g})\tilde{R}(\tilde{h}) = \bar{R}(g)\bar{R}(h)$$

für alle  $g, h \in S_n$ . Aufgrund der Kommutativität obiger Diagramme folgt

$$v(\bar{R}(g)) = v(\tilde{R}(\tilde{g})) = R(\theta(\tilde{g})) = R(g) = v(P(g))$$

für alle  $g \in S_n$ . Das heißt, dass sich  $\bar{R}(g)$  und  $P(g)$  für alle  $g \in S_n$  nur um einen skalaren Faktor unterscheiden, also existiert eine Abbildung  $\mu : S_n \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit

$$\bar{R}(g) = \mu(g)P(g)$$

für alle  $g \in S_n$ . Schließlich folgt

$$\mu(gh)P(gh) = \bar{R}(gh) = \bar{R}(g)\bar{R}(h) = \mu(g)P(g)\mu(h)P(h)$$

für alle  $g, h \in S_n$ . Da  $P$  projektive Darstellung mit Faktorensystem  $\alpha$  ist, gilt für die linke Seite dieser Gleichung auch  $\mu(gh)\alpha(gh)^{-1}P(g)P(h)$ , d.h. es ist

$$\alpha(g, h)\mu(g)\mu(h)\mu(gh)^{-1} = 1$$

für alle  $g, h \in S_n$ . Folglich ist  $\alpha$  äquivalent zum trivialen Faktorensystem. Das ist ein Widerspruch, also ist  $\tilde{R}(z) \neq 1$ . Da  $z$  die Ordnung 2 hat, ist  $\tilde{R}(z)^2 = E_d$ . Da  $z$  zentrales Element in  $\tilde{S}_n$  ist, folgt mit dem Lemma von Schur I.(1.8), dass  $\tilde{R}(z)$  eine skalare Matrix ist, und somit  $\tilde{R}(z) = -E_d$ .  $\square$

Um die Beziehung zwischen  $\tilde{S}_n$  und  $\hat{S}_n$  zu beschreiben, führen wir noch einen neuen Begriff ein.

**(5.6) Definition (isoklin, vgl. [BT82, Definition III.1.1])**

Zwei zentrale Erweiterungen  $(\tilde{G}_1, \theta_1)$  und  $(\tilde{G}_2, \theta_2)$  von  $G_1$  bzw.  $G_2$  heißen **isoklin**, falls Isomorphismen  $\zeta : G_1 \rightarrow G_2$  und  $\xi : \tilde{G}'_1 \rightarrow \tilde{G}'_2$  existieren, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \xrightarrow{c_1} & \tilde{G}'_1 \\ \zeta \times \zeta \downarrow & & \xi \downarrow \\ G_2 \times G_2 & \xrightarrow{c_2} & \tilde{G}'_2 \end{array}$$

Hierbei sind die Abbildungen  $c_i : G_i \times G_i \rightarrow G'_i$  definiert durch  $(\theta_i(g), \theta_i(h)) \mapsto [g, h]$  für  $g, h \in \tilde{G}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Das Paar  $(\zeta, \xi)$  heißt **Isoklinismus** von  $(\tilde{G}_1, \theta_1)$  nach  $(\tilde{G}_2, \theta_2)$ .

Der nächste Satz beschreibt den genauen Zusammenhang von  $\tilde{S}_n$  und  $\hat{S}_n$ .

**(5.7) Theorem (vgl. [Sch11, Seite 166] und [BT82, Cor. III.2.4])**

Die Gruppen  $\tilde{S}_n$  und  $\hat{S}_n$  sind isoklin für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; sie sind nicht isomorph außer für  $n = 0, 1, 6$ .

Wie bereits erwähnt, sind sich die Darstellungen dieser Gruppen sehr ähnlich:<sup>6</sup> Definiert  $t_j \mapsto A_j \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  eine treue Darstellung der  $\tilde{S}_n$ , so definiert  $t'_j \mapsto iA_j$ , eine treue Darstellung der  $\hat{S}_n$ , und umgekehrt (hierbei bezeichnet  $i$  eine primitive vierte Einheitswurzel).

Schließlich geben wir noch die entsprechende Aussage für die alternierende Gruppe an.

<sup>6</sup>Siehe dazu z. B. [Ste89, Abschnitt. 1].

**(5.8) Theorem (Schurscher Multiplikator der  $A_n$ , siehe [HH92, Theorem 2.11])**

Für den Schurschen Multiplikator der alternierenden Gruppe gilt

$$M(A_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq 3, \\ C_6, & \text{falls } n = 6 \text{ oder } 7, \\ C_2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiert man  $\tilde{A}_n$  bzw.  $\hat{A}_n$  als Urbilder von  $A_n$  unter den entsprechenden Projektionen  $\theta: \tilde{S}_n \rightarrow S_n$  bzw.  $\hat{S}_n \rightarrow S_n$ , so sind dies Darstellungsgruppen der  $A_n$  außer für  $n = 0, 1, 2, 3, 6$  oder  $7$ . Für  $n = 0, 1$  oder  $2$  erhält man, dass  $\tilde{A}_n$  bzw.  $\hat{A}_n$  von  $z$  bzw.  $z'$  erzeugt wird, also zyklisch der Ordnung  $2$  ist. Für  $n = 3$  ist  $\tilde{A}_n = \theta^{-1}(\langle s_1 s_2 \rangle) = \langle t_1 t_2, z t_1 t_2 \rangle$ . Wegen der dritten Relation in I.(5.1) ist  $z = (t_1 t_2)^3 \in \langle t_1 t_2 \rangle$ , also ist  $\tilde{A}_n$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $6$ . Ebenso ist in  $\hat{A}_n = \langle t'_1 t'_2, t'_1 t'_2 z' \rangle$  wegen den entsprechenden Relationen  $t'_1 t'_2 = (t'_1 t'_2 z')^3$ . Folglich ist  $\hat{A}_n$  ebenfalls eine zyklische Gruppe der Ordnung  $6$ .

Für  $n \geq 4$  zeigen wir, dass  $\tilde{A}_n = \tilde{S}'_n$  bzw.  $\hat{A}_n = \hat{S}'_n$  ist. Dann existiert ein Isomorphismus  $\tilde{A}_n \rightarrow \hat{A}_n$  gemäß I.(5.6), da die Überlagerungen  $\tilde{S}_n$  und  $\hat{S}_n$  nach I.(5.7) isoklin sind. Wir zeigen dies nur für  $\tilde{A}_n$ , da das Argument für  $\hat{A}_n$  genau das Gleiche ist. Sei also  $g \in \theta^{-1}(A_n)$ . Angenommen, es ist  $g \notin \tilde{S}'_n$ , dann ist auch  $zg \notin \tilde{S}'_n$ , da für  $n \geq 4$  der Erzeuger  $z$  im Kommutator von  $\tilde{S}_n$  liegt. Es ergibt sich also der Widerspruch  $\theta(g) \notin \theta(\tilde{S}'_n) = (\theta(\tilde{S}_n))' = A_n$  und es folgt, dass  $\tilde{A}_n \subseteq \tilde{S}'_n$  ist. Weiter folgt die Gleichheit, da  $A_n$  Bild von  $\tilde{S}'_n$  unter  $\theta$  ist.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $\tilde{A}_n \cong \hat{A}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist, wir werden also auch hier im weiteren Verlauf nur noch  $\tilde{A}_n$  betrachten.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Siehe zur Beweisführung auch [Noe02, Seite 6].





## Kapitel II

# Charaktertafeln

Im Fokus dieser Arbeit steht die Frage, ob es imprimitive Charaktere der  $\tilde{S}_n$  bzw.  $\tilde{A}_n$  gibt, die von Untergruppen der Form  $\tilde{S}_k \times_z \tilde{S}_{n-k}$  bzw.  $\tilde{A}_k \times_z \tilde{A}_{n-k}$  induziert sind. Diese Gruppen bezeichnen die Urbilder unter  $\theta$  der entsprechenden Young-Untergruppen in  $S_n$ , bzw. deren entsprechende Untergruppen der geraden Permutationen. Wir erklären in diesem Kapitel zunächst einmal, wie man diese Überlagerungsgruppen erhält. Im zweiten Abschnitt lenken wir unseren Blick auf die Darstellungen solcher Objekte. Dabei konzentrieren wir uns ausschließlich auf die treuen Darstellungen der entsprechenden Überlagerungsgruppen, da die anderen durch die linearen Darstellungen der symmetrischen Gruppen gegeben sind.

Im dritten und vierten Paragraphen wenden wir uns dann den Überlagerungen  $\tilde{S}_n$  und  $\tilde{A}_n$  zu. Zunächst beschreiben wir die Konjugiertenklassen dieser Gruppen, welche sich in ähnlicher Weise wie bei den Gruppen  $S_n$  und  $A_n$  durch Partitionen charakterisieren lassen. Schließlich geben wir Schurs Ergebnisse für die Charakterwerte der Spincharaktere der Überlagerungsgruppen an. Schur veröffentlichte diese Ergebnisse in seiner Arbeit [Sch11], doch wird im vorliegenden Text für diese Aussagen auf eine „modernere“ Darstellung in [HH92] verwiesen. Wir werden sehen, dass der Satz II.(4.2), das Hauptergebnis in Abschnitt 4, noch nicht alle Werte der Spincharaktere beschreibt. Im darauf folgenden Abschnitt werden wir also die Morris'sche Rekursionsformel und die so genannten Branching-Rules wiedergeben, mit denen man induktive Verfahren zur Berechnung von Spincharakteren an die Hand bekommt.

Abschließend führen wir dann noch gewisse kombinatorische Objekte ein. Einige davon dürften dem mit der linearen Darstellungstheorie vertrauten Leser bekannt sein. Den Begriff des verschobenen Diagramms werden wir auch im nächsten Kapitel im Zusammenhang mit der Littlewood-Richardson-Regel für Spincharaktere benötigen.

### II.1 Ein verschränktes zentrales Produkt von Gruppen

Wir beschreiben nun die Konstruktion von Untergruppen der Schurschen Überlagerungsgruppen, welche Urbilder unter dem Homomorphismus  $\theta$  aus I.(5.3) von Untergruppen der symmetrischen Gruppe der Form  $U \times V$  sind.

**(1.1) Definition**

Sei  $\mathcal{G}$  die Klasse der Tripel  $(G, z, \sigma)$ , wobei  $G$  eine endliche Gruppe,  $z$  ein zentrales Element der Ordnung 2 und  $\sigma$  ein Homomorphismus  $G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  mit  $\sigma(z) = 0$  ist.

**(1.2) Proposition (siehe [HH92, Proposition 3.1])**

Seien  $(G_1, z_1, \sigma_1)$  und  $(G_2, z_2, \sigma_2)$  in  $\mathcal{G}$  und sei  $G_1 \tilde{\times} G_2$  das kartesische Produkt  $G_1 \times G_2$  mit der Multiplikation

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (z_1^{\sigma_2(x_2)\sigma_1(y_1)} x_1 y_1, x_2 y_2). \quad (\text{II.1})$$

Dann ist  $G_1 \tilde{\times} G_2$  Gruppe und

$$\{(1, 1), (1, z_2), (z_1, 1), (z_1, z_2)\}$$

ist eine zentrale Untergruppe von  $G_1 \tilde{\times} G_2$ .

Nun ist die so konstruierte Gruppe  $G_1 \tilde{\times} G_2$  im Allgemeinen kein Element aus  $\mathcal{G}$ , allerdings die Gruppe, welche durch Herausfaktorisieren einer geeigneten zentralen Untergruppe  $Z$  entsteht.

**(1.3) Proposition (siehe [HH92, Proposition 3.2])**

Seien  $(G_1, z_1, \sigma_1)$  und  $(G_2, z_2, \sigma_2)$  aus  $\mathcal{G}$  und  $Z := \{(1, 1), (z_1, z_2)\}$  Untergruppe des Zentrums von  $G_1 \tilde{\times} G_2$ . Definiere

$$G_1 \times_z G_2 := (G_1 \tilde{\times} G_2)/Z.$$

Dann ist  $G_1 \times_z G_2$  in  $\mathcal{G}$  mit  $z := (z_1, 1)Z$  und

$$\sigma((g_1, g_2)Z) = \sigma_1(g_1) + \sigma_2(g_2).$$

**(1.4) Bemerkung**

Die in dieser Arbeit vorkommenden Tripel  $(G, z, \sigma)$  aus  $\mathcal{G}$  sind immer von der Gestalt, dass  $G$  eine Untergruppe von  $\tilde{S}_n$  ist,  $z$  das zentrale Element von  $\tilde{S}_n$  aus I.(5.1), und  $\sigma$  über  $\theta$  aus I.(5.3) so definiert ist, dass  $\text{sgn}(\theta(x)) = (-1)^{\sigma(x)}$  für alle  $x \in G$  gilt.

Im Folgenden betrachten wir für  $n \in \mathbb{N}$  Untergruppen der  $\tilde{S}_n$ , welche Urbilder von Young-Untergruppen  $S_a \times S_b$  unter der Projektion  $\theta$  sind. Genauer: Für  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $a + b \leq n$  seien  $\tilde{S}_a = \theta^{-1}(S_a)$  und  $\tilde{S}_b = \theta^{-1}(S_b)$ , wobei  $S_a$  bzw.  $S_b$  die Untergruppen der  $S_n$  sind, welche auf den Ziffernmengen  $\{1, \dots, a\}$  und  $\{a + 1, a + 2, \dots, a + b\}$  operieren, und  $\theta : \tilde{S}_n \rightarrow S_n$  die Abbildung aus I.(5.3) ist. Mit diesen Bezeichnungen beschreibt der nächste Satz nun die Untergruppen  $\theta^{-1}(S_a \times S_b)$  der  $S_n$ .

**(1.5) Theorem (vgl. [HH92, Theorem 3.4])**

Seien  $\tilde{S}_a, \tilde{S}_b$  wie oben. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\langle \tilde{S}_a, \tilde{S}_b \rangle \rightarrow \tilde{S}_a \times_z \tilde{S}_b.$$

**Beweisskizze.** Es seien  $z, t_1, \dots, t_{n-1}$  die Erzeuger der  $\tilde{S}_n$  aus I.(5.1). Wir definieren  $X = \{z, t_1, \dots, t_{a-1}\}$  und  $Y = \{z, t_{a+1}, \dots, t_{a+b-1}\}$  und schränken  $\theta$  auf die Untergruppen  $\langle X \rangle$  bzw.  $\langle Y \rangle$  ein. Die Erzeuger  $t_i$  werden auf die Transpositionen  $s_i$  (vgl. (I.3)) abgebildet, also sind  $S_a$  und  $S_b$  epimorphe Bilder von  $\langle X \rangle$  bzw.  $\langle Y \rangle$ . Wegen  $z \in \langle X \rangle$  und  $z \in \langle Y \rangle$  folgt  $\langle X \rangle = \tilde{S}_a$  und  $\langle Y \rangle =$

$\tilde{S}_b$ . Damit sind  $\tilde{S}_a$  bzw.  $\tilde{S}_b$  auf  $X$  bzw.  $Y$  mit einer entsprechenden Teilmenge der Relationen aus I.(5.1) präsentiert. Die Untergruppe  $\langle \tilde{S}_a, \tilde{S}_b \rangle = \theta^{-1}(S_a \times S_b)$  hat dann eine Präsentation mit Erzeugermenge  $X \cup Y$  und Relationen

$$\begin{aligned} t_i^2 &= z, & 1 \leq i \leq a+b-1, i \neq a, \\ (t_i t_{i+1})^3 &= z, & 1 \leq i \leq a-2 \text{ oder } a+1 \leq i \leq a+b-2, \\ t_i t_j &= z t_i t_j, & 1 \leq i, j \leq a+b-1, |i-j| > 2, i \neq a \neq j. \end{aligned}$$

Andererseits sind  $\tilde{S}_a$  und  $\tilde{S}_b$  Elemente aus  $\mathcal{G}$ , d. h. man kann  $\tilde{S}_a \times_z \tilde{S}_b$  wie in II.(1.3) bilden. Aus den gegebenen Präsentationen von  $\tilde{S}_a$  und  $\tilde{S}_b$  erhält man eine Präsentation von  $\tilde{S}_a \times_z \tilde{S}_b$  indem man für alle Erzeuger  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq a-1$ , von  $\tilde{S}_a$  die Elemente  $(t_i, 1)Z$ , und für die Erzeuger  $t_i$ ,  $a+1 \leq i \leq a+b-1$ , von  $\tilde{S}_b$  die Elemente  $(1, t_i)Z$  nimmt. Die Relationen zu den  $t_i$ 's ersetzt man dann durch gleich lautende Relationen für die  $(t_i, 1)Z$ 's bzw.  $(1, t_i)Z$ 's. Schließlich nimmt man noch weitere Relationen der Form

$$((1, t_j)Z)((t_i, 1)Z) = \tilde{z}^{\sigma(t_i)\sigma(t_j)} ((t_i, 1)Z)((1, t_j)Z)$$

für  $i \in \{1, \dots, a-1\}$  und  $j \in \{a+1, \dots, a+b-1\}$  hinzu. (Man bildet das verschränkte zentrale Produkt wie in II.(1.2), wobei  $\tilde{z} = (z, 1)Z$  ist.) Bildet man dann die Erzeuger  $t_i$  auf  $(t_i, 1)Z$  bzw.  $(1, t_i)Z$  ab, so erhält man den gesuchten Isomorphismus.  $\square$

**(1.6) Korollar (vgl. [HH92, Corollary 3.5])**

Es seien  $u$  und  $v$  aus  $\tilde{S}_n$ , so dass  $\theta(u)$  und  $\theta(v)$  auf disjunkten Ziffernmengen operieren. Dann ist  $uv = vu$ , außer beide Permutationen  $\theta(u)$  und  $\theta(v)$  sind ungerade. In diesem Fall ist  $uv = zvu$ .

**Beweis.** Es seien  $X, Y \subseteq \{1, \dots, n\}$  disjunkt, so dass  $\theta(u)$  auf  $X$  und  $\theta(v)$  auf  $Y$  operiert. Seien  $\tilde{S}_a$  und  $\tilde{S}_b$  die Überlagerungsgruppen der symmetrischen Gruppen auf  $X$  bzw.  $Y$ . Nach II.(1.5) ist

$$\langle \tilde{S}_a, \tilde{S}_b \rangle \cong \tilde{S}_a \times_z \tilde{S}_b.$$

Identifizieren wir  $u$  mit  $(u, 1)$  und  $v$  mit  $(1, v)$  in  $\tilde{S}_a \times_z \tilde{S}_b$ , so liefert (II.1), dass

$$\begin{aligned} (u, 1)(1, v) &= (u, v) & \text{und} \\ (1, v)(u, 1) &= (z^{\sigma(v)\sigma(u)} u, v) \end{aligned}$$

in  $\tilde{S}_a \times_z \tilde{S}_b$  ist, womit die Behauptung folgt.  $\square$

Damit sind die Urbilder  $\theta^{-1}(S_a \times S_b)$  in  $\tilde{S}_n$  beschrieben. Als nächstes werden wir die Charaktere dieser Gruppen beschreiben, um dann schließlich im vierten Kapitel zu untersuchen, ob die nach  $\tilde{S}_n$  bzw.  $\tilde{A}_n$  induzierten Charaktere irreduzibel sind.

## II.2 Darstellungen der Objekte aus $\mathcal{G}$

In diesem Abschnitt tragen wir einige Eigenschaften von Darstellungen der Objekte in  $\mathcal{G}$  zusammen. Darstellungen werden hier stets über dem Grundkörper  $\mathbb{C}$  betrachtet. Weiter wird beschrieben, wie aus Darstellungen zweier Untergruppen  $U$  und  $V$  von  $G$  bzw.  $H$  aus  $\mathcal{G}$  eine Darstellung des Produkts  $U \times_z V$  konstruiert werden kann. Wir richten hierbei unsere größte Aufmerksamkeit auf die so genannten *negativen* bzw. *Spindarstellungen*. Dies sind die treuen Darstellungen für die Gruppen aus  $\mathcal{G}$ . Jene Darstellungen, für die  $z$  im Kern ist, entsprechen nach I.(2.6) den gewöhnlichen Darstellungen der Bilder der Gruppen aus  $\mathcal{G}$  (unter  $\theta$ ) in  $S_n$ , welche aus der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe hinreichend bekannt sind.<sup>1</sup>

Wenn es nicht anderes vermerkt ist, vergleiche man für die Definitionen in diesem Abschnitt [HH92, Kapitel 4 und 5]. Bis auf Weiteres bezeichne  $G$  eine Gruppe für die  $(G, z, \sigma)$  in  $\mathcal{G}$  ist.

### (2.1) Definition (Spindarstellung/-charakter)

Eine treue Darstellung  $D$  von  $G$  und der zugehörige Charakter  $\chi$  heißen **Spindarstellung** bzw. **Spincharakter**.

Aus I.(5.5) folgt, dass für eine treue irreduzible Darstellung  $D(z) = -E$  gilt, also ist  $\chi(z) = -\chi(1)$  für den entsprechenden Charakter. Gelegentlich sagen wir statt Spindarstellung auch negative Darstellung.

### (2.2) Definition (assozierte Darstellungen)

Sei  $D$  eine Darstellung von  $G$ . Die zu  $D$  **assozierte Darstellung** ist durch

$$R^a(g) = (-1)^{\sigma(g)} R(g)$$

gegeben. Die Darstellung heißt **selbst-assoziert**, falls  $R = R^a$  gilt. Ist  $\chi$  der Charakter zu  $R$ , so bezeichnet  $\chi^a$  den Charakter von  $R^a$ , und wir nennen ihn den zu  $\chi$  **assozierten Charakter**.

Ein selbst-assoziierter Charakter, verschwindet auf den Elementen  $g$ , für die  $\sigma(g) = 1$  ist, also auf den Elementen, für die  $\theta(g)$  eine ungerade Permutation ist. Andererseits ist ein Charakter, welcher auf allen  $g \in G$  mit  $\sigma(g) = 1$  verschwindet, offensichtlich selbst-assoziert. Ist Kern  $\sigma = G$ , also  $G$  in  $\tilde{A}_n$ , so ist jeder Charakter von  $G$  selbst-assoziert.

Für Normalteiler in  $G$  kann man sich konjugierte Klassenfunktionen anschauen, vergleiche dazu I.(2.3). Wir können nun einen wichtigen Satz formulieren, welcher insbesondere den Zusammenhang der Spincharaktere von  $\tilde{S}_n$  und  $\tilde{A}_n$  liefert.

### (2.3) Theorem (siehe [HH92, Theorem 4.2])

Es sei  $G_0 := \text{Kern } \sigma$  eine echte Untergruppe von  $G$ . Sei  $R$  eine irreduzible Darstellung von  $G$ . Dann gilt:

- (i) Ist  $R$  selbst-assoziert, dann hat die Einschränkung von  $R$  auf  $G_0$  zwei irreduzible, zueinander konjugierte Konstituenten.
- (ii) Falls  $R$  nicht selbst-assoziert ist, so ist die Einschränkung von  $R$  auf  $G_0$  irreduzibel und selbst-konjugiert.

<sup>1</sup>Vgl. hierzu [JK81, Kapitel 2].

Nun wenden wir uns der Aufgabe zu, irreduzible Darstellungen eines Produkts von Gruppen wie in Abschnitt II.1 zu konstruieren. Wir haben in I.(1.4)  $A$ -Moduln eingeführt und bemerkt, dass diese eine alternative Formulierung von Darstellungen der Algebra  $A$  liefern. Ist nun  $A$  die Gruppenalgebra  $\mathbb{C}G$  einer Gruppe  $G$ , dann sind die  $A$ -Moduln Vektorräume über  $\mathbb{C}$ .

Um das Produkt von Darstellungen und Charakteren zu definieren, führen wir das Tensorprodukt von Vektorräumen ein.

**(2.4) Definition/Proposition (Tensorprodukt, vgl. [CR62, § 12])**

Seien  $M$  und  $N$  endlich-dimensionale Vektorräume über  $\mathbb{C}$ . Dann existiert ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $M \otimes N$  und eine  $\mathbb{C}$ -bilineare Abbildung  $\varphi : M \times N \rightarrow M \otimes N$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Jedes Element in  $M \otimes N$  ist eine  $\mathbb{C}$ -Linearkombination von Elementen der Form  $\varphi(v, w)$ ,  $v \in M$  und  $w \in N$ .
- (b) Für jeden Vektorraum  $V$  und jede bilineare Abbildung  $f : M \times N \rightarrow V$  existiert eine lineare Abbildung  $f^* : M \otimes N \rightarrow V$  mit

$$f(v, w) = f^*(\varphi(v, w))$$

für alle  $v \in M$  und  $w \in N$ . Das bedeutet, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & V \\ & \searrow \varphi & \nearrow f^* \\ & M \otimes N & \end{array}$$

Den Vektorraum  $M \otimes N$  nennen wir das **Tensorprodukt** von  $M$  und  $N$ , die Elemente  $\varphi(v, w)$  bezeichnen wir mit  $v \otimes w$ . Das Tensorprodukt ist durch diese Eigenschaften bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Wählt man von  $M$  und  $N$  Basen  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  bzw.  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ , so erhält man eine Basis von  $M \otimes N$  aus den  $mn$  Elementen der Form  $v_i \otimes w_j$ .

Sind  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$  und  $w = \sum_{j=1}^m b_j w_j$  Elemente in  $M$  bzw.  $N$ , dann ist

$$v \otimes w = \sum_{i,j=1}^{n,m} a_i b_j (v_i \otimes w_j).$$

Ist weiter  $M$  ein  $\mathbb{C}G$ -Modul und  $N$  ein  $\mathbb{C}H$ -Modul, dann kann man dem Tensorprodukt  $M \otimes N$  eine  $\mathbb{C}(G \times H)$ -Modulstruktur verleihen, die

$$(g, h)(v \otimes w) = gv \otimes hw$$

für alle  $g \in G$ ,  $h \in H$  und  $v \otimes w \in M \otimes N$  erfüllt. Wir beschreiben nun die Darstellung von  $G \times H$  auf dem Tensorprodukt  $M \otimes N$ . Seien  $R$  und  $S$  die zu  $M$  und  $N$  assoziierten Darstellungen. Für  $g \in G$  und  $h \in H$  gelte

$$R(g)v_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j \quad \text{und} \quad S(h)w_i = \sum_{j=1}^m b_{ji} w_j.$$

Wählt man nun die geordnete Basis

$$\{v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_1 \otimes w_m, v_2 \otimes w_1, \dots, v_n \otimes w_m\}$$

von  $M \otimes N$ , so erhält man die zu  $M \otimes N$  assoziierte Darstellung  $R \otimes S$  aus dem Kronecker-Produkt von Matrizen: Für  $g \in G$  und  $h \in H$  ist  $R \otimes S(g, h)$  die Matrix

$$R(g) \otimes S(h) = \begin{pmatrix} a_{11}S(h) & a_{12}S(h) & \dots & a_{1n}S(h) \\ a_{21}S(h) & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}S(h) & \dots & a_{nm}S(h) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nm \times nm},$$

die aus  $n^2$  Blöcken von  $(m \times m)$ -Matrizen besteht. Wenn  $\chi$  bzw.  $\xi$  die Charaktere von  $M$  bzw.  $N$  sind, dann erfüllt der zu  $M \otimes N$  assoziierte Charakter also  $\chi(g)\xi(h)$ ,  $g \in G$  und  $h \in H$ . Es folgt eine Aussage über die Irreduzibilität von Tensorprodukten.

**(2.5) Theorem (Irreduzible Tensorprodukte, siehe [Hup67, V.10.3])**

Seien  $G$  und  $H$  endliche Gruppen und  $M$  und  $N$  irreduzible Moduln von  $\mathbb{C}G$  bzw.  $\mathbb{C}H$ . Dann ist  $M \otimes N$  ein irreduzibler  $\mathbb{C}(G \times H)$ -Modul und alle irreduziblen  $\mathbb{C}(G \times H)$ -Moduln sind von dieser Form. Es sind zwei solche Moduln  $M \otimes N$  und  $M' \otimes N'$  genau dann isomorph, wenn  $M \cong M'$  und  $N \cong N'$  ist.

Wir wollen nun für Gruppen  $G$  und  $H$  aus  $\mathcal{G}$  die negativen Darstellungen klassifizieren. Analog zu II.(2.1) nennen wir einen Modul  $M$  **negativ**, wenn  $z \in G$  auf  $M$  wie  $-1$  operiert. Zunächst beschränken wir uns auf den Fall, dass  $\sigma$  auf  $G$  die Nullabbildung ist. Dann ist das Produkt  $G \tilde{\times} H$  aus II.(1.2) das gewöhnliche direkte Produkt  $G \times H$ . Dafür gilt folgender Satz.

**(2.6) Theorem (Irreduzible negative Tensorprodukte — 1. Fall)**

(siehe [HH92, Corollary 5.3])

Seien  $G$  und  $H$  Objekte in  $\mathcal{G}$  und  $\sigma$  die Nullabbildung auf  $G$ . Dann sind die irreduziblen  $\mathbb{C}(G \tilde{\times} H)$ -Moduln alle von der Form  $M \otimes N$  für irreduzible  $\mathbb{C}G$  bzw.  $\mathbb{C}H$ -Moduln  $M$  bzw.  $N$ . Die irreduziblen  $\mathbb{C}(G \times_z H)$ -Moduln sind genau die  $\mathbb{C}(G \tilde{\times} H)$ -Moduln, auf denen  $(z, z)$  trivial operiert. Das ist genau dann der Fall, wenn sowohl  $M$  als auch  $N$  entweder beide positiv oder beide negativ sind. Sowohl als  $\mathbb{C}(G \tilde{\times} H)$  als auch als  $\mathbb{C}(G \times_z H)$ -Modul sind zwei solche Moduln  $M \otimes N$  und  $M' \otimes N'$  genau dann isomorph, wenn  $M \cong M'$  und  $N \cong N'$  ist.

Ist  $\sigma$  nicht die Nullabbildung auf  $G$  oder  $H$ , so muss man etwas mehr Aufwand betreiben, um die negativen Darstellungen der  $\mathbb{C}(G \times_z H)$ -Moduln zu beschreiben. Sei  $g$  nicht im Kern von  $\sigma$  und  $\chi$  ein Charakter von Kern  $\sigma$ . Dann gilt für den nach  $G$  induzierten Charakter gemäß I.(1.11)

$$\check{\chi}(x) + \check{\chi}(g^{-1}xg)$$

für alle  $x \in G$ , mit

$$\check{\chi}(y) = \begin{cases} \chi(y), & y \in \text{Kern } \sigma \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei bemerkt, dass obige Gleichung unabhängig von der Wahl von  $g \notin \text{Kern } \sigma$  ist: Es existiert zu beliebigem  $\tilde{g} \notin \text{Kern } \sigma$  ein  $a \in \text{Kern } \sigma$  mit  $\tilde{g} = ga$ , womit dann

$$\dot{\chi}(g^{-1}xg) = \dot{\chi}(a^{-1}g^{-1}xga) = \dot{\chi}(\tilde{g}^{-1}x\tilde{g})$$

ist.

Es sei  $A := \text{Kern } \sigma$  und  $L$  ein irreduzibler  $\mathbb{C}A$ -Modul welcher den Charakter  $\chi$  bewirkt. Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}G$ -Modul der induzierten Darstellung  $L \uparrow G$ . Dann gibt es eine Vektorraumzerlegung

$$V = L_0 \oplus L_1, \quad (\text{II.2})$$

so dass gilt:

- (i) Sowohl  $L_0$  als auch  $L_1$  sind  $\mathbb{C}A$ -Moduln. Die Operation ist durch die Einschränkung der Operation von  $G$  auf  $V$  auf  $A$  gegeben. Der  $\mathbb{C}A$ -Modul  $L_0$  sei so gewählt, dass er isomorph zu  $L$  (als  $\mathbb{C}A$ -Modul) ist.
- (ii) Ist  $g_1$  ein Element aus  $G$ , welches nicht in  $A$  liegt, so gilt  $g_1 L_i \subseteq L_{i+1}$ , wobei die Indizes hier modulo 2 zu nehmen sind.

Falls  $\sigma$  die Nullabbildung auf  $G$  ist, ist  $L_1 = 0$  zu setzen. Die Punkte (i) und (ii) sind auch dann erfüllt. Im Fall, dass  $\sigma$  nicht die Nullabbildung ist, ist  $L_1$  isomorph zum Konjugierten von  $L$  als  $\mathbb{C}A$ -Modul.<sup>2</sup> Es ist nun unser Ziel, für zwei negative  $\mathbb{C}G$ - bzw.  $\mathbb{C}H$ -Moduln  $M$  und  $N$  einen negativen  $\mathbb{C}(G \tilde{\times} H)$ -Modul  $M \otimes_z N$  zu definieren.

**(2.7) Definition (Ein verschränktes Tensorprodukt, vgl. [HH92, Seite 50f.]**

Es seien  $G, H$  Objekte aus  $\mathcal{G}$  und  $M$  bzw.  $N$  irreduzible  $\mathbb{C}G$ - bzw.  $\mathbb{C}H$ -Moduln. Weiter sei  $L$  ein irreduzibler Konstituent von  $M \downarrow A$  und  $L_0 \oplus L_1$  eine Zerlegung von  $L \uparrow G$  wie in (II.2). Außer im Fall, dass  $M$  nicht selbst-assoziiert und  $N$  selbst-assoziiert ist, definieren wir das **verschränkte Tensorprodukt**  $M \otimes_z N$  als den Vektorraum  $(L_0 \oplus L_1) \otimes N$  mit folgender  $\mathbb{C}(G \tilde{\times} H)$ -Operation:

$$(g, h)(v \otimes w) = (-1)^{j\sigma(h)} gv \otimes hw,$$

für alle  $v \in L_j$ ,  $w \in N$  und  $g \in G$ ,  $h \in H$ . Ist  $N$  selbst-assoziiert, dann bezeichne  $K$  einen irreduziblen Konstituenten der Einschränkung von  $N$  auf  $A$  und  $K_0 \oplus K_1$  sei eine Zerlegung von  $K \uparrow H$  gemäß (II.2). Ist zusätzlich  $M$  nicht selbst-assoziiert, definieren wir das Tensorprodukt  $M \otimes_z N$  als den Vektorraum  $M \otimes (K_0 \oplus K_1)$  mit folgender  $\mathbb{C}(G \tilde{\times} H)$ -Operation:

$$(g, h)(v \otimes w) = (-1)^{j\sigma(g) + \sigma(g)\sigma(h)} gv \otimes hw,$$

für alle  $v \in M$  und  $w \in K_j$  und  $g \in G$ ,  $h \in H$ .

Man legt durch die Wahl der Konstituenten  $L_i$  bzw.  $K_i$  das Tensorprodukt  $M \otimes_z N$  nur bis auf Assoziiertheit fest, d. h. die Werte in der unten stehenden Tabelle geben die Charaktere auch nur bis auf Assoziiertheit an. Bevor wir jedoch die Spincharaktere für  $G \times_z H$  angeben, halten wir noch eine Aussage über das Tensorprodukt aus II.(2.7) fest.

<sup>2</sup>Zu den gemachten Aussagen schaue man z. B. in [CR62, §12D] nach.

**(2.8) Proposition (siehe [HH92, Proposition 5.5])**

Es seien  $G, H, M, N$  wie in Definition II.(2.7) und  $M \otimes_z N$  ein  $\mathbb{C}(G \tilde{\times} H)$ -Modul. Falls  $M$  und  $N$  beides negative Moduln sind, dann operiert  $(z, z)$  trivial auf  $M \otimes_z N$  und dieser ist ein  $\mathbb{C}(G \times_z H)$ -Modul.

Schließlich geben wir noch die Aussage über die Irreduzibilität dieser Moduln wieder.

**(2.9) Theorem (siehe [HH92, Theorem 5.6])**

Es seien  $G$  und  $H$  Objekte aus  $\mathcal{G}$ . Sind  $M$  und  $N$  irreduzible, negative  $\mathbb{C}G$ - bzw.  $\mathbb{C}H$ -Moduln, dann ist der Modul  $M \otimes_z N$  sowohl irreduzibel als  $\mathbb{C}(G \times_z H)$ -Modul als auch als  $\mathbb{C}(G \tilde{\times} H)$ -Modul.

Nun sind wir in der Lage die Spincharaktere von  $G \times_z H$  anzugeben.

**(2.10) Theorem (Irreduzible Spincharaktere von Tensorprodukten — 2. Fall) (siehe [HH92, Table 5.7])**

Es seien  $M$  und  $N$  irreduzible, negative  $\mathbb{C}G$ - bzw.  $\mathbb{C}H$ -Moduln. Die letzten vier Zeilen der folgende Tabelle geben die Charakterwerte  $\chi_{M \otimes_z N}(g, h)$  wieder, wobei  $\chi_M$  bzw.  $\chi_N$  die Charaktere von  $M$  bzw.  $N$  bezeichnen (entsprechendes gilt für die Konstituenten  $L$  bzw.  $K$  und die zugehörigen Charaktere  $\chi_L$  bzw.  $\chi_K$ ). In den ersten drei Zeilen stehen die Kürzel „sa“ bzw. „nsa“ für selbst-assoziert bzw. nicht selbst-assoziert.

$M$	sa	sa	nsa	nsa
$N$	sa	nsa	sa	nsa
$M \otimes_z N$	sa	nsa	nsa	sa
$\dim(M \otimes_z N)$	$\dim(M)\dim(N)$	$\dim(M)\dim(N)$	$\dim(M)\dim(N)$	$2\dim(M)\dim(N)$
$\sigma(g)=0=\sigma(h)$	$\chi_M(g)\chi_N(h)$	$\chi_M(g)\chi_N(h)$	$\chi_M(g)\chi_N(h)$	$2\chi_M(g)\chi_N(h)$
$\sigma(g)=0 \neq \sigma(h)$	0	$(\chi_L(g) - \chi_L^c(g))\chi_N(h)$	0	0
$\sigma(g) \neq 0 = \sigma(h)$	0	0	$\chi_M(g)(\chi_K(h) - \chi_K^c(g))$	0
$\sigma(g) \neq 0 \neq \sigma(h)$	0	0	0	0

Man erkennt, dass  $M \otimes_z N$  genau dann selbst-assoziert ist, wenn für alle  $g, h$  mit  $\sigma(g) + \sigma(h) = 1$  der Charakterwert  $\chi_{M \otimes_z N}(g, h)$  gleich 0 ist. Das ist konsistent mit der Bemerkung nach Definition II.(2.2). Man kann nun zeigen, dass man alle irreduziblen, negativen Darstellungen von  $G \times_z H$  über die Tensorprodukte  $M \otimes_z N$  erhält.<sup>3</sup> Um die Charaktere von  $G \times_z H$  angeben zu können, muss man also die Charaktere von Kern  $\sigma$  auf  $G$  und  $H$  kennen, sowie die Spincharaktere von  $G$  und  $H$ . Es sei noch bemerkt, dass für  $\sigma = 0$  auf  $G$  oder  $H$  in der Tabelle  $L = M$  und  $L^c = 0$  bzw. entsprechendes für  $N$  zu setzen ist. Damit ist der Fall von II.(2.6) in obiger Tabelle enthalten.

Schließlich geben wir noch die Charaktere von  $G \times_z H$ , eingeschränkt auf den Kern von  $\sigma$ , an.

**(2.11) Theorem (siehe [HH92, Theorem 5.10])**

Sei  $\sigma$  nicht die Nullabbildung auf mindestens einer der beiden Gruppen  $G$  oder  $H$ . Die Einschränkung von  $M \otimes_z N$  auf Kern  $\sigma$  ist irreduzibel, falls genau einer der beiden Moduln  $M$

<sup>3</sup>Vgl. hierzu [HH92, Theorem 5.9].



oder  $N$  selbst-assoziert ist. Andernfalls ist

$$(\chi_M \otimes_z \chi_N) \downarrow \text{Kern } \sigma = \beta + \beta^c$$

für einen irreduziblen Charakter  $\beta$ , so dass gilt:

(i) falls  $M$  und  $N$  beide selbst-assoziert sind, ist

$$(\beta - \beta^c)(g, h) = \begin{cases} \pm(\chi_L - \chi_L^c)(g)(\chi_K - \chi_K^c)(h), & \text{falls } \sigma(g) = 0 = \sigma(h), \\ 0, & \text{falls } \sigma(g) = 1 = \sigma(h), \end{cases}$$

(ii) falls weder  $M$  noch  $N$  selbst-assoziert sind, ist

$$(\beta - \beta^c)(g, h) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \sigma(g) = 0 = \sigma(h), \\ \pm 2i\chi_M(g)\chi_N(h), & \text{falls } \sigma(g) = 0 = \sigma(h). \end{cases}$$

Mit  $i$  ist hier wieder eine Wurzel von  $-1$  bezeichnet. Das Vorzeichen in den Fällen (i) und (ii) hängt von der Wahl des Konjugierten  $\beta$  ab.

## II.3 Konjugiertenklassen der $\tilde{S}_n$ und $\tilde{A}_n$

Ähnlich wie bei der symmetrischen Gruppe lassen sich die Konjugiertenklassen der Überlagerungsgruppen  $\tilde{S}_n$  durch Partitionen der Zahl  $n$  parametrisieren. Jedoch anders als dort, repräsentiert nicht jede Partition eine Konjugiertenklasse und es gibt Partitionen, die zwei Konjugiertenklassen repräsentieren.

**(3.1) Lemma (vgl. [HH92, Theorem 3.6])**

Sei  $C$  eine Konjugiertenklasse in  $S_n$ . Dann spaltet das Urbild  $\theta^{-1}(C)$  entweder in genau zwei Konjugiertenklassen auf oder ist selbst eine Konjugiertenklasse in  $\tilde{S}_n$ . Letzteres ist genau dann der Fall, wenn ein Element  $g \in \theta^{-1}(C)$  existiert, so dass  $g$  zu  $zg$  konjugiert ist.

**Beweis.** Seien  $x \in \theta^{-1}(C)$  und  $y \in \tilde{S}_n$  zu  $x$  konjugiert. Dann ist auch  $\theta(x)$  zu  $\theta(y)$  konjugiert, also ist  $y$  ebenfalls in  $\theta^{-1}(C)$ . Folglich ist  $\theta^{-1}(C)$  eine Vereinigung von  $\tilde{S}_n$ -Konjugiertenklassen.

Seien andererseits  $x, y \in \theta^{-1}(C)$ . Dann sind  $\theta(x)$  und  $\theta(y)$  in  $S_n$  konjugiert, d. h. es existiert ein  $a$  mit  $a\theta(x)a^{-1} = \theta(y)$ . Ist  $w \in \tilde{S}_n$  mit  $\theta(w) = a$ , dann ist also  $\theta(wxw^{-1}) = \theta(y)$ . Folglich ist  $x$  entweder zu  $y$  oder zu  $zy$  konjugiert.

Wir unterscheiden zwei Fälle: Existiert ein Element  $g$  in  $\theta^{-1}(C)$ , welches zu  $zg$  konjugiert ist, dann bildet  $\theta^{-1}(C)$  eine Konjugiertenklasse. (Für beliebiges  $h \in \theta^{-1}(C)$  sind  $\theta(g)$  und  $\theta(h)$  in  $S_n$  konjugiert. Es folgt wie oben, dass dann  $h$  zu  $g$  oder zu  $zg$  konjugiert ist.) Ist nun kein  $g$  aus  $\theta^{-1}(C)$  zu  $zg$  konjugiert, so spaltet  $\theta^{-1}(C)$  in genau zwei Konjugiertenklassen auf. (Für ein festes  $g \in \theta^{-1}(C)$  ist jedes Element in  $\theta^{-1}(C)$  entweder zu  $g$  oder zu  $zg$  konjugiert und nicht zu beiden, denn sonst wäre  $g$  zu  $zg$  konjugiert.)  $\square$

Wir beschreiben die **aufspaltenden** Klassen genauer.

### (3.2) Bezeichnung

Für ein  $g \in \tilde{S}_n$  ist das Bild  $\theta(g)$  unter dem Homomorphismus in I.(5.3) eine Permutation in  $S_n$ . Wir sagen,  $g$  ist vom **Typ**  $\lambda$ , falls  $\theta(g)$  Zykeltyp  $\lambda$  hat. Für  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  definieren wir

$$C_\lambda := \{g \in \tilde{S}_n \mid \theta(g) \text{ ist vom Typ } \lambda\}.$$

Nach obigem Lemma gilt für  $g, h \in C_\lambda$ , dass  $h$  entweder zu  $g$  oder zu  $zg$  konjugiert ist. Im Fall, dass  $C_\lambda$  in zwei Konjugiertenklassen aufspaltet, bezeichnen wir die beiden Teile mit  $C_\lambda^+$  und  $C_\lambda^-$ . Um diese Bezeichnungen unzweideutig festzulegen, setzen wir

$$g^\lambda := \pi_1 \pi_2 \dots \pi_l,$$

falls  $l = \ell(\lambda)$  und  $\pi_j$  Urbilder der entsprechenden  $\lambda_j$ -Zykel in  $S_n$  sind; hierbei bezeichnet

$$\pi_j = t_{a_j+1} t_{a_j+2} \dots t_{a_j+\lambda_j-1}, \quad \text{wobei } a_j = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i,$$

und  $t_i$  die Urbilder der Transpositionen  $s_i = (i, i+1)$  aus Definition I.(5.1) sind. Mit der Klasse  $C_\lambda^+$  ist dann die Menge aller Konjugierten von  $g^\lambda$  gemeint. Wir nennen  $g^\lambda$  den Standardvertreter vom Typ  $\lambda$ . Mit dieser Bezeichnung gilt

$$C_\lambda^+ = \{xg^\lambda x^{-1} \mid x \in \tilde{S}_n\} \quad \text{und} \quad C_\lambda^- = \{zxg^\lambda x^{-1} \mid x \in \tilde{S}_n\}.$$

Der folgende Satz charakterisiert nun die aufspaltenden Klassen in  $\tilde{S}_n$ .

### (3.3) Theorem (Konjugiertenklassen der $\tilde{S}_n$ , vgl. [Ste89, Theorem 2.1])

Eine  $S_n$ -Konjugiertenklasse zum Zykeltyp  $\lambda$  spaltet genau dann in zwei Klassen  $C_\lambda^+$  und  $C_\lambda^-$  in  $\tilde{S}_n$  auf, wenn

- (i) entweder  $\lambda \in \mathcal{O}_n$
- (ii) oder  $\lambda \in \mathcal{D}_n^-$  ist.

Das entsprechende Ergebnis für die aufspaltenden Konjugiertenklassen der  $A_n$  lautet :

### (3.4) Theorem (Konjugiertenklassen der $\tilde{A}_n$ , vgl. [HH92, Theorem 3.9])

Die Klassen der  $A_n$ , welche in zwei Konjugiertenklassen der  $\tilde{A}_n$  aufspalten, sind genau diejenigen mit Zykeltyp  $\lambda$  für

- (i)  $\lambda \in \mathcal{O}_n$  oder
- (ii)  $\lambda \in \mathcal{D}_n^+ \setminus \mathcal{O}_n$ .

Damit folgt aus I.(4.2) und den beiden letzten Theoremen: Es zerfallen genau die  $\tilde{S}_n$ -Konjugiertenklassen  $C_\lambda$  bzw.  $C_\lambda^\pm$  in genau zwei  $\tilde{A}_n$ -Klassen, wenn  $\lambda \in \mathcal{D}_n^+$  ist. Im Folgenden schreiben wir für  $C_\lambda$  auch schon mal kurz  $(\lambda)$ , wenn eine Verwechslung mit der Partition ausgeschlossen werden kann.

**(3.5) Beispiel**

Sei  $n = 4$ . Die Zykeltypen in der  $S_4$  sind  $(1^4)$ ,  $(2, 1^2)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 1)$  und  $(4)$ . Davon liegen die Klassen zu  $(1^4)$ ,  $(2, 2)$  und  $(3, 1)$  in der  $A_4$ , wobei nach I.(4.2) nur die Klasse zu  $(3, 1)$  in zwei  $A_4$ -Klassen  $(3, 1)_1$  bzw.  $(3, 1)_2$  zerfällt. Nach II.(3.3) spalten die Klassen zu  $(1^4)$  und  $(3, 1)$  in jeweils zwei  $\tilde{S}_4$ -Klassen auf. Davon zerfallen dann gemäß II.(3.4) die beiden Klassen  $(3, 1)^\pm$  nochmals in zwei Konjugiertenklassen der  $\tilde{A}_4$ . Die  $S_4$  hat also fünf, die  $A_4$  vier Konjugiertenklassen. Die  $\tilde{S}_4$  hat schließlich sieben und die  $\tilde{A}_4$  hat sechs Konjugiertenklassen.

**II.4 Die Spincharaktere**

Wir wollen nun Schurs Ergebnisse für die Charakterwerte der projektiven Darstellungen der symmetrischen und alternierenden Gruppen angeben. Man kann hierbei jeder Partition, die aus paarweise verschiedenen Teilen besteht, gewisse Spincharaktere zuordnen: Einer Partition aus  $\mathcal{D}_n^-$  sind dabei zwei verschiedene, zueinander assoziierte Charaktere zugeordnet, einer Partition aus  $\mathcal{D}_n^+$  ein selbst-assoziierter. Hierbei folgen wir der Notation aus I.(4.6) und bezeichnen die Charaktere mit  $\langle \lambda \rangle$  bzw. gelegentlich mit  $\zeta^\lambda$  für Partitionen  $\lambda$  von  $n$ . Des Weiteren erinnern wir an die Notation aus I.(4.1): Für eine Partition  $\lambda \vdash n$  mit Länge  $l$  ist  $\sigma(\lambda) = n - l$ . (Man verwechsle daher das  $\sigma$  in diesem Zusammenhang nicht mit dem  $\sigma$  aus den Abschnitten II.1 und II.2.)

Aus I.(2.3) folgt, dass die Einschränkung  $\chi \downarrow \tilde{A}_n$  eines irreduziblen Charakters  $\chi$  der  $\tilde{S}_n$  entweder irreduzibel ist, oder in zwei zueinander konjugierte Konstituenten zerfällt. Wann dies passiert, besagt der folgende Satz, welcher ein Spezialfall von II.(2.3) ist.

**(4.1) Theorem (Charaktere der  $\tilde{A}_n$ , vgl. [HH92, Theorem 8.6])**

Es sei  $n \geq 2$ . Dann gilt:

- (i) Wenn  $\lambda$  ungerade ist, also  $\langle \lambda \rangle \neq \langle \lambda \rangle^a$ , so ist die Einschränkung  $\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{A}_n$  ein irreduzibler Charakter von  $\tilde{A}_n$  und gleich der Einschränkung  $\langle \lambda \rangle^a \downarrow \tilde{A}_n$ .
- (ii) Ist  $\lambda$  gerade, also  $\langle \lambda \rangle$  selbst-assoziert, dann zerfällt die Einschränkung von  $\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{A}_n$  in eine Summe von zwei zueinander konjugierten, irreduziblen Charakteren  $\alpha$  und  $\alpha^c$  von  $\tilde{A}_n$ . In diesem Fall ist  $\alpha \uparrow \tilde{S}_n = \langle \lambda \rangle = \alpha^c \uparrow \tilde{S}_n$ .

Wir führen eine weitere abkürzende Schreibweise ein. Ist  $g \in \tilde{S}_n$  vom Typ  $\pi \in \mathcal{P}_n$ , d. h.  $\theta(g)$  hat Zykeltyp  $\pi$  in  $S_n$ , und ist  $\chi$  ein Charakter von  $\tilde{S}_n$ , dann schreiben wir für den Charakterwert  $\chi(g)$  auch  $\chi(\pi)$ . Falls die Konjugiertenklasse zum Zykeltyp  $\pi$  in zwei  $\tilde{S}_n$ -Konjugiertenlassen aufspaltet, ist der Charakterwert der Elemente aus  $C_\pi^+$  gemäß II.(3.2) gemeint. Insbesondere lassen sich so recht übersichtlich die Charakterwerte angeben: Für den mit der Partitionen  $\lambda$  indizierten irreduziblen Charakter von  $\tilde{S}_n$  schreiben wir  $\langle \lambda \rangle(\pi)$  für den Charakterwert auf der Konjugiertenklasse  $C_\pi$  (bzw.  $C_\pi^+$ ). Welcher Charakter mit  $\langle \lambda \rangle$  für die Partition  $\lambda$  bezeichnet ist, beschreibt der folgende Satz.

**(4.2) Theorem (Die Spincharaktere, siehe [HH92, Theorem 8.7])**

Sei  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathcal{D}_n$  mit  $\ell(\lambda) = l$  und sei  $\pi$  eine Partition von  $n$ . Falls  $\lambda$  ungerade ist, dann gilt:

(i) Falls  $\pi = \lambda$  ist, dann ist

$$\langle \lambda \rangle(\pi) = \pm i^{(n-l+1)/2} \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_l}{2}}.$$

(ii) Falls  $\pi \notin \mathcal{O}_n$  und  $\pi \neq \lambda$ , dann ist  $\langle \lambda \rangle(\pi) = 0$ .

Falls  $\lambda$  gerade ist, so gilt:

(iii) Falls  $\pi \notin \mathcal{O}_n$ , dann ist  $\langle \lambda \rangle(\pi) = 0$ .

(iv) Es sei  $\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{A}_n$  die Summe der zwei irreduziblen, zueinander konjugierten Charakteren  $\alpha$  und  $\alpha^c$  ist. Dann gilt für  $\pi = \lambda$ :

$$\alpha(\pi) - \alpha^c(\pi) = \pm i^{(n-l)/2} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_l}.$$

Für alle anderen  $\pi \in \mathcal{P}_n$  ist  $\alpha(\pi) = \alpha^c(\pi)$ . Da  $\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{A}_n = \alpha + \alpha^c$  gilt, lassen sich so also die Werte  $\alpha$  und  $\alpha^c$  bestimmen, wenn man  $\langle \lambda \rangle$  kennt.

Es sei hierbei  $i = \sqrt{-1}$  in  $\mathbb{C}$  fest gewählt. Das Vorzeichen in (i) und (iv) hängt von der Wahl des assoziierten bzw. des konjugierten Charakters ab.

Für  $\lambda \in \mathcal{D}_n^-$  ist damit der Charakter bis auf Assoziiertheit bestimmt. Wir wollen hier festlegen, dass mit  $\langle \lambda \rangle$  der Charakter gemeint ist, für den

$$\langle \lambda \rangle(\lambda) = +i^{(\sigma(\lambda)+1)/2} \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_l}{2}}$$

gilt (also der Wert auf der Klasse  $C_\lambda^+$ ). Der Satz liefert noch nicht alle Charakterwerte von  $\langle \lambda \rangle$ . Die Werte auf den übrigen Klassen kann man durch die Anwendung der Rekursionsformel von Morris berechnen. Diese wird zusammen mit den Branching-Rules für Spincharaktere im nächsten Abschnitt angegeben. Schließlich führen wir noch eine Bezeichnung ein: Die **Menge der Spincharaktere** von  $\tilde{S}_n$  bezeichnen wir mit  $\text{Irr}_-(\tilde{S}_n)$ .

## II.5 Morris' Rekursionsformel und Branching-Rules

In diesem Paragraphen geben wir die Rekursionsformel von Morris an, mit der man die Berechnung der Charakterwerte auf „kleinere Fälle“ zurückführt. Diese Formel ist das Spin-Analogon zur Murnaghan-Nakayama-Formel, welche die entsprechende Aussage für die Charaktere der symmetrischen Gruppe macht. Anschließend geben wir noch die Branching-Rules an, die ebenfalls ihre Entsprechung in der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe finden.<sup>4</sup>

Für  $\lambda \in \mathcal{D}_n$  liefert der Satz II.(4.2) die Charakterwerte  $\langle \lambda \rangle(\pi)$  falls  $\lambda = \pi$  oder  $\pi \notin \mathcal{O}_n$ . Es ist nun das Ziel, für  $\pi \in \mathcal{O}_n$ , welches einen Teil  $r$  besitzt, den Wert  $\langle \lambda \rangle(\pi)$  als Kombination von Charakterwerten  $\langle \lambda' \rangle(\pi')$  anzugeben, wobei  $\lambda'$  und  $\pi'$  Partitionen aus  $\mathcal{D}_{n-r}$  sind. Für diese

<sup>4</sup>Vgl. hierzu [JK81, Abschn. 2.4].

Rekursionsformel müssen wir zunächst Methoden beschreiben, die Partitionen von  $n$  um  $r$  zu verkleinern.

Sei eine Partition  $\lambda \in \mathcal{D}_n$  mit  $\ell(\lambda) =: l$  gegeben und  $r$  eine natürliche ungerade Zahl nicht größer als  $n$ . Wir definieren drei Arten, aus der Partition  $\lambda$  eine Partition  $\lambda' \in \mathcal{D}_{n-r}$  zu machen:

- (i) Falls es ein  $1 \leq i \leq l$  gibt, so dass  $\lambda_i = r$  ist, dann nehme für die neue Partition  $\lambda(i, r) := (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_l)$ . Wir definieren den Wert  $L(i) := l - i$ . In jedem Fall (auch wenn es keinen Teil der Partition mit Länge  $r$  gibt), definieren wir

$$I_0(\lambda, r) := \{i \mid \lambda_i = r\}.$$

Da  $\lambda \in \mathcal{D}_n$  ist, ist  $I_0(\lambda, r)$  leer oder einelementig.

- (ii) Wir setzen zunächst  $\lambda_{l+1} = 0$ . Wenn es nun ein  $i$  gibt, so dass  $\lambda_i - r \neq \lambda_j$  für alle  $j > i$  ist, also die Partition mit den (neu angeordneten) Teilen  $\lambda_1, \dots, (\lambda_i - r), \dots, \lambda_l$  immer noch eine Partition aus lauter verschiedenen Teilen (und Länge  $l$ ) ist, dann sei  $\lambda(i, r)$  diese so gewonnene Partition. Es sei

$$I_+(\lambda, r) := \{i \mid \lambda_j > \lambda_i - r > \lambda_{j+1} \text{ für ein } j \leq l\}.$$

Für ein  $i \in I_+(\lambda, r)$  merken wir uns das zugehörige  $j$  aus der Definition von  $I_+(\lambda, r)$  und definieren  $L(i) := j - i$ . Insbesondere ist nach dieser Definition  $\lambda_i > r$  für  $i \in I_+(\lambda, r)$  und damit sind  $I_+(\lambda, r)$  und  $I_0(\lambda, r)$  disjunkt.

- (iii) Schließlich werden für den Fall, dass es ein Paar  $i < j \leq l$  mit  $\lambda_i + \lambda_j = r$  gibt, beide Teile aus der Partition entfernt — auch diese Partition bezeichnen wir dann wieder mit  $\lambda(i, r)$ . Wir setzen

$$I_-(\lambda, r) := \{i \mid r - \lambda_i = \lambda_j \text{ für ein } j \text{ mit } i < j \leq l\}.$$

Auch hier wird sich das zugehörige  $j$  gemerkt und  $L(i) := j - i + \lambda_i$  gesetzt.

Wir erhalten also eine disjunkte Zerlegung einer Teilmenge der Zahlen zwischen 1 und  $l$ :

$$I(\lambda, r) = I_0(\lambda, r) \cup I_+(\lambda, r) \cup I_-(\lambda, r)$$

und für jedes  $i \in I(\lambda, r)$  eine strikte Partition von  $n - r$ . Diese wird, wie in (i)-(iii) festgelegt, mit  $\lambda(i, r)$  bezeichnet. Den Wert  $L(i)$  kann man auch durch die so genannte Beinlänge ersetzen. Zu jedem  $i$  ist diese Länge einem bestimmten Knoten in dem verschobenen Diagramm  $S(\lambda)$  von  $\lambda$  zugeordnet. Wir werden darauf nochmal im nächsten Abschnitt eingehen.

Wir sind nun in der Lage, den angekündigten Satz zu formulieren.

**(5.1) Theorem (Morris'sche Rekursionsformel, vgl. [HH92, Theorem 10.1])**

Sei  $r$  eine positive ganze Zahl und  $\pi \in \mathcal{O}_n$  eine Partition, welche mindestens einen Teil gleich  $r$  enthält. Es sei  $\pi' \in \mathcal{O}_{n-r}$  die Partition, welche durch Entfernen eines solchen Teils entsteht.

Dann gilt

$$\langle \lambda \rangle(\pi) = \sum_{i \in I(\lambda, r)} (-1)^{L(i)} 2^{m(i)} \langle \lambda(i, r) \rangle(\pi'), \quad (\text{II.3})$$

wobei

$$m(i) = \begin{cases} (\varepsilon(\lambda) + 1)/2, & \text{falls } i \in I_+(\lambda, r) \cup I_-(\lambda, r), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und  $\varepsilon(\lambda)$  das Signum der Partition  $\lambda$  wie in I.(4.1) bezeichnet. Weiter sei hier per Konvention  $\langle \rangle() := 1$ , wobei die leere Partition  $()$  als Partition ungerader Teile betrachtet wird (also insbesondere gerade ist).

Das folgende Beispiel dient der Verdeutlichung des vorgestellten Resultats.

### (5.2) Beispiel

Sei  $\lambda = (5, 3, 2, 1)$  und  $r = 3$ . Dann sind  $I_0(\lambda, 3) = \{2\}$ ,  $I_-(\lambda, 3) = \{3\}$  und  $I_+(\lambda, 3)$  ist leer. Somit gilt etwa für  $\pi = (5, 3, 3)$ :

$$\langle \lambda \rangle(\pi) = (-1)^2 \langle 5, 2, 1 \rangle(5, 3) + (-1)^3 \langle 5, 3 \rangle(5, 3).$$

Für  $\lambda^{(2)} := \lambda(2, 3) = (5, 2, 1)$  ist weiter  $I_-(\lambda^{(2)}, 3) = \{2\}$ . Die anderen beiden Mengen sind hier leer. Bei  $\lambda^{(3)} := \lambda(3, 3) = (5, 3)$  ist  $I_+(\lambda^{(3)}, 3) = \{1\}$  und  $I_0(\lambda^{(3)}, 3) = \{2\}$ . Man erhält also

$$\begin{aligned} \langle \lambda \rangle(\pi) &= ((-1)^3 \langle 5 \rangle(5)) - ((-1)^0 \cdot \langle 5 \rangle(5) + (-1)^1 \cdot 2 \cdot \langle 3, 2 \rangle(5)) \\ &= -2 \cdot \langle 5 \rangle(5) + 2 \langle 3, 2 \rangle(5). \end{aligned}$$

Ein letztes Mal Morris' Rekursionsformel anwenden liefert in beiden Fällen  $\langle 5 \rangle(5) = \langle \rangle() = \langle 3, 2 \rangle(5)$ , also

$$\langle \lambda \rangle(\pi) = -2 + 2 = 0.$$

Als nächstes legen wir noch einige Bezeichnungen fest, um die Branching-Rules zu formulieren. Die Branching-Rules geben Auskunft über die Einschränkungen der Spincharaktere von  $\tilde{S}_n$  auf  $\tilde{S}_{n-1}$  bzw. deren Induktion nach  $\tilde{S}_{n+1}$ .

Sei  $\lambda \in \mathcal{D}_n$ . Es bezeichne  $M(\lambda) \subseteq \mathcal{D}_{n-1}$  die Menge aller Partitionen, die aus  $\lambda$  durch Subtraktion von 1 von einem Teil  $\lambda_i$  von  $\lambda$  hervorgehen. Das heißt, für  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  und  $1 \leq i \leq l$  ist die Partition  $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_l)$  genau dann in  $M(\lambda)$ , falls  $\lambda_i - \lambda_{i+1} > 1$  ist — hierbei ist  $\lambda_{l+1} = 0$  zu setzen. Ist  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, 1)$ , dann bezeichnet  $\lambda^- = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1})$  und sei ebenfalls ein Element von  $M(\lambda)$ . Weiter bezeichne  $N(\lambda) \subseteq \mathcal{D}_{n+1}$  die Menge aller Partitionen, die aus  $\lambda$  entstehen, wenn man 1 zu einem Teil  $\lambda_i$  addiert. Das heißt, für  $1 \leq i \leq l$  ist  $\nu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i + 1, \dots, \lambda_l)$  genau dann in  $N(\lambda)$ , wenn  $\lambda_{i-1} - \lambda_i > 1$  ist — hierbei ist  $\lambda_0 = \infty$  zu setzen. Ist  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  und  $\lambda_l > 1$ , dann sei  $\lambda^+ = (\lambda_1, \dots, \lambda_l, 1)$  und sei kein Element von  $N(\lambda)$ . Des Weiteren sei

$$\langle \lambda \rangle^* = \begin{cases} \langle \lambda \rangle, & \text{falls } \varepsilon(\lambda) = 1, \\ \langle \lambda \rangle + \langle \lambda \rangle^a, & \text{falls } \varepsilon(\lambda) = -1. \end{cases}$$

Nun sind wir in der Lage, die Branching-Rules für die Spincharaktere von  $\tilde{S}_n$  zu formulieren. Wir bringen diesen Satz mit Beweis, da wir die Aussage explizit im vierten Kapitel benutzen werden.

**(5.3) Theorem (Branching-Rules, siehe [HH92, Theorem 10.2])**

Es sei  $\lambda$  eine strikte Partition von  $n$ . Mit obigen Bezeichnungen gilt

$$(B1) \quad \langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{S}_{n-1} = \delta_{1, \lambda_{\ell(\lambda)}} \langle \lambda^- \rangle + \sum_{\lambda^- \neq \mu \in M(\lambda)} \langle \mu \rangle^*, \quad \text{und}$$

$$(B2) \quad \langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{S}_{n+1} = (1 - \delta_{1, \lambda_{\ell(\lambda)}}) \langle \lambda^+ \rangle + \sum_{\mu \in N(\lambda)} \langle \mu \rangle^*.$$

Analoge Regeln gelten für den assoziierten Charakter  $\langle \lambda \rangle^a$ . In diesem Fall stehen auf der rechten Seite der Gleichung die assoziierten Charaktere  $\langle \lambda^- \rangle^a$  bzw.  $\langle \lambda^+ \rangle^a$ .

**Beweis.** Es sei  $g \in \tilde{S}_{n-1}$  vom Typ  $\beta \in \mathcal{P}_{n-1}$ . Wir werden die Formel in (B1) auf beiden Seiten für  $g$  auswerten und Übereinstimmung zeigen. Hierbei bezeichnen wir mit  $\beta \sqcup 1$  die Partition, welche durch Anhängen des Teils 1 an  $\beta$  entsteht. Man kann  $\tilde{S}_{n-1}$  gemäß II.(1.5) in  $\tilde{S}_n$  einbetten:

$$\tilde{S}_{n-1} \longrightarrow \tilde{S}_n, \quad g \mapsto (g, 1),$$

wobei  $(g, 1) \in \tilde{S}_{n-1} \times_z \tilde{S}_1$  vom Typ  $\beta \sqcup 1$  ist. Also hat man für den Charakterwert der Einschränkung

$$\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{S}_{n-1}(g) = \langle \lambda \rangle(g, 1).$$

Nun zu den Werten in (B1). Sei zunächst  $\beta \notin \mathcal{O}_{n-1}$ , d. h.  $\beta$  hat einen geraden Anteil. Falls  $\beta \sqcup 1$  von  $\lambda$  verschieden ist, liefert II.(4.2) (ii) bzw. (iii) den Wert 0 für die linke Seite von (B1). Ebenso sind die Summanden  $\langle \mu \rangle(g)$  auf der rechten Seite immer Null, außer es ist  $\mu = \beta$ . Dazu unterscheiden wir zwei Fälle: Ist  $\beta$  gerade,  $\mu$  also selbst-assoziiert, so ist  $\langle \mu \rangle(\beta) = 0$  wegen (iii) in II.(4.2). Im anderen Fall ist  $\langle \mu \rangle(\beta) = -\langle \mu \rangle^a(\beta)$  wegen (i) in II.(4.2) — in jedem Fall also  $\langle \mu \rangle^*(g) = 0$ .

Sei nun  $\lambda = \beta \sqcup 1$  und gerade und  $l = \ell(\lambda)$ . Auch  $\lambda^-$  ist gerade, denn es ist  $\sigma(\lambda^-) = (n-1) - (l-1) = n-l = \sigma(\lambda)$ . Also ist (B1) wegen (iii) in II.(4.2) erfüllt, da weder  $\beta$  noch  $\beta \sqcup 1$  in  $\mathcal{O}_n$  sind. Im Fall, dass  $\lambda = \beta \sqcup 1$  schließlich ungerade ist, liefert die zweimalige Anwendung von II.(4.2) (i)

$$\langle \lambda \rangle(g, 1) = \langle \lambda \rangle(\beta \sqcup 1) = i^{(n-l+1)/2} \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{l-1} \cdot 1}{2}} = \langle \lambda^- \rangle(\beta).$$

Ist  $\mu \in M(\lambda) \setminus \{\lambda^-\}$ , so ist  $\sigma(\mu) = n-1-l = \sigma(\lambda) + 1$  und  $\mu$  somit gerade. Folglich sind die restlichen Summanden auf der rechten Seite von (B1) gleich Null wegen (iii) in II.(4.2). Damit haben wir im Fall  $\beta \notin \mathcal{O}_{n-1}$  die Gültigkeit von (B1) gezeigt.

Wir nehmen nun an, dass  $\beta \in \mathcal{O}_{n-1}$  ist, und wenden Satz II.(5.1) mit  $r = 1$  und  $\pi = \beta \sqcup 1$  an. Wieder sei  $l = \ell(\lambda)$ . In Morris' Rekursionsformel ist für den Fall  $r = 1$  die Menge  $I_-(\lambda, 1)$  leer und

$$I_0(\lambda, 1) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \lambda_l > 1, \\ \{l\}, & \text{falls } \lambda_l = 1. \end{cases}$$

Im Fall  $I_0(\lambda, 1) = \{l\}$  ist  $L(l) = 0$  und  $\lambda(l, 1) = \lambda^-$ . Der zugehörige Summand in (II.3) ergibt also den Term  $\langle \lambda^- \rangle(\beta)$  in (B1). Die restlichen Summanden in (II.3) ergeben sich durch die Partitionen aus

$$M(\lambda) \setminus \{\lambda^-\} = \{\lambda(i, 1) \mid i \in I_+(\lambda, 1)\}.$$

Für jedes  $i \in I_+(\lambda, 1)$  hat man  $L(i) = 1 - 1 = 0$ , also ergibt sich auch hier für die entsprechenden Summanden das Vorzeichen ‘+’. Setzen wir  $\langle \mu \rangle = \lambda(i, 1)$ , dann erhalten wir

$$2^{m(i)} \langle \lambda(i, 1) \rangle(\beta) = 2^{m(i)} \langle \mu \rangle(\beta) = \left\{ \begin{array}{ll} \langle \mu \rangle(\beta), & \text{falls } \mu \text{ gerade} \\ 2 \langle \mu \rangle(\beta), & \text{falls } \mu \text{ ungerade} \end{array} \right\} = \langle \mu \rangle^*(\beta).$$

(In der unteren Zeile ist  $\langle \mu \rangle(\beta) = \langle \mu \rangle^a(\beta)$ , da  $\beta$  eine gerade Partition ist und assoziierte Charaktere den gleichen Wert auf diesen Klassen haben — vgl. II.(2.2). Man beachte, dass  $\lambda$  und  $\mu = \lambda(i, 1)$  für alle  $i \in I_+$  unterschiedliches Signum haben. Das erklärt den Vorfaktor 1 bzw. 2 in den geschweiften Klammern.)

Schließlich beweisen wir (B2) mit der Frobenius Reziprozität, siehe I.(2.1). Ist  $\langle \nu \rangle$  ein irreduzibler Charakter der  $\tilde{S}_{n+1}$  und  $\langle \lambda \rangle$  ein irreduzibler Charakter von  $\tilde{S}_n$ , so gilt

$$(\langle \nu \rangle, \langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{S}_{n+1}) = (\langle \nu \rangle \downarrow \tilde{S}_n, \langle \lambda \rangle).$$

Also sind die Konstituenten  $\langle \nu \rangle$  von  $\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{S}_{n+1}$  gerade die Charaktere zu strikten Partitionen, welche gleich  $\lambda^+$  oder aus  $N(\lambda)$  sind. Die Charaktere  $\langle \nu \rangle$  zu Partitionen aus  $N(\lambda)$  haben ein von  $\varepsilon(\lambda)$  verschiedenes Signum. Ist ein solches  $\nu$  also ungerade, so tritt der zugehörige Charakter mit seinem Assoziierten auf. Es gilt weiter, dass — sofern  $\lambda^+$  existiert —  $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(\lambda^+)$  ist. Die beiden Charaktere  $\lambda$  und  $\lambda^+$  sind also entweder beide selbst-assoziiert oder beide nicht selbst-assoziiert. Auf der rechten Seite von (B2) taucht deswegen  $\langle \lambda \rangle^+$  höchstens einmal auf.  $\square$

Bei der Anwendung der Branching-Rules stellt sich also das kombinatorische Problem, wie man die Partition  $\lambda$  um 1 verkleinern bzw. vergrößern kann. Wir wollen nochmal etwas genauer auf das entsprechende kombinatorische Problem bei der Anwendung von Morris’ Rekursionsformel eingehen.

## II.6 Einige kombinatorische Begriffe

Im Zusammenhang mit II.(5.1) haben wir die Größe  $L(i)$  eingeführt. Nun wollen wir den Begriffsapparat dazu bereitstellen, der eine alternative Berechnung des Vorzeichen  $(-1)^{L(i)}$  zulässt. Bei der Anwendung der Murnaghan-Nakayama-Formel in der linearen Darstellungstheorie entfernt man im Young-Diagramm  $[\lambda]$  (siehe I.(4.3)) der Partition  $\lambda$  so genannte „Randhaken“. Eine wichtige Rolle spielen dabei die Beinlängen dieser Haken.<sup>5</sup>

Von der Anwendung im Zusammenhang mit der Morris’schen Rekursionsformel abgesehen, werden einige der folgenden Begriffe auch bei der Littlewood-Richardson-Regel im nächsten Kapitel gebraucht.

### (6.1) Definition (verschobenes Diagramm)

Zu einer Partition  $\lambda \in \mathcal{D}_n$  sei

$$S(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i \leq \ell(\lambda), i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\} \quad (\text{II.4})$$

das zugehörige **verschobene Diagramm**.

<sup>5</sup>Vgl. hierzu z. B. [JK81, 2.4.7].



Ein verschobenes Diagramm ist also das zur Partition gehörige Young-Diagramm, wobei von oben nach unten jede Zeile um eine Position nach rechts eingerückt wird. Wir legen dazu einige Sprechweisen fest: Seien  $\lambda$  eine strikte Partition und  $S = S(\lambda)$  das zugehörige Diagramm. Ist  $(i, j) \in S(\lambda)$ , so sprechen wir auch von der **Position**  $(i, j)$  in  $S$ . Des Weiteren reden wir in diesem Fall von der  $i$ -ten **Zeile** und  $j$ -ten **Spalte** von  $S$ .

Nach I.(4.3) hatten wir uns schon ein Beispiel mit Young-Diagrammen angeschaut; wie schon dort visualisieren wir ein Diagramm durch eine matrixförmige Anordnung von „Knoten“. Das verschobene Diagramm zur Partition  $\lambda = (5, 3, 2, 1)$  ist nun

$$S(\lambda) = \begin{array}{cccccc} & & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times & \\ & & & & \times & \times & \\ & & & & & \times & \\ & & & & & & \times \end{array}$$

**(6.2) Definition (verschoben-symmetrisches Diagramm)**

Es sei  $\lambda$  wieder eine strikte Partition von  $n$ . Wir definieren das **verschoben-symmetrische Diagramm**  $Y'(\lambda)$  wie folgt: Das Diagramm  $Y'(\lambda)$  besteht aus den  $2n$  Knoten; neben den Knoten von  $S(\lambda)$  werden  $n$  neue hinzugefügt, nämlich

- (i)  $\lambda_1$  Knoten in einer neuen 0-ten Spalte, und
- (ii) weitere  $\lambda_i$  Knoten unter dem untersten Knoten von  $S(\lambda)$  in der  $(i - 1)$ -ten Spalte für  $2 \leq i \leq \ell$ .

Wir kennzeichnen die Knoten aus  $S(\lambda)$  wie gewohnt mit  $\times$  und die neu hinzugekommenen Knoten mit  $\circ$ .

Für die Partition  $\lambda = (5, 3, 2, 1)$  ist das zugehörige verschoben-symmetrisches Diagramm also

$$Y'(\lambda) = \begin{array}{cccccc} \circ & \times & \times & \times & \times & \times \\ \circ & \circ & \times & \times & \times & \\ \circ & \circ & \circ & \times & \times & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \times & \\ \circ & & & & & \end{array}$$

Nun kommen wir zu den Begriffen Arm-, Bein- und Hakenlänge.

**(6.3) Definition (Arm-, Bein- und Hakenlänge von Knoten)**

In einem (nicht-verschobenen) Young-Diagramm  $[\lambda]$  besteht ein **Haken** zu einem gegebenem Knoten  $(i, j) \in [\lambda]$  aus der Menge der Knoten rechts von dem Knoten  $(i, j)$  in der  $i$ -ten Zeile, dem Knoten  $(i, j)$  und den Knoten unterhalb von  $(i, j)$  in der  $j$ -ten Spalte. Als **Armlänge** bezeichnet man die Zahl  $\lambda_i - j$ , als **Beinlänge** die Zahl der Knoten unterhalb von  $(i, j)$ , also  $|\{k \mid \lambda_k \geq j\}| - i$ , und schließlich die **Hakenlänge** als die Anzahl aller Knoten im Haken, d. h. die Summe aus Bein- und Armlänge plus 1.

Mit Haken- bzw. Beinlänge eines verschobenen Diagramms  $S(\lambda)$  seien nun die entsprechenden Längen in dem zugehörigen verschoben-symmetrischem Diagramm  $Y'(\lambda)$  gemeint.

Für das Beispiel von oben ergeben sich somit folgende Haken- und Beinlängen (wir schreiben die Längen nun anstelle der  $\times$  ins Diagramm):

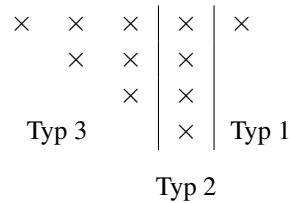


Zu guter Letzt unterteilen wir die Knoten im verschobenen Diagramm noch in 3 Typen.

**(6.4) Definition (Knotentyp)**

Sei  $\lambda$  eine strikte Partition von  $n$  der Länge  $l$  und sei  $S(\lambda)$  das zugehörige verschobene Diagramm. Wir bezeichnen die Knoten in der  $l$ -ten Spalte als vom **Typ 2**, die Knoten rechts von der  $l$ -ten Spalte als vom **Typ 1** und die übrigen Knoten als vom **Typ 3**.

Wir schauen nochmal auf das Beispiel zu  $\lambda = (5, 3, 2, 1)$ :

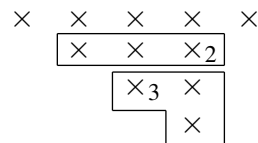


Wir können nun die Koeffizienten  $(-1)^{L(i)}$  in der Morris'schen Rekursionsformel auf eine alternative Weise angeben.

**(6.5) Theorem (siehe [HH92, Proposition 10.3] und vgl. II.(5.1))**

Zu jedem  $i \in I(\lambda, r)$  gibt es genau einen Knoten  $\times_i$  in der  $i$ -ten Zeile von  $S(\lambda)$ , so dass  $\times_i$  Hakenlänge  $r$  hat. Dieser Knoten ist vom Typ 1, 2 oder 3, je nachdem ob  $i$  aus  $I_+(\lambda, r)$ ,  $I_0(\lambda, r)$  bzw.  $I_-(\lambda, r)$  ist. Das Vorzeichen des entsprechenden Summanden in (II.3) ist dann  $(-1)^s$ , wobei jetzt  $s$  die Beinlänge von  $\times_i$  (in  $Y'(\lambda)$ ) bezeichnet.

Wir sagen noch für jedes  $i \in I(\lambda, r)$ , was ein **r-Balken** in  $S(\lambda)$  ist. Für  $i$  aus  $I_+(\lambda, r)$  und  $I_0(\lambda, r)$  sind das die  $r$  Knoten an den Positionen  $\lambda_i - r, \dots, \lambda_i$  in der  $i$ -ten Zeile. Für  $i$  aus  $I_-(\lambda, r)$  sind das alle Knoten aus der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile, zusammen  $r$  Stück. Schauen wir uns ein letztes Mal unser Beispiel an. Sei wieder  $r = 3$ ; dann ist  $I(\lambda, r) = \{2, 3\}$  und  $I_+(\lambda, r)$  ist leer. Wir markieren die Knoten  $\times_i$  im Diagramm und zeichnen die zugehörigen Balken ein. Die Knoten, die nach dem Entfernen der jeweiligen Balken übrig bleiben, bilden dann die Partition  $\lambda(i, 3)$ .



Also hat man hier, wie auch schon in II.(5.2) gesehen, folgende Zusammensetzung des Charakterwerts von  $\langle 5, 3, 2, 1 \rangle$  auf  $(5, 3, 3)$ :

$$\langle 5, 3, 2, 1 \rangle(5, 3, 3) = (-1)^2 \langle 5, 2, 1 \rangle(5, 3) + (-1)^1 \langle 5, 3 \rangle(5, 3).$$



## Kapitel III

# Induzierte Spincharaktere von verschränkten zentralen Produkten

Im letzten Kapitel wurden Untergruppen der Überlagerungsgruppen der Form  $\tilde{S}_{n-k} \times_z \tilde{S}_k$  beschrieben. Zusammen mit Abschnitt II.2, wo wir die Spincharaktere der Überlagerungsgruppen  $\tilde{S}_n$  und  $\tilde{A}_n$  angegeben haben, liefert II.1 die irreduziblen Spincharaktere dieser verschränkten Produkte  $\tilde{S}_{n-k} \times_z \tilde{S}_k$ . Wir beantworten im vierten Kapitel die Frage, ob es imprimitive Charaktere von Gruppen  $\tilde{S}_n$  oder  $\tilde{A}_n$  gibt, welche induzierte Charaktere von Spincharakteren von Untergruppen  $\tilde{S}_{n-k} \times_z \tilde{S}_k$  oder  $\tilde{A}_{n-k} \times_z \tilde{A}_k$  sind. Unser wichtigstes Hilfsmittel bei der Beantwortung dieser Frage ist die Littlewood-Richardson-Regel bzw. deren Anwendung in Form von Satz III.(2.4). Dieser Satz charakterisiert die projektiven äußeren Produkte  $(\langle \mu \rangle \times_z \langle \nu \rangle) \uparrow \tilde{S}_n$  mit  $\mu \in D_k$  und  $\nu \in D_{n-k}$ , die vielfachheitsfrei sind. Ist also  $\langle \lambda \rangle \in \text{Irr}_-(\tilde{S}_n)$  Konstituent eines solchen Charakters (wie in III.(2.4)), dann ist dessen Vielfachheit genau 1. Erst im letzten Kapitel werden wir die projektiven äußeren Produkte bestimmen, welche genau einen Konstituenten besitzen.

### III.1 Die Littlewood-Richardson-Regel für Spincharaktere

In diesem Abschnitt werden wir die Littlewood-Richardson-Regel für Spincharaktere angeben. Diese macht eine Aussage über die irreduziblen Konstituenten in  $(\langle \mu \rangle \otimes_z \langle \nu \rangle) \uparrow \tilde{S}_n$ , wobei  $\langle \mu \rangle$  und  $\langle \nu \rangle$  irreduzible Spincharaktere von  $\tilde{S}_k$  bzw.  $\tilde{S}_{n-k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , sind. Die analoge Regel für die linearen Darstellungen der symmetrischen Gruppe ist eine kombinatorische Aussage über gewisse Young-Tableaus.<sup>1</sup> Wir knüpfen an II.(6.1) an, wo wir bereits verschobene Diagramme definiert haben, und werden die entsprechenden kombinatorischen Objekte für die Littlewood-Richardson-Regel der projektiven Darstellungen der symmetrischen Gruppen definieren.

#### (1.1) Definition (verschobenes (Schief-)Tableau, Inhalt)

Es sei  $A' = \{1' < 1 < 2' < 2 < \dots\}$  ein **geordnetes Alphabet**. Die Buchstaben  $1', 2', \dots$  werden als **markiert** bezeichnet. Des Weiteren verweist  $|a|$  auf die nicht-markierte Version des Buchstaben  $a \in A'$  und  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  sei das Alphabet der nicht-markierten Buchstaben aus  $A'$ .

---

<sup>1</sup>Siehe dazu [JK81, 2.8.13].

Sei  $S(\lambda)$  das verschobene Diagramm der Partition  $\lambda$ . Ein **verschobenes  $\lambda$ -Tableau**  $T$  ist eine Abbildung  $T : S(\lambda) \longrightarrow A'$ , so dass

- (i) die Zeilen- und Spalteneinträge von links nach rechts und von oben nach unten nicht abnehmend sind, und
- (ii) zusätzlich gilt, dass jedes  $k \in \{1, 2, \dots\}$  höchstens einmal in jeder Spalte von  $T$  und jedes  $k' \in \{1', 2', \dots\}$  höchstens einmal in jeder Zeile von  $T$  vorkommt.

Die Bedingung (i) besagt, dass

$$\begin{aligned} T(i, j) &\leq T(i+1, j), \quad \text{und} \\ T(i, j) &\leq T(i, j+1) \end{aligned}$$

für alle  $i, j$  mit  $(i, j)$  und  $(i+1, j)$  bzw.  $(i, j+1)$  in  $S(\lambda)$  ist.

Für  $k \in \{1, 2, \dots\}$  bezeichne  $c_k$  die Anzahl der Stellen  $(i, j)$  in  $S(\lambda)$  mit  $|T(i, j)| = k$ . Dann sagt man, das Tableau  $T$  hat **Inhalt**  $(c_1, c_2, \dots)$ .

Sind  $\lambda$  und  $\mu$  Partitionen mit  $S(\mu) \subseteq S(\lambda)$ , dann definieren wir das **verschobene Schief-Diagramm**  $S(\lambda/\mu)$  als die Menge  $S(\lambda) \setminus S(\mu)$  und sagen, dass das Diagramm die Form  $\lambda/\mu$  habe. Analog bezeichnen wir in diesem Fall eine Abbildung  $T : S(\lambda/\mu) \longrightarrow A'$  mit (i) und (ii), als **verschobenes Schief-Tableau** der Form  $\lambda/\mu$ .

Wir übernehmen die Sprechweisen, die wir nach Definition II.(6.1) festgelegt haben, auch für Schief-Diagramme. Zusätzlich legen wir eine weitere Sprechweise fest. Für ein Tableau  $T : S(\lambda/\mu) \longrightarrow A'$  schreiben wir auch kurz  $T(\lambda/\mu)$  und werden den Wert  $T(i, j)$  als **Eintrag** des Tableaus an der Position  $(i, j)$  bezeichnen. Zu einem  $a \in A'$  bezeichne  $a^*$  die jeweils anders markierte Version von  $a$ . Ist  $T(i_0, j_0)$  ein Eintrag im Tableau, so dass  $T'(i_0, j_0)$  mit

$$T'(i, j) = \begin{cases} (T(i_0, j_0))^*, & \text{für } (i, j) = (i_0, j_0), \text{ und} \\ T(i, j) & \text{sonst,} \end{cases}$$

auch ein Tableau ist, dann nennen wir die Position  $(i_0, j_0)$  **frei**.

### (1.2) Definition/Bezeichnung (Wort, Gitter-Eigenschaft)

Zu einem verschobenem (Schief-)Tableau  $T$  definieren wir das zugehörige **Wort**

$$w = w(T) = w_1 w_2 \dots,$$

wobei  $w_i \in A'$  für alle  $i$  ist, indem wir die Zeilen von  $T$  von links nach rechts und von unten nach oben lesen. Durch Weglassen der Markierungen in einem Wort  $w$  erhalten wir das Wort  $|w|$ . Zu einem Wort  $w = w_1 w_2 \dots w_k$ ,  $w_l \in A'$  für alle  $1 \leq l \leq k$ , definieren wir weiter:

$$\begin{aligned} m_i(j) &= \text{Vielfachheit der } i \text{ unter } w_{k-j+1}, \dots, w_k, & \text{für } 0 \leq j \leq k, \\ m_i(k+j) &= m_i(k) + \text{Vielfachheit der } i' \text{ unter } w_1, \dots, w_j, & \text{für } 0 < j \leq k. \end{aligned}$$

Die Werte dieser **Wort-Statistik**  $m_i$  erhält man ebenfalls, indem man die Zeilen des Tableaus zunächst von oben nach unten und von rechts nach links liest, und dabei die Buchstaben  $i$

zählt, und dann von unten nach oben und von links nach rechts liest, und dabei die Buchstaben  $i'$  zählt. (Man setzt  $m_i$  zwischen diesen beiden Durchgängen nicht auf 0.) Wir sagen, das Wort  $w$  erfüllt die **Gitter-Eigenschaft**, falls immer wenn  $m_i(j) = m_{i-1}(j)$  ist,

$$\begin{aligned} w_{k-j} &\neq i, i', & \text{falls } 0 \leq j < k, \text{ und} \\ w_{j-k+1} &\neq i-1, i', & \text{falls } k \leq j < 2k \end{aligned}$$

gilt. (Man beachte, dass  $w_{k-j}$  bzw.  $w_{j-k+1}$  der jeweils nächste Buchstabe in  $w$  ist, den man für die Statistik  $m.(\cdot)$  betrachtet.) Insbesondere ist  $m_i(0) = 0$  für alle  $i$  und somit ist  $w_k = 1$  oder  $1'$  für ein Wort, welches die Gitter-Eigenschaft erfüllt.

Wir interessieren uns für eine Klasse von (Schief-)Tableaus, welche eine noch ein wenig schärfere Eigenschaft als die Gitter-Eigenschaft erfüllen.

### (1.3) Bezeichnung (Tableau-Eigenschaft TE)

Seien  $\mu, \nu$  und  $\lambda$  strikte Partitionen mit  $S(\mu) \subseteq S(\lambda)$ . Die Anzahl der verschobenen Schief-Tableaus  $T$  der Form  $\lambda/\mu$  mit Inhalt  $\nu$ , so dass

- (i) das Tableau-Wort  $w = w(T)$  die Gitter-Eigenschaft erfüllt, und
- (ii) für alle  $a \in A$  das in  $w$  am weitesten links stehende Element aus  $\{a', a\}$  gleich  $a$  ist,

bezeichnen wir mit  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu)$ . Wir sagen, dass solche Tableaus **TE** erfüllen.

Wir halten einige wichtige Eigenschaften der Koeffizienten  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu)$  fest. Diese helfen in den folgenden Beweisen die Anzahl der Tableaus, welche TE erfüllen, zu bestimmen.

### (1.4) Bemerkung (Die Koeffizienten $\text{st}(\lambda; \mu, \nu)$ , vgl. [HH92, Kapitel 14])

Es seien  $\lambda, \mu$  und  $\nu$  strikte Partitionen. Dann gilt:

- (i) Ist  $\ell(\mu) + \ell(\nu) < \ell(\lambda)$ , so ist  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu) = 0$ . Offensichtlich ist  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu)$  auch dann gleich 0, wenn  $|\mu| + |\nu| \neq |\lambda|$  ist.
- (ii) Es gilt  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu) = \text{st}(\lambda; \nu, \mu)$ .

Insbesondere die Aussage (ii) der Bemerkung ist zunächst überhaupt nicht offensichtlich. Für den Beweis benötigt man den Zusammenhang zwischen Spincharakteren, verschobenen (Schief-)Tableaus und gewissen symmetrischen Polynomen. Wir belassen es hier bei den entsprechenden Literaturverweisen; siehe z. B. [Mac79] für eine ausführliche Behandlung dieser Thematik.

Die nächste Bemerkung ist eine direkte Folgerung aus der Definition von verschobenen Tableaus.

### (1.5) Bemerkung (Diagonalen in verschobenen Tableaus)

Seien  $\lambda$  und  $\mu$  strikte Partitionen mit  $S(\mu) \subseteq S(\lambda)$ , wobei  $\mu$  auch die leere Partition sein kann, und  $T : S(\lambda/\mu) \rightarrow A'$  ein zugehöriges verschobenes (Schief-)Tableau. Dann bilden die nicht-markierten Versionen der Einträge auf den Diagonalen streng monoton zunehmende Folgen, d. h. es ist

$$|T(i, j)| < |T(i+1, j+1)|$$

für alle  $i, j$  mit  $(i, j)$  und  $(i+1, j+1)$  in  $S(\lambda/\mu)$ . (Diese Diagonalrichtung nennen wir auch **Süd-Ost-Richtung** in  $T$ .)

**Beweis.** Es seien  $i, j$  mit  $(i, j)$  und  $(i+1, j+1)$  in  $S(\lambda/\mu)$  und  $|T(i, j)| = k$  für ein  $k \in A$ . Da in einer Zeile nur höchstens eine markierte Version von  $k$  und in einer Spalte höchstens eine unmarkierte Version eines Buchstaben aus  $A'$  vorkommen kann, ist  $|T(i+1, j+1)| \geq k+1$ . (Man beachte, dass immer wenn  $(i+1, j+1) \in S(\lambda/\mu)$  ist, auch  $(i, j+1)$  in  $S(\lambda/\mu)$  liegt, da  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$  ist.)  $\square$

Wir machen eine weitere Feststellung die Einträge eines Tableaus betreffend: Es sei  $T$  ein Schief-Tableau das TE erfüllt. Sei weiter  $i \in \mathbb{N}$  mit  $T(i, i) = a$  für ein  $a \in A'$ , so dass dies das erste Auftreten von  $a$  oder  $a^*$  auf der Hauptdiagonalen ist, wenn man  $T$  von unten nach oben und die Zeilen von links nach rechts liest. Sei weiter  $w = w(T)$  das zu  $T$  gehörige Wort. Dann ist dieses  $a$  auch das am weitesten links stehende  $a$  oder  $a^*$  in  $w$ . (Links unterhalb der Diagonalen sind keine Einträge und in Süd-Ost-Richtung nehmen die Einträge streng monoton zu.) Da das Tableau TE erfüllt, ist  $a$  also nicht-markiert.

Es folgt eine weitere wichtige Aussage über die Einträge in gewissen Tableaus.

**(1.6) Lemma**

Es seien  $\lambda$  und  $\mu$  strikte Partitionen mit  $S(\mu) \subseteq S(\lambda)$  und  $\mathbf{v} = (r, r-1, \dots, 1)$  für ein  $r \in \mathbb{N}$ . Ist  $T$  ein Tableau der Form  $\lambda/\mu$  und mit Inhalt  $\mathbf{v}$ , das TE erfüllt, dann sind alle Einträge in  $T$  nicht-markiert.

**Beweis.** Angenommen, es gibt eine markierte Position in  $T$ . Sei  $i \leq r$  der größte Buchstabe, der in  $T$  markiert ist. Insbesondere ist  $i \neq r$ , denn dieser muß unmarkiert sein, da  $T$  TE erfüllt. Sei  $w$  das zugehörige Tableau-Wort. Wir betrachten die Werte der Statistik  $m_i(j)$ : Nachdem man das Wort einmal von rechts nach links gelesen hat, ist

$$m_i\left(\frac{r(r+1)}{2}\right) \leq r-i = m_{i+1}\left(\frac{r(r+1)}{2}\right).$$

Beim anschließenden Lesen von  $w$  von links nach rechts ist das erste Auftreten von  $i$  oder  $i'$  wegen III.(1.3)(ii) unmarkiert, da das Tableau TE erfüllt. Das widerspricht aber der Gitter-Eigenschaft, also gibt es keinen markierten Eintrag in  $T$ .  $\square$

Für zwei Partitionen  $\mu$  und  $\mathbf{v}$  bezeichne  $\mu \cup \mathbf{v}$  die Partition, welche aus allen Teilen von  $\mu$  und  $\mathbf{v}$  besteht. Weiter definieren wir für eine (beliebige) Partition  $\lambda$

$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} 1, & \text{falls } \lambda \text{ gerade,} \\ \sqrt{2}, & \text{falls } \lambda \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Falls  $\mu \in \mathcal{D}_k$  und  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}_{n-k}$  ist, dann bilden wir zunächst das **reduzierte Clifford-Produkt** von Spincharakteren,  $\langle \mu \rangle \otimes_z \langle \mathbf{v} \rangle$  aus II.(2.10). Das **projektive äußere Produkt** dieser Charaktere definieren wir dann als

$$\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \mathbf{v} \rangle = (\langle \mu \rangle \otimes_z \langle \mathbf{v} \rangle) \uparrow \tilde{S}_n$$

Nun können wir die verschobene Littlewood-Richardson-Regel formulieren.



**(1.7) Theorem (Littlewood-Richardson-Regel für verschobene Tableaus)**

(siehe [Ste89, Theoreme 8.1 und 8.3])

Es seien  $\mu \in \mathcal{D}_k$ ,  $\nu \in \mathcal{D}_{n-k}$  und  $\lambda \in \mathcal{D}_n$ . Dann gilt

$$(\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \langle \lambda \rangle) = \frac{1}{\varepsilon_\lambda \varepsilon_{\mu \cup \nu}} 2^{(\ell(\mu) + \ell(\nu) - \ell(\lambda))/2} \text{st}(\lambda; \mu, \nu), \quad (\text{III.1})$$

es sei denn  $\lambda$  ist ungerade und gleich  $\mu \cup \nu$ . In diesem Fall ist die Vielfachheit von  $\langle \lambda \rangle$  gleich 0 oder 1, je nach Wahl der Assoziierten.

## III.2 Vielfachheitsfreie projektive äußere Produkte von Spincharakteren

Durch Satz III.(1.7) sind wir nun in der Lage, alle Konstituenten  $\langle \lambda \rangle \in \text{Irr}_-(\tilde{S}_n)$  in dem projektiven äußerem Produkt  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  zu bestimmen.

Es werden weitere Notationen eingeführt, welche die Formen einiger Partitionen betreffen. Wir sagen, eine Partition ist eine **Treppe**, falls sie von der Form  $(k, k-1, \dots, 2, 1)$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  ist. Mit **breiter Treppe** ist eine Partition der Form  $(k+r, k-1+r, \dots, 2+r, 1+r)$  für irgendwelche  $k, r \in \mathbb{N}$  gemeint. Eine **Hakentreppe** ist eine Vereinigung von Treppe und breiter Treppe (wobei auch eine davon leer sein kann). Eine **Fast-Treppe** ist eine Treppe mit einer hinzugefügten Zeile oder Spalte, d. h. sie ist von der Form  $(m, k, k-1, \dots, 2, 1)$  mit  $m > k+1$ , oder  $(r, r-1, \dots, k+2, k, k-1, \dots, 2, 1)$ ; (hierbei ist auch  $k=0$  möglich, d. h.  $(m)$  und  $(r, r-1, \dots, 3, 2)$  sind auch Fast-Treppen). Fast-Treppen sind also spezielle Hakentreppen. Es folgt ein Satz von C. Bessenrodt.

**(2.1) Theorem (Abzählen von Tableaus die TE erfüllen, vgl. [Bes02])**

Es seien  $\mu$  und  $\nu$  strikte Partitionen. Dann ist  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu) \leq 1$  für alle  $\lambda$  genau in einem der folgenden Fälle:

- (i) Es ist  $\mu$  oder  $\nu$  gleich  $(1)$ .
- (ii) Eine der Partitionen  $\mu$  oder  $\nu$  ist eine Hakentreppe und die andere ist  $(2, 1)$ .
- (iii) Eine der Partitionen  $\mu$  oder  $\nu$  ist eine Treppe und die andere ist von der Form  $(k+1, k)$  für  $k \geq 2$  oder  $(k, k-1, \dots, 3)$  für  $k \geq 5$ .
- (iv) Eine der beiden Partitionen  $\mu$  oder  $\nu$  ist eine breite Treppe und die andere ist  $(3, 2, 1)$ .
- (v) Beide Partitionen  $\mu$  und  $\nu$  sind Treppen.
- (vi) Eine der Partitionen  $\mu$  oder  $\nu$  ist eine Fast-Treppe und die andere ist eine Treppe.

Bevor wir nun den Satz beweisen, geben wir noch zwei Lemmata an.

**(2.2) Lemma**

Es seien  $\mu$  und  $\nu$  strikte Partitionen und  $r \leq \ell(\mu) + 1$ . Dann gilt für alle  $\lambda$

$$\text{st}(\lambda; \mu, \nu) \leq \text{st}(\lambda + 1^r; \mu + 1^r, \nu),$$

wobei  $\lambda + 1^r$  die Partition ist, welche aus  $\lambda$  hervorgeht, indem man zu den ersten  $r$  Teilen 1 addiert (inklusive dem Teil 0, falls  $r = \ell(\lambda) + 1$ ); entsprechendes gilt für  $\mu + 1^r$ .

**Beweis.** Nach III.(1.3) ist  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu)$  die Anzahl der verschobenen Schief-Tableaus  $T$  der Form  $\lambda/\mu$  mit Inhalt  $\nu$ , welche TE erfüllen. Sei nun  $T$  ein solches Tableau. Sei weiter  $T'$  die „Anordnung“ der Einträge aus  $T$  von der Form  $(\lambda + 1^r)/(\mu + 1^r)$ , d. h.  $T'$  geht aus  $T$  durch Verschiebung der ersten  $r$  Zeilen um Eins nach rechts hervor. Insbesondere hat  $T'$  den gleichen Inhalt wie  $T$ , nämlich  $\nu$ . Wir zeigen, dass  $T'$  ein Tableau ist. Zu Bedingung (i) aus III.(1.1): Natürlich ist  $T'(i, j) \leq T'(i, j + 1)$  erfüllt, da alle Zeilen die gleichen Einträge aus  $A'$  in gleicher Reihenfolge wie in  $T$  enthalten. Des Weiteren ist für  $i \leq r - 1$

$$T'(i, j) = T(i, j - 1) \leq T(i + 1, j - 1) = T'(i + 1, j),$$

und für  $i > r$

$$T'(i, j) = T(i, j) \leq T(i + 1, j) = T'(i + 1, j).$$

Schließlich ist

$$T'(r, j) = T(r, j - 1) \leq T(r, j) \leq T(r + 1, j) = T'(r + 1, j),$$

da die Bedingung für  $T$  erfüllt ist, und somit ist  $T'$  ein Tableau. Offensichtlich ist  $w(T) = w(T')$ , also die Behauptung bewiesen.  $\square$

**(2.3) Lemma**

Für strikte Partitionen  $\mu$  und  $\nu$  gilt

$$\text{st}(\lambda; \mu, \nu) \leq \text{st}(\tilde{\lambda}; \mu \cup \{\mu_1 + 1\}, \nu),$$

wobei  $\mu \cup \{\mu_1 + 1\}$  die Partition der Teile von  $\mu$  und dem zusätzlichen Teil  $\mu_1 + 1$  bezeichnet. Die Partition  $\tilde{\lambda}$  hängt dabei in folgender Weise von  $\lambda$  ab (wir nehmen  $S(\mu) \subseteq S(\lambda)$  an):

- (a) Ist  $\lambda_1 = \mu_1$ , so ist  $\tilde{\lambda} = \lambda \cup \{\mu_1 + 1\}$  zu setzen.
- (b) Ist  $\lambda_1 > \mu_1$ , dann definiere  $r_0 = \max\{i \mid \lambda_i > \mu_1 - i + 1\}$  und setze

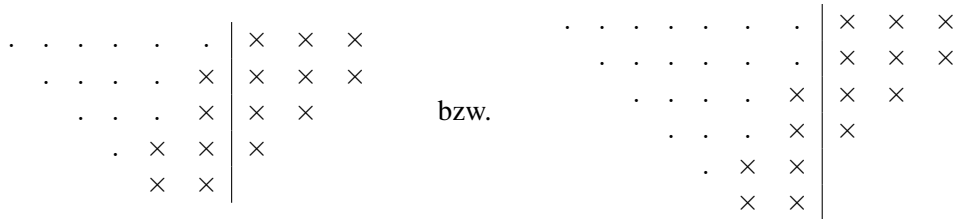
$$\tilde{\lambda} = (\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_{r_0} + 1, \mu_1 + 1 - r_0, \lambda_{r_0+1}, \lambda_{r_0+2}, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}).$$

**Beweis.** Es sei  $T = T(\lambda/\mu)$  ein Tableau, das TE erfüllt. Weiter sei  $T' = T'(\tilde{\lambda}/(\mu \cup \{\mu_1 + 1\}))$  dadurch definiert, dass man die Einträge von  $T$  in der entsprechenden Weise „verschiebt“. Im Fall (a) ist die Behauptung klar, da die Tableaus  $T$  und  $T'$  bis auf eine Indexverschiebung in der Zeilennummerierung identisch sind.

Bevor wir zum Beweis von Teil (b) kommen betrachten wir ein Beispiel. Es seien

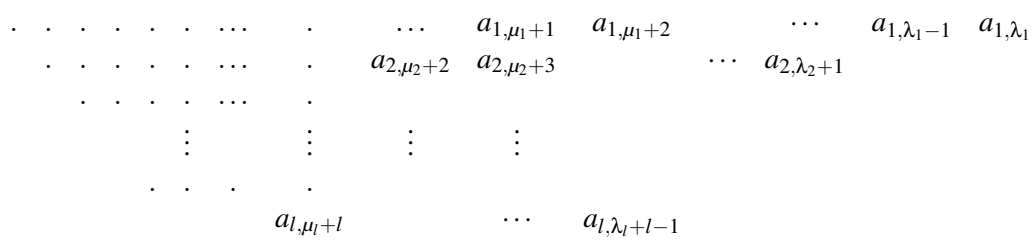
$$\lambda = (9, 8, 6, 4, 2) \quad \text{und} \quad \mu = (6, 4, 3, 1).$$

Dann ist  $\tilde{\mu} = \mu \cup \{\mu_1 + 1\} = (7, 6, 5, 3, 2, 1)$  und  $r_0 = \max\{i \mid \lambda_i > 7 - i\} = 4$ . Also ergibt sich  $\tilde{\lambda} = (10, 9, 7, 5, 3, 2)$ . Die zugehörigen verschobenen Schief-Diagramme der Form  $\lambda/\mu$  bzw.  $\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}$  sind



Die Knoten im Diagramm der Form  $\lambda/\mu$ , welche rechts von  $|$  stehen, „rücken im Diagramm der Form  $\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}$  eine Zeile nach oben“. Im ersten Diagramm markiert  $|$  die Trennlinie zwischen der  $\mu_1$ -ten und  $(\mu_1 + 1)$ -ten Spalte. Im zweiten Diagramm markiert  $|$  die Trennlinie zwischen der  $(\mu_1 + 1)$ -ten und  $(\mu_1 + 2)$ -ten Spalte. Im ersten Diagramm stehen in der ersten und im zweiten Diagramm in den ersten beiden Zeilen keine Einträge links von  $|$ . Des Weiteren stehen im ersten Diagramm unterhalb der  $r_0$ -ten Zeile keine Einträge im rechten Teil und  $r_0$  ist minimal mit dieser Eigenschaft. Das ist gleichbedeutend mit der Bedingung  $r_0 = \max\{i \mid \lambda_i > \mu_1 - i + 1\}$ . Das Gleiche gilt für das verschobene Diagramm der Form  $\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}$ .

Wir beweisen (b): Seien  $\tilde{\lambda}$  und  $r_0$  wie im Lemma und  $l := \ell(\lambda)$ . Da  $S(\mu) \subseteq S(\lambda)$  ist, ist  $\mu_i \leq \lambda_i$  für alle  $1 \leq i \leq \ell(\mu)$ . Wir setzen  $\mu_i := 0$  für alle  $\ell(\mu) < i \leq l$ . Das Schief-Diagramm der Form  $\lambda/\mu$  ist  $S := S(\lambda/\mu) = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq l, \mu_i + i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\}$ . Ist nun  $T = T(\lambda/\mu)$  ein Tableau, das TE erfüllt, dann definieren wir  $a_{i,j} := T(i, j)$  für alle  $(i, j) \in S(\lambda/\mu)$ . Das folgende Schaubild dient zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts:



Wir betrachten das zu  $T$  gehörige Wort; zur Erinnerung: man liest die Zeilen des Tableaus von unten nach oben und von links nach rechts. Das Tableau-Wort ist

$$w = a_{l,\mu_l+1} a_{l,\mu_l+1+l} \dots a_{l,\lambda_l+l} a_{l-1,\mu_{l-1}+l-1} \dots a_{l-1,\lambda_{l-1}+l-2} \dots a_{1,\mu_1+1} \dots a_{1,\lambda_1}.$$

Für den späteren Gebrauch bezeichnen wir mit  $B$  den maximalen Wert unter allen nicht-markierten Versionen der Buchstaben  $a_{i,j}$ , d. h. es ist  $|a_{i,j}| \leq B$  für alle  $i, j$ . Das verschobene

Schief-Diagramm der Form  $\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}$  mit  $\tilde{\mu} := \mu \cup \{\mu_1 + 1\}$  ist die folgende Menge:

$$S' := S(\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}) = \{(i, j) \mid \begin{aligned} &\mu_1 + 2 \leq j \leq \lambda_1 + 1 \text{ für } i = 1, \\ &\mu_{i-1} + i \leq j \leq \lambda_i + i \text{ für } 2 \leq i \leq r_0, \\ &\mu_{r_0} + r_0 + 1 \leq j \leq \mu_1 \text{ für } i = r_0 + 1, \\ &\mu_{i-1} + i \leq j \leq \lambda_{i-1} + i - 1 \text{ für } r_0 + 2 \leq i \leq l + 1 \end{aligned}\}$$

Wir definieren nun eine Abbildung  $T' : S' \longrightarrow A'$  mit den Werten  $a_{i,j}$  des Tableaus  $T$  wie folgt:

$$T'(i, j) := \begin{cases} a_{i,j-1}, & \text{falls } 1 \leq i \leq r_0, \mu_1 + 2 \leq j \leq \lambda_i + i, \\ a_{i-1,j-1}, & \text{falls } 3 \leq i \leq l + 1, \mu_{i-1} + i \leq j \leq \mu_1 + 1. \end{cases}$$

Hierbei sei  $a_{s,t} = 0$ , falls  $(s, t) \notin S(\lambda/\mu)$  — diese Werte werden im Folgenden beim Aufstellen der Wort-Statistiken nicht beachtet. Man sieht leicht, dass  $T'$  ein Tableau ist: Die Spalteneinträge sind offensichtlich von oben nach unten nicht zunehmend, denn sie sind genauso wie in  $T$  angeordnet. Der Teil rechts von der Spalte  $\mu_1 + 1$  ist im Vergleich zur Anordnung in  $T$  „um eine Zeile nach oben verschoben“. Folglich sind die Zeileneinträge in  $T'$  von links nach rechts nicht abnehmend, denn die Einträge in den Spalten rechts der  $(\mu_1 + 1)$ -ten Spalte, die zuvor eine Zeile tiefer standen, sind echt größer als die Einträge in den Spalten links davon — siehe Bemerkung III.(1.5). Insbesondere kommt somit auch in  $T'$  jedes  $k' \in \{1', 2', 3', \dots\}$  höchstens einmal in einer Zeile vor. Im Folgenden bezeichnen wir in dieser Situation die Spalten bis einschließlich der Spalte  $\mu_1$  in  $T$  als **linken Teil (von  $T$ )** und die Spalten ab der Spalte  $\mu_1 + 1$  als **rechten Teil (von  $T$ )**.

Um zu überprüfen, ob das Tableau  $T'$  TE erfüllt, führen wir einige Notationen ein:

$$d_i = \begin{cases} (\lambda_i + i - 1) - \mu_1, & \text{für alle } 1 \leq i \leq r_0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$e_i = \begin{cases} \mu_1 - (\mu_i + i) + 1, & \text{für } 1 \leq i \leq r_0, \\ \lambda_i - \mu_i, & \text{für } r_0 < i \leq l, \\ 0, & \text{für } i = 0, \end{cases}$$

$$D_k = \sum_{i=1}^k d_i + e_{i-1},$$

$$E_k = \sum_{i=1}^k d_i + e_i.$$

Man beachte, dass im linken Teil der ersten Zeile von  $T$  keine Einträge stehen. Die  $d_i$  bezeichnen also die Anzahl der Einträge im rechten Teil der  $i$ -ten Zeile von  $T$ . Die  $e_i$  bezeichnen entsprechend die Anzahl der Einträge im linken Teil der  $i$ -ten Zeile von  $T$  (bzw. die Anzahl der Einträge im linken Teil der  $(i + 1)$ -ten Zeile in  $T'$ ). Insbesondere ist  $E_l = |\lambda| - |\mu|$ ,  $e_1 = 0$  und  $D_{k-1} \leq E_{k-1} \leq D_k$ . Für  $k > r_0$  ist  $E_{k-1} = D_k$ , da ab der  $(r_0 + 1)$ -ten Zeile in  $T$  im rechten Teil keine Einträge stehen; das ist gleichbedeutend mit  $d_i = 0$  für  $i > r_0$ . Es seien  $w$  bzw.  $w'$  die

Tableau-Wörter von  $T$  bzw.  $T'$  und  $m$  bzw.  $m'$  die zugehörigen Wort-Statistiken. Wir werden die Wort-Statistik  $m'$  aufstellen, indem wir das Tableau  $T$  in etwas abgeänderter Weise lesen: Wir vertauschen beim Lesen von oben nach unten und von links nach rechts den linken Teil der  $k$ -ten Zeile mit dem rechten Teil der  $(k+1)$ -ten Zeile. (Im Folgenden betrachten wir also ausschließlich  $T$  in dieser Weise. Insbesondere beziehen sich alle Positionsangaben auf  $T$ .)

Wir sind nun in der Lage die Wort-Statistiken der Wörter  $w$  und  $w'$  zu vergleichen. Die letzten  $D_2$  Buchstaben der Wörter  $w$  und  $w'$  sind identisch: Das sind die Einträge aus dem rechten Teil der ersten beiden Zeilen (die erste Zeile hat keine Einträge im linken Teil). Ebenso sind die ersten  $E_l - D_{r_0}$  Buchstaben der beiden Wörter identisch (unterhalb der Zeile  $r_0$  stehen keine Einträge im rechten Teil). Des Weiteren gilt

$$m_c(D_k) = m'_c(D_k) \quad (\text{III.2})$$

für alle  $1 \leq k \leq l$ , denn man hat zu diesen Zeitpunkten jeweils für  $m$  und für  $m'$  die gleichen Einträge in  $T$  betrachtet, allerdings in eventuell unterschiedlicher Reihenfolge.

Angenommen, es existiert ein  $1 \leq j \leq E_l$  und ein  $1 \leq b \leq B$  mit

$$m'_b(j) = m'_{b-1}(j) \quad \text{und} \quad w'_{E_l-j} \in \{b', b\},$$

und  $j$  sei minimal mit dieser Eigenschaft. Insbesondere ist somit  $m'_{b-1}(i) \geq m'_b(i)$  für alle  $i \leq j$ . Falls  $j < D_2$  oder  $D_{r_0} \leq j \leq E_l$  ist, so hat man für die Statistiken  $m_j$  bzw.  $m'_j$  die gleichen Einträge gelesen und betrachtet als nächstes für beide Statistiken denselben Eintrag. Sei zunächst  $j = D_2$ . Für das Wort  $w'$  betrachtet man als nächstes den Eintrag auf Position  $(3, \lambda_3 + 2)$  und für  $w$  den Eintrag auf Position  $(2, \mu_1)$ . Im linken Teil der zweiten Zeile kann kein  $b'$  oder  $b$  stehen, da  $T$  nach Voraussetzung TE erfüllt. Sei  $s$  die Anzahl der Einträge im linken Teil dieser Zeile, die gleich  $(b-1)$  sind. Diese stehen demnach auf den Positionen  $a_{2,t}$  für  $\mu_1 - s + 1 \leq t \leq \mu_1$  (da die Einträge im linken Teil kleiner  $b'$  und von links nach rechts nicht abnehmend sind). Wir nehmen  $s \geq 1$  an. Im rechten Teil der dritten Zeile steht dann kein  $b-1$ . Folglich sind alle Einträge im rechten Teil der dritten Zeile aus  $\{b', b\}$ . Darunter müssen  $s$  Einträge gleich  $b$  sein, denn wenn man für die Statistik  $m$  an die Position  $(3, \mu_1 + 1)$  kommt, ist  $m_c(D_3) = m'_c(D_3)$  für alle  $c \in A'$ . Da im linken Teil der zweiten Zeile jedoch mindestens ein  $b-1$  steht, steht darunter ein  $b'$  oder  $b$  (denn dieser Eintrag ist größer  $b-1$  — siehe III.(1.1) (ii) — und kleiner gleich  $b$ ). Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass  $T$  TE erfüllt, also tritt dieser Fall nicht ein. Ist  $s = 0$ , so stimmen zum Zeitpunkt, wenn man für  $m$  die Position  $(3, \lambda_3 + 2)$  betrachtet, die Werte  $m_{b-1}$  und  $m_b$  mit  $m'_b(j)$  überein. Also folgt auch hier ein Widerspruch.

Wir nehmen also  $D_{k-1} < j \leq D_k$  für ein  $3 \leq k \leq r_0$  an und  $j \neq D_{r_0}$ . (Wir betrachten nur die Fälle mit  $j \neq D_{r_0}$ : Falls  $j = D_{r_0}$  ist, so liest man für  $w$  und  $w'$  als nächstes den gleichen Eintrag in  $T$ , nämlich den auf Position  $(r_0, \mu_1)$ .) Wir legen eine abkürzende Schreibweise fest: Es sei  $t^* := E_l - t + 1$  für alle  $1 \leq t \leq E_l$ . Der Buchstabe  $w'_{j^*}$  steht also entweder

- (a) im rechten Teil der  $k$ -ten Zeile, oder
- (b) im linken Teil der  $(k-1)$ -ten Zeile von  $T$ .

Im Folgenden sei  $\hat{b} := w'_{(j+1)^*}$ . Wir machen eine Fallunterscheidung. In jedem dieser Fälle führen wir die Annahme zum Widerspruch.

Fall (a1):  $j = D_{k-1} + d_k$ . Der Buchstabe  $w'_{j^*}$  steht also auf Position  $(k, \mu_1 + 1)$  in  $T$ . Der nächsten Eintrag, den man für  $m'$  betrachtet ist der auf Position  $(k-1, \mu_1)$ . Dieser Eintrag steht von  $w'_{j^*}$  aus in Nord-West-Richtung (das ist entgegen der Süd-Ost-Richtung), es ist also  $|w'_{j^*}| > b$  nach Bemerkung III.(1.5). Somit sind auch alle Einträge rechts von  $w'_{j^*}$  in der  $k$ -ten Zeile größer als  $b$  und beeinflussen deswegen nicht die Werte der Statistiken  $m'_b$  und  $m'_{b-1}$ . Die Einträge rechts von  $\hat{b}$  in der  $(k-1)$ -ten Zeile sind größer oder gleich  $b$ . Es folgt, dass wenn man beim Erstellen der Statistik  $m$  an die Stelle  $(k-1, \mu_1)$  kommt, die Werte für  $b-1$  mit  $m'_{b-1}(j)$ , und die Werte für  $b$  mit  $m'_b(j)$  übereinstimmen. Es folgt ein Widerspruch, da das Tableau-Wort von  $T$  nach Voraussetzung die Gitter-Eigenschaft erfüllt.

Fall (a2): Es ist  $j < D_k - e_{k-1}$ , d. h.  $w'_{j^*}$  steht in  $T$  im rechten Teil der  $k$ -ten Zeile und nicht auf  $\mu_1 + 1$ . Das folgende Schaubild zeigt die  $(k-1)$ -te und  $k$ -te Zeile von  $T$ . Wir schreiben für die Einträge  $a_{k-1,s}$  kurz  $a_s$  für alle  $\mu_{k-1} + k - 1 \leq s \leq \lambda_{k-1} + k - 2$ .

$$\begin{array}{cccc|cccccc}
 & a_{\mu_{k-1}+k-1} & \cdots & a_{\mu_1-1} & a_{\mu_1} & a_{\mu_1+1} & \cdots & a_{\mu_1+t} & a_{\mu_1+t+1} & a_{\mu_1+t+2} & \cdots \\
 a_{k,\mu_k+k} & \cdots & & & & & \cdots & & \hat{b} & w'_{j^*} & w'_{(j-1)^*} & \cdots
 \end{array}$$

Es gilt also  $|a_{\mu_1+t}| < b$ , da dieser Eintrag in Nord-West-Richtung über  $\hat{b}$  steht. Es folgt, dass im linken Teil der  $(k-1)$ -ten Zeile ein Eintrag gleich  $b-1$  sein muß. Andernfalls würden die Statistikwerte  $m_b$  und  $m_{b-1}$  ebenfalls übereinstimmen, wenn man den Eintrag  $(k, \mu_1 + t + 1)$ , d. h.  $\hat{b}$ , betrachtet. Sei  $z$  die Anzahl der Einträge aus  $\{(b-1)', b-1\}$  unter den  $a_s$  mit  $\mu_{k-1} + k - 1 \leq s \leq \mu_1$ . Für die Einträge, welche in Süd-Ost-Richtung darunter (bzw. rechts davon) in der  $k$ -ten Zeile stehen, gilt

$$b \geq a_{k,s+1} > b - 1.$$

Also stehen im linken Teil der  $k$ -ten Zeile mindestens  $z - 1$  Buchstaben  $a$  mit  $a \in \{b', b\}$ . Wir definieren  $j_0 := D_k + z - 2$ . Der  $j_0$ -te Buchstabe, den man für  $m$  betrachtet, ist das  $(z-2)$ -te  $b$  im linken Teil der  $k$ -ten Zeile. (Im Fall  $z = 1$  bezeichnet  $j_0$  die Position des Buchstaben in  $w$ , der in  $T$  auf Position  $(k, \mu_1 + 1)$  steht.) Es sei weiter  $u$  die Anzahl der Einträge aus  $\{b', b\}$ , die im rechten der Teil der  $k$ -ten Zeile bis einschließlich  $\hat{b}$  stehen. Insbesondere ist  $u \geq 1$ , denn  $\hat{b}$  befindet sich im rechten Teil der  $k$ -ten Zeile. Abermals sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Das in der  $(k-1)$ -ten Zeile am weitesten links stehende  $b-1$  ist nicht-markiert. Dann ist der Eintrag darunter gleich  $b'$  oder  $b$  (denn dieser ist ungleich  $b-1$ , da der Eintrag darüber nicht-markiert ist, und kleiner gleich  $\hat{b}$ ) und alle Einträge rechts davon bis zu  $\hat{b}$  sind nicht-markierte  $b$ 's. Also sind mindestens  $z$  Einträge im linken Teil der  $(k-1)$ -ten Zeile aus  $\{b', b\}$ . Davon sind mindestens  $z-1$  nicht-markiert. Es folgt

$$m_{b-1}(j_0 + 1) = m'_{b-1}(j) + z \leq m'_b(j) + z - 1 + u = m_b(j_0 + 1).$$

Anschließend wird ein  $b'$  oder ein  $b$  gelesen, also folgt ein Widerspruch.

2. Das am weitesten links stehende  $b-1$  (in der  $(k-1)$ -ten Zeile) ist markiert. Es folgt

$$m_{b-1}(j_0) = m'_{b-1}(j) + z - 1 \leq m'_b(j) + z - 2 + u = m_b(j_0),$$

also führt auch diese Annahme zum Widerspruch.

Damit ist gezeigt, dass nicht  $j < D_k - e_{k-1}$  sein kann.

Fall (b1): Es ist  $D_k - e_{k-1} < j < D_k$ . In diesem Fall steht der Buchstabe  $w'_{j^*}$  im linken Teil der  $(k-1)$ -ten Zeile und nicht auf der Position  $(k-1, \mu_{k-1} + k - 1)$ . Dann steht links davon  $\hat{b}$  und somit sind alle Einträge rechts davon größer oder gleich  $b$ . Die Einträge darunter (in der  $k$ -ten Zeile) sind alle echt größer als  $b$  (wir benutzen wieder Bemerkung III.(1.5)). Insbesondere stehen im rechten Teil der  $k$ -ten Zeile nur Einträge die größer als  $b$  sind. Diese Einträge tragen also nicht zu den Statistiken  $m'_b$  und  $m'_{b-1}$  bei. Es sei  $j_1 := j - d_k$ . Für die Statistikwerte von  $m$  gilt

$$m_b(j_1) = m'_b(j) = m'_{b-1}(j) = m_{b-1}(j_1).$$

Da der nächste Buchstabe, der sowohl für  $m'$  als auch für  $m$  gelesen wird,  $\hat{b}$  ist, widerspricht das der Voraussetzung, dass  $T$  TE erfüllt.

Fall (b2): Es ist  $j = D_k$  (und  $k \neq r_0$ ). In diesem Fall steht der Buchstabe  $w'_{j^*}$  auf Position  $(k-1, \mu_{k-1} + k - 1)$  und  $w'_{(j+1)^*} = \hat{b}$  auf Position  $(k+1, \lambda_{k+1} + k)$ . Wie schon weiter oben bemerkt (siehe Gleichung III.(2)), ist

$$m_b(D_k) = m'_b(D_k) = m'_{b-1}(D_k) = m_{b-1}(D_k).$$

Die Einträge  $a_{k,s}$  mit  $s < \lambda_{k+1} + k$  stehen in Nord-West-Richtung (und links davon) über  $\hat{b}$ , sind also echt kleiner  $b'$ . Angenommen, es ist einer der Einträge  $a_{k,s} = b - 1$  für  $\mu_1 + 1 \leq s \leq \lambda_{k+1} + k$  (das sind die Einträge über  $\hat{b}$  und links davon, die im rechten Teil der  $k$ -ten Zeile stehen), dann ist der letzte Eintrag aus  $\{b-1, b\}$ , den man vor  $w'_{j^*}$  liest, ein  $b-1$ . Wegen Bemerkung III.(1.5) ist auch  $w'_{j^*} \leq b-1$ , also folgt

$$m'_{b-1}(t) < m'_b(t)$$

für ein  $t < D_k$ . Dies ist ein Widerspruch, da  $j$  minimal gewählt ist mit der Eigenschaft, dass  $w'$  bei  $w'_{(j+1)^*}$  die Anforderungen der TE (siehe III.(1.3)) nicht erfüllt. Folglich steht in der  $k$ -ten Zeile links von der Position  $(k, \lambda_{k+1} + k + 1)$  kein  $b-1$  und insbesondere kein  $b$ . Damit ist

$$m_{b-1}(E_k) = m'_{b-1}(D_k) = m'_b(D_k) = m_b(E_k).$$

Der nächste Eintrag, den man dann für  $m$  betrachtet, ist  $\hat{b}$ . Das widerspricht der Voraussetzung, also tritt auch dieser Fall nicht ein.

Wir haben gezeigt, dass das Tableau-Wort von  $T'$  die „erste Hälfte“ der Anforderungen der Gittereigenschaft III.(1.2) erfüllt. Wir lesen nun das Tableau von unten nach oben und die Zeilen von links nach rechts und zählen dabei die markierten Versionen der Einträge in  $T$ . Ähnlich wie beim ersten Durchgang müssen wir das Tableau  $T$  in etwas abgeänderter Form lesen, um das Tableau-Wort von  $T'$  zu erhalten: Wir vertauschen beim Lesen den rechten Teil der  $(k+1)$ -ten Zeile mit dem linken Teil der  $k$ -ten Zeile.

Angenommen, es existiert ein  $1 \leq j \leq E_l$  und  $b \leq B$  mit

$$m'_b(E_l + j) = m'_{b-1}(E_l + j) \quad \text{und} \quad w'_{j+1} \in \{b-1, b'\}.$$

Wir setzen  $w'_{j+1} = \hat{c}$ . Sei zunächst  $j = E_l - D_{r_0}$ . In diesem Fall steht  $w'_j$  also im linken Teil der  $r_0$ -ten Zeile und es gilt  $m_c(j) = m'_c(j)$  für alle  $c \in A'$ , da man bis zu diesem Eintrag für  $m$  und

$m'$  die gleichen Buchstaben betrachtet hat. Als nächstes betrachtet man für  $m$  den Eintrag auf Position  $(r_0, \mu_1 + 1)$ . Für die Statistik  $m'$  betrachtet man als nächstes den Eintrag  $(r_0 - 1, \mu_{r_0-1} + r_0 - 1)$ ; dieser Eintrag ist also  $\hat{c}$ . Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Es ist  $\hat{c} = b'$ . Dann sind alle Einträge in der  $r_0$ -ten Zeile, die in Süd-Ost-Richtung unterhalb (und rechts davon) stehen, echt größer als  $b$ . Insbesondere sind die Einträge rechts von  $w'_j$  größer  $b$ , also haben die Einträge im rechten Teil der  $r_0$ -ten Zeile kein Einfluß auf die Werte von  $m_b$  und  $m_{b-1}$ . Es folgt

$$m_b(E_l + (E_l - E_{r_0-1})) = m_{b-1}(E_l + (E_l - E_{r_0-1})).$$

Als nächstes liest man danach  $\hat{c}$  für  $m$ , also folgt ein Widerspruch.

2. Es ist  $\hat{c} = b - 1$ . Analog zur Argumentation im ersten Fall sind die Einträge rechts von  $w'_j$  größer oder gleich  $b'$ . Also erhält man wieder einen Widerspruch: entweder beim Auftreten eines  $b'$  rechts von  $w'_j$ , oder wenn man  $\hat{c}$  für  $m$  liest.

Es sei also  $E_l - D_k < j \leq E_l - D_{k-1}$  für ein  $3 \leq k \leq r_0$  (die ersten  $E_l - D_{r_0}$  und die letzten  $D_2$  Buchstaben der Worte  $w$  und  $w'$  sind identisch). Zudem können wir  $j \neq E_l - D_{r_0}$  annehmen: Ist  $j = E_l - D_2$ , so liest man für beide Worte als nächstes den Eintrag auf Position  $(2, \mu_1 + 1)$ , also kann auch in diesem Fall  $\hat{c}$  nicht  $b'$  oder  $b - 1$  sein. Der Eintrag  $\hat{c}$  steht also entweder

- (a) im linken Teil der  $(k - 1)$ -ten Zeile, oder
- (b) im rechten Teil der  $k$ -ten Zeile.

Wir machen eine Fallunterscheidung.

Fall (a1): Es ist  $E_l - D_k < j < E_l - D_k + e_k$ , d. h.  $\hat{c}$  steht im linken Teil der  $(k - 1)$ -ten Zeile und nicht auf Position  $(k - 1, \mu_1)$ . Wir verdeutlichen diese Situation wieder mit Hilfe eines Schaubildes; hierbei ist  $a_s := a_{k,s}$  für alle  $\mu_k + k \leq s \leq \lambda_k + k - 1$ .

$$\begin{array}{ccccccc|cccc} & a_{k-1, \mu_{k-1}+k-1} & \dots & w'_j & \hat{c} & \dots & & \dots & & & & \\ a_{\mu_k+k} & & & & & & a_{\mu_1} & a_{\mu_1+1} & \dots & a_{\lambda_k+k-1} & & \end{array}$$

Es sei  $q := j - (E_l - D_k)$ , d. h.  $w'_j$  steht auf dem  $q$ -ten Eintrag der  $(k - 1)$ -ten Zeile. Setzen wir weiter  $Q := (E_l - E_{k-1}) + q$ , dann ist der Eintrag  $w'_j$  der  $Q$ -te Buchstabe in  $w$ . Wir vergleichen die Wort-Statistiken  $m$  und  $m'$  und machen dazu eine Fallunterscheidung:

1. Es ist  $\hat{c} = b'$ . Dann folgt, dass  $|a_s| > b$  für alle  $\mu_1 + 1 \leq s \leq \lambda_k + k - 1$  ist, da diese Einträge in Süd-Ost-Richtung (bzw. rechts davon) unter  $\hat{c}$  stehen (siehe Bemerkung III.(1.5)). Also trägt der rechte Teil der  $k$ -ten Zeile nicht zu den Statistikwerten  $m_{b-1}$  und  $m_b$  bei. Es folgt

$$m_b(E_l + Q) = m'_b(E_l + j) = m'_{b-1}(E_l + j) = m_{b-1}(E_l + Q). \quad (\text{III.3})$$



2. Es ist  $\hat{c} = b - 1$ . Dann sind alle Einträge, die in Süd-Ost-Richtung (bzw. rechts davon) unterhalb von  $\hat{c}$  stehen größer gleich  $b$ . Ist ein  $b'$  unter diesen Einträgen, so unterscheiden wir zwei Fälle. Steht dieses  $b'$  im linken Teil der  $k$ -ten Zeile gilt (III.3). Steht diese  $b$  im rechten Teil der  $k$ -ten Zeile (das impliziert, dass  $\hat{c}$  auf Position  $(k - 1, \mu_1)$  steht), dann folgt

$$m_b(E_l + Q) = m'_b(E_l + j) + 1 > m'_b(E_l + j) = m'_{b-1}(E_l + j) = m_{b-1}(E_l + Q).$$

Der nächste Buchstabe, den man in beiden Fällen für  $m$  liest, ist  $\hat{c}$ . Es ergibt sich also ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass das Tableau  $T$  TE erfüllt.

Fall (a2): Es ist  $j = E_l - D_k + e_{k-1}$ , d. h.  $w'_j$  steht auf Position  $(k - 1, \mu_1)$  und  $\hat{c}$  steht auf Position  $(k, \mu_1 + 1)$ . Es sei  $p := \mu_1 - (\mu_k + k) + 1$  und  $P := E_l - E_k + p$ , d. h.  $\hat{c}$  ist der  $(P + 1)$ -te Buchstabe in  $w$ . Wir unterscheiden wieder zwei Fälle.

1. Es ist  $\hat{c} = b'$ . In diesem Fall steht rechts von  $\hat{c}$  (in der  $(k - 1)$ -ten Zeile) kein  $b'$ . Ebenso steht im linken Teil der  $(k - 1)$ -ten Zeile kein  $b'$ , da diese Einträge wegen Bemerkung III.(1.5) echt kleiner als  $b'$  sind. Also ist  $m_b(E_k + P) = m'_b(j)$ . Im linken Teil der  $(k - 1)$ -ten Zeile steht eventuell ein  $(b - 1)'$ , also ist  $m_{b-1}(E_k + P) \leq m'_{b-1}(j)$ .
2. Es ist  $\hat{c} = b - 1$ . In diesem Fall steht im linken Teil der  $(k - 1)$ -ten Zeile kein Eintrag aus  $\{(b - 1)', b - 1, b', b\}$  (da diese in Nord-West-Richtung, bzw. links davon, über  $\hat{c}$  stehen), also folgt

$$m_b(E_l + P) \geq m'_b(E_l + j) = m'_{b-1}(E_l + j) = m_{b-1}(E_l + P).$$

Somit kann  $w'_j$  nicht im linken Teil der  $(k - 1)$ -ten Zeile stehen.

Fall (b1): Es ist  $E_l - D_k + e_{k-1} < j < E_l - D_{k-1}$ , d. h.  $w'_j$  steht im rechten Teil der  $k$ -ten Zeile und nicht auf der Position  $(k, \lambda_k + k - 1)$ . In diesem Fall steht  $\hat{c}$  rechts neben  $w'_j$ . Es sei  $R := j - e_{k-1}$ , d. h.  $w'_j$  ist der  $R$ -te Buchstabe in  $w$ . Abermals unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Es ist  $\hat{c} = b'$ . In diesem Fall sind die Einträge in Nord-West-Richtung darüber alle kleiner als  $b'$  (insbesondere steht im linken Teil der  $(k - 1)$ -ten Zeile kein  $b'$ ). Es folgt

$$m_{b-1}(E_l + R) \leq m'_{b-1}(E_l + j) = m'_b(E_l + j) = m_b(E_l + R).$$

2. Es ist  $\hat{c} = b - 1$ . In diesem Fall sind alle Einträge in Nord-West-Richtung darüber kleiner als  $(b - 1)'$ , haben also keinen Einfluß auf die Werte von  $m'_{b-1}$  und  $m'_b$ . Es folgt

$$m_b(E_l + R) = m'_b(E_l + j) = m'_{b-1}(E_l + j) = m_{b-1}(E_l + R).$$

Diese Annahme führt somit zum Widerspruch.

Fall (b2): Es ist  $j = E_l - D_{k-1}$  und  $j \neq E_l - D_{r_0}$ . In diesem Fall ist  $m_c(j) = m_c(j)$  für alle  $c \in A'$ . Für das Wort  $w'$  liest man als nächstes den Eintrag auf Position  $(k - 2, \mu_{k-2} + k - 2)$ , dieser ist also gleich  $\hat{c}$ . Für das Wort  $w$  liest man den Eintrag auf Position  $(k - 1, \mu_1 + 1)$ . Dieser steht in Süd-Ost-Richtung unter  $\hat{c}$  (bzw. rechts davon). Wir machen die übliche Fallunterscheidung:

1. Es ist  $\hat{c} = b'$ . In diesem Fall stehen im rechten Teil der  $(k - 1)$ -ten Zeile nur Einträge die größer als  $b$  sind. Die Einträge haben beim Erstellen der Statistik  $m$  also keinen Einfluß auf die Werte von  $m_{b-1}$  und  $m_b$ .
2. Es ist  $\hat{c} = b - 1$ . Die Einträge im rechten Teil der  $(k - 1)$ -ten Zeile sind größer oder gleich  $b'$ . Falls im rechten Teil der  $(k - 1)$ -ten Zeile ein  $b'$  steht, so widerspricht das der Voraussetzung. Also haben die Einträge im rechten Teil dieser Zeile abermals keinen Einfluß auf die Werte  $m_{b-1}$  und  $m_b$ .

Es gilt also

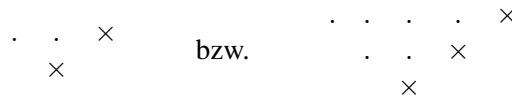
$$m_{b-1}(E_l + (E_l - E_{k-1})) = m'_{b-1}(E_l + j) = m_b(E_l + j) = m_b(E_l + (E_l - E_{k-1})),$$

bevor man  $\hat{c}$  für  $w$  betrachtet. In beiden Fällen ergibt sich also ein Widerspruch gegen die Voraussetzung, dass das Tableau-Wort  $w$  die Gitter-Eigenschaft erfüllt.

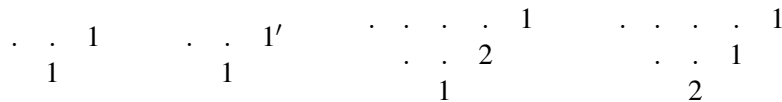
Somit ist vollständig gezeigt, dass das Tableau-Wort von  $T'$  die Gittereigenschaft erfüllt. Wir benutzen abermals Bemerkung III.(1.5): Die Einträge im linken Teil der  $(k - 1)$ -ten Zeile sind echt kleiner als die Einträge im rechten Teil der  $k$ -ten Zeile (für ein  $3 \leq k \leq r_0$ ). Es werden für  $w'$  also Wortteile in  $w$  vertauscht, ohne das sich an der Reihenfolge von auftretenden markierten und nicht-markierten Versionen einzelner Buchstaben etwas ändert. Also erfüllt  $T'$  auch Bedingung III.(1.3) (ii), d.h. für alle  $a \in A$  ist das in  $w$  am weitesten links stehende Element aus  $\{a', a\}$  gleich  $a$ .

Damit ist bewiesen, das  $T'$  TE erfüllt. □

**Beweis von Theorem (2.1).** Wir betrachten zunächst die folgenden Paare von Partitionen:  $(\mu, \nu) = ((2), (2))$  und  $(\mu, \nu) = ((4, 2), (2, 1))$ . In beiden Fällen gibt es eine Partition  $\lambda$ , so dass es für die zugehörigen Schief-Diagramme mindestens zwei Tableaus gibt, die TE erfüllen. Es sei  $\lambda = (3, 1)$  bzw.  $(5, 3, 1)$ , dann sind die entsprechenden Schief-Diagramme  $S(\lambda/\mu)$ :



Die folgenden Tableaus erfüllen TE:



(R0): Wann immer man also ein gegebenes Paar  $(\mu, \nu)$  gemäß den beiden vorangegangenen Lemmata auf  $((2), (2))$  bzw.  $((4, 2), (2, 1))$  „reduzieren“ kann, so ist  $st(\lambda; \mu, \nu) \geq 2$ . Wie diese Reduktionsschritte aussehen, zeigen die folgenden Behauptungen. Für eine Partition  $\mu$  sei bis auf Weiteres  $\ell(\mu) = m$  und  $\mu_{m+1} = 0$  gesetzt.

(R1): Es ist genau dann  $st(\lambda; \mu, (2)) \leq 1$  für alle  $\lambda$ , wenn  $\mu$  eine Treppe ist.

Nehmen wir an,  $\mu$  sei keine Treppe. Dann existiert ein minimales  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , mit  $\mu_i > \mu_{i+1} + 1$ . Insbesondere gilt, dass  $\mu_j = \mu_{j+1} + 1$  für  $1 \leq j \leq i - 1$  ist. In Abhängigkeit von  $\mu$  sind verschiedene Reduktionsschritte nötig, um  $\mu$  auf (2) zu reduzieren. Die nachfolgende „Liste“ beschreibt die verschiedenen Reduktionsvarianten. Dabei geht man wie folgt vor: Zu gegebenem  $\mu$  durchläuft man die Abfragen in der Liste von oben nach unten. Ist eine Abfrage in  $\boxed{i}$  mit ‚Ja‘ zu beantworten, so wird  $\mu$  entsprechend auf ein  $\mu'$  reduziert. Anschließend setzt man  $\mu := \mu'$  und durchläuft mit diesem (neuen)  $\mu$  wieder die Abfrage  $\boxed{i}$ . Ist die Abfrage  $\boxed{i}$  mit ‚Nein‘ zu beantworten, so geht man zur nächsten Abfrage in der Liste, d. h.  $\boxed{i+1}$ . Das Prozedere wiederholt man, bis man im letzten Schritt die Partition  $\mu$  schließlich auf (2) reduziert hat. Man startet dabei das Reduktionsprozedere mit einer geeigneten Partition  $\lambda$ , so dass man die Lemmata III.(2.2) und III.(2.3) anwenden kann. Im Folgenden ist zu einer Partition  $\lambda'$  die Partition  $\tilde{\lambda}'$  in Abhängigkeit einer Partition  $\mu'$  wie im Lemma III.(2.3) definiert. Des Weiteren sei mit einer „Spaltenreduktion“ gemäß Lemma III.(2.2) gemeint, dass die so reduzierten Partitionen wie in Lemma III.(2.2) vergrößert werden können, so dass man wieder die ursprünglichen Partitionen erhält.

Fall  $\boxed{1}$ : Es ist  $\mu_1 = \mu_2 + 1$ . In diesem Fall definiere

$$\lambda = (\mu_1 + 1, \mu_2, \dots, \mu_i, \mu_{i+1} + 1, \mu_{i+2}, \dots, \mu_m).$$

Dann gilt für  $\lambda' = (\mu_1, \mu_3, \mu_4, \dots, \mu_{i+1} + 1, \dots, \mu_m)$  und  $\mu' = (\mu_2, \dots, \mu_m)$ , dass  $\tilde{\lambda}' = \lambda$  ist (es ist hierbei  $r_0 = \max\{i \mid \lambda'_i > \mu_2 + 1 - i\} = 1$ ). Insbesondere folgt dann mit III.(2.3), dass

$$\text{st}(\lambda; \mu, (2)) \geq \text{st}(\lambda'; \mu', (2)) \quad (\text{III.4})$$

ist. Im Anschluss an die Reduktion ersetze man  $\lambda := \lambda'$  und  $\mu := \mu'$ .

Fall  $\boxed{2}$ : Es ist  $\mu_1 > \mu_2 + 2$ , d. h. es ist  $i = 1$  und  $\mu_1 \neq \mu_2 + 2$ . Setze  $\lambda = (\mu_1 + 1, \mu_2 + 1, \mu_3, \dots, \mu_m)$ . Wir erhalten  $\lambda'$  und  $\mu'$  indem wir jeweils die erste Spalte um  $\mu_1 - (\mu_2 + 2)$  Spalten gemäß Lemma III.(2.2) reduzieren. Abermals erhält man für die reduzierten Partitionen eine Abschätzung wie in (III.4). Man setze nach der Reduktion wieder  $\lambda := \lambda'$  und  $\mu := \mu'$ .

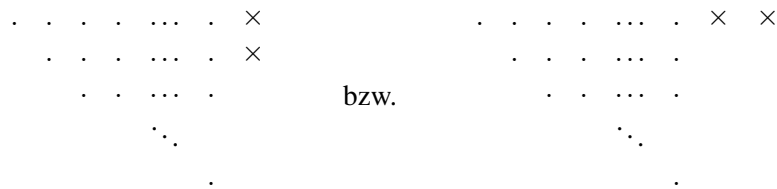
Fall  $\boxed{3}$ : Es ist  $\mu_1 = \mu_2 + 2$ . Sei  $\lambda = (\mu_1 + 1, \mu_2 + 1, \mu_3, \dots, \mu_m)$  wie in Fall  $\boxed{2}$ . Man reduziere alle Zeilen von  $\lambda$  und  $\mu$  gemäß III.(2.2) um  $\mu_2$  Spalten. Durch diese Reduktion erhält man  $\mu' = (2)$  und  $\lambda' = (3, 1)$ . Das Lemma III.(2.2) und (R0) liefern dann

$$\text{st}(\lambda; \mu, (2)) \geq \text{st}((3, 1); (2), (2)) \geq 2.$$

Ist  $\mu$  also keine Treppe, so existiert immer mindestens eine Partition  $\lambda$  für das es mehr als ein Tableau der Form  $\lambda/\mu$  mit Inhalt (2) gibt, welches TE erfüllt. Man beachte, dass man nur einmal während des Reduktionsprozedere ein  $\lambda$  definieren muss. In einem (eventuell) folgenden Schritte entspricht die Partition, welche man eingangs als  $\lambda$  definiert, der reduzierten Version der Partition  $\lambda$  aus dem vorherigen Schritt.

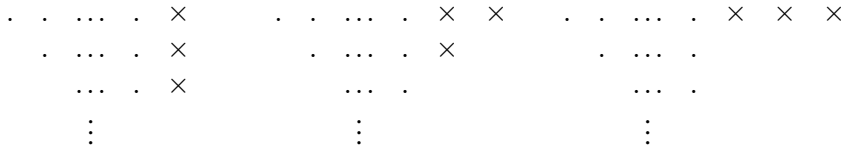
Ist andererseits  $\mu$  eine (nicht leere) Treppe, so gibt es nur zwei mögliche verschobene Diagram-

me der Form  $\lambda/\mu$  für eine Partition  $\lambda$  mit  $|\lambda| = |\mu| + 2$ , nämlich

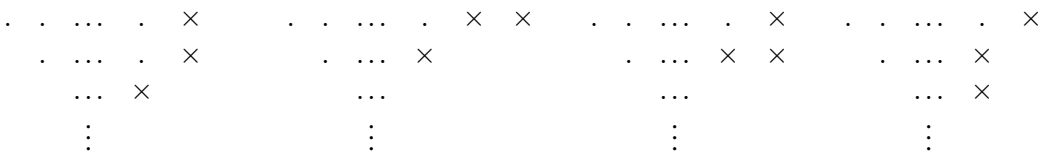


In beiden Fällen gibt es nur ein mögliches Tableau vom Inhalt  $(2)$ , welches TE erfüllt. Die zugehörigen Worte sind dann entweder  $w = 11'$  bzw.  $w = 11$ . Somit ist in diesem Fall  $st(\lambda; \mu, (2)) = 1$  und (R1) ist bewiesen.

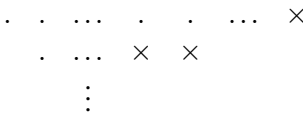
(R2) Es ist genau dann  $st(\lambda; \mu, (2, 1)) \leq 1$  für alle  $\lambda$ , wenn  $\mu$  eine Hakentreppe ist. Ist  $\mu$  eine Hakentreppe, so gibt es folgende mögliche Schief-Diagramme der Form  $\lambda/\mu$ , wenn  $\lambda$  eine strikte Partition mit  $|\lambda| = |\mu| + 3$  ist. Falls  $\mu$  eine Treppe enthält, die mindestens Stufen hat:



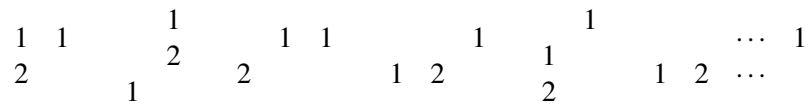
Falls es zwischen einer breiten Treppe und einer Treppe (wobei die Treppe auch leer sein kann) einen Stufenversatz der Größe 1 gibt, kommen außerdem vor:



Falls es einen Stufenversatz von mehr als einer Spalte gibt, existiert noch:



Wir halten fest, dass die Worte  $w = 211'$  und  $w = 121'$  nicht die Gitter-Eigenschaft erfüllen (vgl. Lemma III.(1.6)). Damit sind die folgenden Tableaus die einzig möglichen mit Inhalt  $v = (2, 1)$  und Form  $\lambda/\mu$ , welche TE erfüllen:



Ist andererseits  $\mu$  keine Hakentreppe, so existieren  $1 \leq i_1 < i_2 \leq m$  minimal mit  $\mu_{i_j} > \mu_{i_j} + 1$  für  $j = 1, 2$ . (Es gibt also mindestens zweimal einen Versprung von mehr als einer Spalte

Unterschied bei zwei aufeinander folgenden Zeilen. Insbesondere ist  $\mu_1 \geq 4$  und  $\mu_2 \geq 2$ .) Wir werden im Folgenden die Reduktion nicht mehr explizit angeben:

**Bemerkung:** Wir haben in (R1) die entsprechenden Reduktionsschritte explizit angegeben. Im Weiteren geben wir die einzelnen Reduktionen nicht mehr konstruktiv an, sondern benutzen folgende Argumentation: Es seien strikte Partitionen  $\mu$  und  $\nu$  gegeben. Weiter seien  $\lambda'$  und  $\mu'$  strikte Partitionen mit  $S(\mu') \subseteq S(\mu)$  und

$$\text{st}(\lambda'; \mu', \nu) > 1$$

gemäß einem der vorangegangenen Fälle. Dann lässt sich  $\mu'$  wie in den Lemmata III.(2.2) und III.(2.3) auf  $\mu$  vergrößern (diese Aussage ist klar). Die Partition, die dabei aus  $\lambda'$  hervorgeht, sei die im Folgenden zu Beginn einer „Reduktion“ gewählten Partition  $\lambda$ .

Nach dieser Bemerkung existiert eine Partition  $\lambda$ , so dass sich  $\lambda$  und  $\mu$  auf  $(5, 3, 1)$  bzw.  $(4, 2)$  reduzieren lassen. Mit Lemma III.(2.3) und (R0) folgt dann

$$\text{st}(\lambda; \mu, (2, 1)) \geq \text{st}((5, 3, 1); (4, 2), (2, 1)) \geq 2.$$

Ist  $\mu$  also keine Hakentreppe, so existiert eine Partition  $\lambda$  für das es mehr als ein Tableau  $T(\lambda/\mu)$  mit Inhalt  $(2, 1)$  gibt, welches TE erfüllt. Somit ist (R2) bewiesen.

(R3): Für alle  $k \geq 2$  ist genau dann  $\text{st}(\lambda; \mu, (k + 1, k)) \leq 1$  für alle  $\lambda$ , wenn  $\mu$  eine Treppe ist.

Ist  $\mu$  keine Treppe, so gibt es einen Stufenversatz der um mehr als eine Spalte verspringt, d. h.  $\mu$  lässt sich auf die Partition  $(2)$  reduzieren. Für die „Reduktion“ nach obiger Bemerkung starte man mit (reduziertem)  $\lambda' = (k + 2, k, 1)$ . In dieser Situation gibt es mindestens zwei verschobene Schief-Tableaus, welche TE erfüllen:

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & 1 & 2' & 2 & \cdots & 2 \\ & & & & & & 2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & 1' & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & 1 & 2' & 2 & \cdots & 2 \\ & & & & & & 2 \end{array}$$

Sei andererseits  $\mu$  eine Treppe der Länge  $m$  und  $\lambda$  eine strikte Partition mit  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu) \geq 1$ . Dann sind die oberen  $m + 1$  Zeilen eines verschobenen Schief-Diagramms der Form  $\lambda/\mu$  in nicht verschobener Form. Des Weiteren ist wegen III.(1.4) (i) die Partition  $\lambda$  um höchstens 2 länger als  $\mu$ . Schließlich hat das Diagramm  $S(\lambda/\mu)$  wegen Bemerkung III.(1.5) ab der dritten Zeile nur noch in höchstens zwei Spalten Einträge, da die unmarkierten Versionen der Einträge eines Tableaus  $T(\lambda/\mu)$  in Süd-Ost-Richtung streng monoton zunehmen. Wir veranschaulichen dies mit folgendem Schaubild:

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} \\ & & \cdot & \cdots & \cdot & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} & \\ & & & \cdot & \cdots & \cdot & a_{3,1} & a_{3,2} & & \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ & & & & & \cdot & a_{m,2} & a_{m,2} & & \\ & & & & & & a_{m+1,2} & a_{m+1,2} & & \\ & & & & & & & a_{m+2,2} & & \end{array}$$

Hierbei seien  $a_{i,j} \in \{1', 1, 2', 2\}$  für  $1 \leq i \leq m+2$  und  $1 \leq j \leq k+1$ . Einige dieser Positionen (Knoten) können auch nicht in  $S(\lambda/\mu)$  liegen; wir schreiben dann im Folgenden für solche Fälle  $a_{i,j} = 0$ . Die erste Zeile hat höchstens  $k+1 = \mu_1$  Spalten, da in einem Tableau, welches TE erfüllt, in der oberen rechten Ecke entweder  $1'$  oder  $1$  steht. Sei nun  $1 \leq l \leq k+1$  mit  $a_{1,l} = 1$  und  $a_{1,j} = 0$  für alle  $l+1 \leq j \leq k+1$ . Dann ist auch  $a_{2,j} = 0$  für alle  $l+1 \leq j \leq k$ . Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. Fall:  $l = k+1$ . In diesem Fall ist  $a_{1,j} = 1$  für alle  $1 \leq j \leq k+1$ , denn es kann höchstens eine markierte 1 auf Position  $(1, 1)$  in dieser Zeile stehen, doch dann würde  $T$  nicht TE erfüllen. Nun gibt es für die verbleibenden  $k$  Einträge aus  $\{2', 2\}$  entsprechend die Möglichkeit, dass  $a_{2,k} = 2$  ist, oder es gibt ein  $j_0 < k$  mit  $|a_{2,j_0}| = 2$  und  $a_{2,j} = 0$  für alle  $j_0+1 \leq j \leq k$ . Im ersten Fall ist  $a_{2,j} = 2$  für alle  $j \leq k$ . Im zweiten Fall sind die restlichen Einträge (ungleich 0) unter den  $a_{i,1}$  mit  $3 \leq i \leq m+1$  (wegen Bemerkung III.(1.5)), d. h. man erhält

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2' & 2 & \cdots & 2 & \\ 2' & & & & \\ \vdots & & & & \\ 2' & & & & \\ 2 & & & & \end{array}$$

2. Fall:  $l < k+1$ . In diesem Fall gibt es ein Zeilenindex  $i_0 > 1$ , so dass  $a_{i,1} = 1'$  für  $1 \leq i < i_0$  und  $a_{i_0,1} = 1$ . Die restlichen Einträge aus  $\{2', 2\}$  verteilen sich dann auf die möglichen Positionen in der zweiten Zeile, der zweiten Spalte und evtl. auf die Positionen unter  $(i_0, 1)$  in der ersten Spalte. Keine dieser Positionen ist frei, bzw. sind die Markierungen dadurch vorgegeben, dass das Tableau TE erfüllt. Wir beweisen diese Behauptung indem wir eine Fallunterscheidung machen:

(2a): Es existiert ein  $i_1 \leq i_0$  mit  $a_{i,2} = 0$  für  $i > i_1$  und  $a_{i,1} = 0$  für alle  $i > i_0$ . In diesem Fall ergibt sich für  $\lambda$  sich folgendes Tableau:

$$\begin{array}{cccc} 1' & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1' & 2' & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & 2' & & & \\ & 2 & & & \\ 1' & & & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

(2b): Es ist  $i_0 = m+1$  und  $a_{m+2,2} = 2$ . Dieser Fall ist klar, denn offensichtlich ist keiner der Positionen in  $T$  frei.

(2c): Es ist  $i_0 \leq m$  und mindestens eine Position unterhalb  $a_{i_0,1}$  mit 2 besetzt. (Die erste 2 von der linken unteren Ecke aus ist unmarkiert, da  $S$  nach Voraussetzung TE erfüllt.) Dieser Fall teilt sich wiederum in zwei Unterfälle auf.

(2c)<sub>1</sub>: Es ist  $a_{i_0+1,2} \neq 0$ . Dann sind die Markierungen aller übrigen Zweien vorgegeben: Es ist  $a_{i_0+1,2} = 2$  und die Zweien oberhalb sind alle markiert. Die Zweien unterhalb der Position  $(i_0, 1)$  sind ebenfalls alle bis auf den untersten Eintrag markiert.

(2c)<sub>2</sub>: Es ist  $a_{i_0+1,2} = 0$ . Für die Zweien, welche in der ersten Spalte unter der Position  $(i_0, 1)$  stehen, sind die Markierungen festgelegt. Sei  $i_2$  der Zeilenindex mit  $a_{i_2,2} \neq 0$  und  $a_{i,2} = 0$  für alle  $i > i_2$  und sei  $i_3$  der Zeilenindex mit  $a_{i_3,1} = 2$ . Wir setzen  $s := i_0 - i_2 (\geq 0)$  und  $t := i_3 - i_0 (> 0)$ . Dann sind auch die Markierungen der Einträge oberhalb von  $(i_2, 2)$  festgelegt. Folgendes Schaubild dient zur Verdeutlichung dieser Situation:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1' & 1 & & \cdots & & 1 & 1 \\
 1' & 2' & 2 & & \cdots & 2 & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & 2' \\
 & & & & & & 2^\sharp \\
 1' & & & & & & \\
 1 & & & & & & \\
 2' & & & & & & \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & 2' \\
 & & & & & & 2
 \end{array}$$

Die mit  $\sharp$  gekennzeichnete 2 muß nun markiert sein: Das zugehörige Tableau-Wort ist

$$w = \underbrace{22' \cdots 2'}_t \underbrace{11' \cdots 1'}_{s+1} 2^\sharp 1' 2' \cdots 1' 2' 2 \cdots 21' 11 \cdots 1.$$

Wir nehmen an, dass  $2^\sharp = 2$  ist und betrachten dazu die Werte der Statistik  $m_i(j)$ :

$$\begin{aligned}
 m_1(2k + 1 + t) &= k + 1 - (i_0 - 1) \\
 &= k + 2 - i_0 \\
 &\leq k + 2 - i_2 \\
 &= k - (i_2 - 2) = m_2(2k + 1 + t).
 \end{aligned}$$

Das ist der Wert der Statistik  $m_i(j)$ , nachdem man den Buchstaben  $w_t$  in  $w$  „von links kommend“ betrachtet hat. Dann ist  $w_{t+1} = 1$  der nächste Buchstabe in  $w$ , der für die Statistik betrachtet wird. Dieses Wort erfüllt somit nicht die Gitter-Eigenschaft, d. h. es ist  $2^\sharp = 2'$ .

Damit ist schließlich (R3) bewiesen.

(R4): Für alle  $k \geq 4$  ist genau dann  $\text{st}(\lambda; \mu, (k, k - 1, \dots, 4, 3)) \leq 1$  für alle  $\lambda$ , wenn  $\mu$  eine Treppe ist.

Wenn  $\mu$  keine Treppe folgt mit dem zuvor gezeigtem und der Symmetrie von  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu)$  (siehe Bemerkung III.(1.4)), dass

$$\begin{aligned}
 \text{st}(\lambda; \mu, (k, k - 1, \dots, 3)) &= \text{st}(\lambda; (k, k - 1, \dots, 3), \mu) \\
 &\geq \text{st}(\lambda'; (4, 3), \mu) && \text{(wiederholte Zeilen-Reduktion)} \\
 &= \text{st}(\lambda'; \mu, (4, 3)) > 1, && \text{(wegen letztem Ergebnis)}
 \end{aligned}$$

mit einem geeignetem  $\lambda'$  (woraus sich dann die zu Beginn der „Reduktion“ zu wählende Partition  $\lambda$  ergibt).

Sei nun  $\lambda$  eine strikte Partition mit  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu) \geq 1$ . Wegen der Symmetrie von  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu)$  und Lemma III.(2.3) gilt

$$\begin{aligned} \text{st}(\lambda; \mu, (k, k-1, \dots, 4, 3)) &= \text{st}(\lambda; (k, k-1, \dots, 4, 3), \mu) \\ &\leq \text{st}(\hat{\lambda}; (\hat{k}, \hat{k}-1, \dots, 4, 3), \mu), \end{aligned}$$

mit

$$\hat{k} = \begin{cases} k, & \text{falls } k-2 > \frac{r(r+1)}{2}, \\ \frac{r(r+1)}{2}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und entsprechend vergrößerter Partition  $\hat{\lambda}$  (wir schreiben im Folgenden wieder  $\lambda$  und  $\nu$ ). Das folgende Schaubild zeigt die mögliche Form des zugehörigen Tableaus  $T$ :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,m+1} & \\ & & & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & a_{3,3} & a_{3,4} & & & \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & a_{\hat{k},3} & & & & \\ & & & & & & \cdot & a_{\hat{k}+1,1} & a_{\hat{k}+1,2} & & & \\ & & & & & & & & a_{\hat{k}+2,2} & & & \end{array}$$

Da das Tableau einen treppenförmigen Inhalt hat, sind nach Lemma III.(1.6) alle Einträge unmarkiert. Also gibt es zu jedem Diagramm der Form  $\lambda/\nu$  genau ein mögliches Tableau: Es ist  $a_{\hat{k}+2,2} > a_{\hat{k}+1,1}$  wegen Bemerkung III.(1.5). Für ein Tableau von obiger Form, welches TE erfüllt, gibt es somit folgende Möglichkeiten für die Positionen der unteren Ecke:

$$(a) \quad \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ & 0 \end{array}, \quad (b) \quad \begin{array}{cc} i & 0 \\ & 0 \end{array}, \quad (c) \quad \begin{array}{cc} i & j \\ & 0 \end{array}, \quad (d) \quad \begin{array}{cc} i & i \\ & i+1 \end{array}, \quad (e) \quad \begin{array}{cc} i & j \\ & k \end{array},$$

wobei  $i < j < k$  ist. Da  $\lambda$  eine strikte Partition ist, gilt für zwei aufeinander folgende Zeilen im oberen Teil (ab Spalte 3), dass die zweite Zeile in (verschobener Form) höchstens so „lang“ wie ihre Vorgänger-Zeile ist. Deswegen ist z. B. der unterste Eintrag in Fall (d) durch  $i$  vorgegeben. In jedem dieser Fälle ist der Teil ab Spalte 3 eindeutig festgelegt: in der  $l$ -ten Zeile stehen alle (restlichen)  $l$ 's. Damit ist (R4) bewiesen.

Wir kommen zum Beweis der eigentlichen Behauptung im Satz. Zuerst zeigen (bzw. wiederholen) wir, dass in jedem der sechs Fälle aus Theorem III.(2.1)  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu) \leq 1$  gilt. Wann immer wir im folgenden von Tableaus sprechen sind solche gemeint, die TE erfüllen.

zu (i): Offensichtlich gibt es immer höchstens ein Tableau mit Inhalt (1).

zu (ii): Es seien  $\mu$  eine Treppe oder eine Hakentreppe und  $\nu = (2, 1)$ . Dann ist  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu) \leq 1$  für alle  $\lambda$  wie in (R2) gezeigt.





zu (vi): Es sei  $\mu$  eine Fast-Treppe und  $\nu$  eine Treppe. Wir unterscheiden zwei Fälle. Ist  $\mu = (r, r-1, \dots, k+2, k, k-1, \dots, 2, 1)$  mit  $r > k+2$  und  $k \geq 0$ , so hat das zugehörige Tableau zwischen der  $(r-k-1)$ -ten und der  $(r-k-2)$ -ten Zeile einen Versprung um genau eine Spalte. Wenn nötig vergrößert man den oberen Teil der Treppe (wie in Beweis von (R4)), so dass  $r-k-1 \geq |\nu|$  ist. Dann steht ab der  $(r-k-2)$ -ten Zeile kein Eintrag mehr rechts von der  $(k+1)$ -ten Spalte. Nun ist es offensichtlich, dass es zu jedem  $\lambda$  höchstens ein Tableau (mit unmarkiertem Inhalt) gibt. Ist andererseits  $\mu = (m, k, k-1, \dots, 2, 1)$  mit  $m > k+1$ , so hat ein zugehöriges Tableau die Form

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & * & \dots & & & & & * \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & & & & & & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & & & & & & \dots & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & & & & & & & \\
 & & & & & \cdot & \dots & \cdot & * & \dots & * & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & & & 
 \end{array}$$

Die Positionen  $*$  sind mit den restlichen Buchstaben aus  $\{1, 2, \dots, |\nu|\}$  besetzt, so dass

1. das Tableau den Inhalt  $\nu$  hat,
2. keine (unmarkierten) Buchstaben mehrmals in einer Spalte vorkommen, und
3. das zugehörige Wort die Gitter-Eigenschaft erfüllt.

Für alle  $\lambda$  gibt es höchstens ein solches Tableau.

Seien nun  $\mu$  und  $\nu$  strikte Partitionen, so dass  $st(\lambda; \mu, \nu) \leq 1$  für alle Partitionen  $\lambda$  ist. Jede Partition  $\nu \neq (1)$  kann man entweder auf  $(2)$  oder  $(2, 1)$  reduzieren; es sei die reduzierte Partition mit  $\nu'$  bezeichnet. Das schränkt die zu untersuchenden  $\mu$  nach (R1), (R2) und der Ungleichung

$$st(\lambda'; \mu, \nu') \leq st(\lambda; \mu, \nu) \leq 1 \quad \text{für alle } \lambda \text{ und entsprechend reduzierte } \lambda',$$

auf Treppen und Hakentreppen ein. Da  $st(\lambda; \mu, \nu) = st(\lambda; \nu, \mu)$  ist, kann man die Argumentation für  $\mu$  wiederholen. Dies schränkt auch die zu betrachtenden  $\nu$  auf Treppen und Hakentreppen ein. Sind  $\mu$  und  $\nu$  beides Hakentreppen, dann lässt sich eine dieser Partitionen auf  $(2)$  reduzieren, also muß die andere Partition eine Treppe sein (siehe (R1)). Folglich ist  $\{\mu, \nu\} = \{\text{Treppe, Hakentreppe}\}$ . Wir nehmen an, dass  $\mu$  und  $\nu$  nicht wie in den Fällen (i) - (vi) des Theorems sind.

Im Folgenden sei  $\nu$  eine Treppe. Wegen (R2) können wir annehmen, dass die Treppe mindestens die Teile 3, 2 und 1 enthält. Wir betrachten zunächst das Paar  $(\mu', \nu') = ((5, 4, 1), (3, 2, 1))$ . Dann gibt es mindestens ein  $\lambda$  mit zwei möglichen Tableaus der Form  $\lambda/\mu'$  und Inhalt  $\nu'$ :

$$\begin{array}{cccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \\
 & & \cdot & 1 & 2 & & \\
 & & & 3 & & & 
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{cccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \\
 & & \cdot & 1 & 3 & & \\
 & & & 2 & & & 
 \end{array}$$

Dies zeigt — im Hinblick auf mögliche Reduktion gemäß III.(2.2) und III.(2.3) —, dass  $\mu$  keine Hakentreppe sein kann, die keine Treppe, Fast-Treppe oder breite Treppe wie in den betrachteten Fällen ist. Sei nun  $\mu$  eine breite Treppe der Form  $(r, r - 1, \dots, 4)$  mit  $r \geq 6$ . Diese breite Treppe lässt sich auf  $\mu' = (6, 5, 4)$  reduzieren und für  $\nu = (4, 3, 2, 1)$  existiert mindestens ein  $\lambda$ , für das es zwei Tableaus der Form  $\lambda/\mu$  mit Inhalt  $\nu$  gibt:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & & & \\
 & & & & & 4 & & & 
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{cccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & & \\
 & & & 1 & 2 & 4 & & & \\
 & & & & & 3 & & & 
 \end{array}$$

Dies zeigt, dass für eine Treppe  $\nu$ , die  $(4, 3, 2, 1)$  enthält, die einzigen breiten Treppen  $\mu$ , die keine Fast-Treppen sind, entweder von der Form  $(k + 1, k)$ ,  $k \geq 3$ , oder  $(k, k - 1, \dots, 3)$ ,  $k \geq 5$ , sind.

Damit ist der Satz bewiesen.<sup>2</sup> □

**(2.4) Theorem (Vielfachheitsfreie Konstituenten, vgl. [Bes02])**

Seien  $\mu \in \mathcal{D}_k$ ,  $\nu \in \mathcal{D}_l$  und  $k + l = n$ . Liegt einer der folgenden Fälle vor, dann ist das projektive äußere Produkt  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  vielfachheitsfrei, d. h. es ist  $(\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \langle \lambda \rangle) \leq 1$  für alle  $\lambda \in \mathcal{D}_n$ :

- (i)  $\langle \text{irgendwas} \rangle \hat{\otimes} \langle 1 \rangle$ .
- (ii)  $\langle \text{Hakentreppe} \rangle \hat{\otimes} \langle 2, 1 \rangle$  und die Hakentreppe ist in  $\mathcal{D}_k^+$ .
- (iii)  $\langle \text{Treppe} \rangle \hat{\otimes} \langle m \rangle$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ .
- (iv)  $\langle \text{Treppe} \rangle \hat{\otimes} \langle m - 1, 1 \rangle$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 3$ , so dass die Treppe und  $(m - 1, 1)$  verschiedene Signum haben.
- (v)  $\langle \text{Treppe} \rangle \hat{\otimes} \langle m + 1, m \rangle$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  und die Treppe aus  $\mathcal{D}_k^+$ .

**Beweis.** Wir zeigen, dass in jedem der fünf Fälle

$$f := \frac{1}{\varepsilon_\lambda \varepsilon_{\mu \cup \nu}} \cdot 2^{(\ell(\mu) + \ell(\nu) - \ell(\lambda))/2} \leq 1 \tag{III.5}$$

für alle  $\lambda \in \mathcal{D}_n$  gilt. Da die Vielfachheit eines Konstituenten  $\lambda$  in  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  eine natürliche Zahl ist, folgt dann mit III.(2.1), dass der Wert in (III.1) entweder 1 oder 0 ist. Um die Notation in den Fallunterscheidungen etwas übersichtlicher zu halten definieren wir

$$p = 2^{(\ell(\mu) + \ell(\nu) - \ell(\lambda))/2} \quad \text{und} \\
 \varepsilon = \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\mu \cup \nu}.$$

---

<sup>2</sup>Das Vorgehen in diesem Beweis ist ähnlich zu dem in [Ste01]. Dort werden die vielfachheitsfreien Produkte von Schur-Funktionen bestimmt.

In den folgenden Fällen verwenden wir die Aussage (i) aus Bemerkung III.(1.4): Ist  $\ell(\lambda) > \ell(\mu) + \ell(\nu)$ , dann ist  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu) = 0$ .

zu (i): Es sei  $\mu \in \mathcal{D}_{n-1}$  beliebig und  $\nu = (1)$ . Ist  $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$ , dann ist  $p = \sqrt{2}$ . Weiter gilt in diesem Fall, dass  $\sigma(\lambda) = n - \ell(\lambda) = n - 1 + 1 - \ell(\mu) = \sigma(\mu) + 1$  ist. Analog ist  $\sigma(\mu \cup \nu) = n - (\ell(\mu) + 1) = \sigma(\mu)$ , also haben  $\lambda$  und  $\mu \cup \nu$  unterschiedliches Signum und es ist  $\varepsilon = \sqrt{2}$ . Ist  $\ell(\lambda) = \ell(\mu) + 1$ , so ist  $p = 1$  und somit  $f \leq 1$ .

zu (ii): Es sei  $\mu$  eine gerade Partition (Hakentreppe) von  $n - 3$  und  $\nu = (2, 1)$ . Im Fall  $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$  ist  $p = 2$  und es sind

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda) &= \sigma(\mu) + 3, \text{ und} \\ \sigma(\mu \cup \nu) &= \sigma(\mu) + 3 - 2\end{aligned}$$

ungerade. Also ist auch  $\varepsilon = 2$ . Falls  $\ell(\lambda) = \ell(\mu) + 1$  ist, so ist  $p = \sqrt{2}$  und  $\sigma(\lambda) = \sigma(\mu) + 2$ . Damit haben  $\lambda$  und  $\mu \cup \nu$  unterschiedliches Signum und es ist  $\varepsilon = \sqrt{2}$ . Im Fall  $\ell(\lambda) = \ell(\mu) + 2$  ist wieder  $p = 1$ .

zu (iii): Es sei  $\mu = (k, k - 1, \dots, 1)$  eine Partition von  $n - m$  und  $\nu = (m)$ ,  $m \leq n$ . Falls  $\ell(\lambda) = \ell(\mu) + 1$  ist, so ist  $p = 1$ , also nehmen wir  $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$  an. Dann ist

$$\sigma(\lambda) = \sigma(\mu) + m = \sigma(\mu \cup \nu) + 1,$$

also ist  $\varepsilon$  genau wie  $p$  gleich  $\sqrt{2}$ .

zu (iv): Es sei  $\mu = (k, k - 1, \dots, 1)$  und  $\nu = (m - 1, 1)$  mit  $m > 3$  zwei Partitionen von unterschiedlichem Signum. Für  $\ell(\lambda) = \ell(\mu) + 2$  ist  $p = 1$  und es ist nichts mehr zu zeigen. Im Fall  $\ell(\lambda) = \ell(\mu) + 1$  ist  $p = \sqrt{2}$  und wegen

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda) &= \sigma(\mu) + m - 1, \text{ und} \\ \sigma(\mu \cup \nu) &= \sigma(\mu) + m - 2\end{aligned}$$

haben  $\lambda$  und  $\mu \cup \nu$  unterschiedliches Signum, es ist also auch  $\varepsilon = \sqrt{2}$ . Falls schließlich  $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$  ist, d. h.  $p = 2$ , so ist  $\sigma(\lambda) = \sigma(\mu) + m$ , also haben  $\lambda$  und  $\mu \cup \nu$  gleiches Signum. Nach Voraussetzung ist  $\mu \in \mathcal{D}_n^+$  und  $m$  ungerade oder umgekehrt. In beiden Fällen ist also  $\sigma(\mu) + m$  ungerade, also  $\varepsilon = 2$ .

zu (v): Es sei nun  $\mu = (k, k - 1, \dots, 1)$  eine gerade Partition und  $\nu = (m + 1, m)$ . Dann ist im Fall  $\ell(\lambda) = \ell(\mu) + 2$  der Faktor  $p$  wieder gleich 1. Falls  $\ell(\lambda)$  und  $\ell(\mu)$  sich um 1 unterscheiden, ist  $p = \sqrt{2}$  und wegen

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda) &= \sigma(\mu) + 2m, \text{ und} \\ \sigma(\mu \cup \nu) &= \sigma(\mu) + 2m - 1\end{aligned}$$

haben  $\lambda$  und  $\mu \cup \nu$  unterschiedliches Signum, also ist auch hier  $\varepsilon = \sqrt{2}$ . Haben schließlich  $\lambda$  und  $\mu$  gleiche Länge, so sind  $\lambda$  und  $\mu \cup \nu$  gerade. Es ist also wie erhofft  $\varepsilon = 2$ .  $\square$



III.(2.4) hinzufügen. Insbesondere zeigen diese Beispiele, dass es vielfachheitsfreie projektive äußere Produkte  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  gibt, für die  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu) = 2$  möglich ist.

Im Hinblick auf die im vierten Kapitel folgende Untersuchung von projektiven äußeren Produkten  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  auf Imprimitivität, können wir diese Fälle jedoch vernachlässigen. Die Beispiele zeigen, dass  $\langle k \rangle \hat{\otimes} \langle l \rangle$  mit  $k, l > 1$  wie oben, immer mindestens zwei nicht zueinander assoziierten Konstituenten besitzt, nämlich  $\langle k, l \rangle$  und  $\langle k + l - 1, 1 \rangle$ .

Wir können eine Einschränkung für die Paare  $\mu$  und  $\nu$  geben.

### (2.6) Bemerkung

Es seien  $\mu$  und  $\nu$  strikte Partitionen für welche das projektive äußere Produkt  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  vielfachheitsfrei ist. Aufgrund der Symmetrie der Koeffizienten (es gilt  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu) = \text{st}(\lambda; \nu, \mu)$ , siehe III.(1.4)) können wir o. B. d. A.  $\ell(\nu) \leq \ell(\mu)$  annehmen. Es sei  $\lambda := (\mu_1 + \nu_1, \mu_2 + \nu_2, \dots, \mu_{\ell(\nu)} + \nu_{\ell(\nu)}, \mu_{\ell(\nu)+1}, \dots, \mu_{\ell(\mu)})$ . Dann ist

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & & \dots & 2 & & \\
 & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \dots & & & & & & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \dots & & & & & & & \\
 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \dots & & & & & & & \\
 & & & & & & \cdot & \cdot & \ell(\nu) & \dots & & & & & & & & & \ell(\nu)
 \end{array}$$

das einzige Tableau der Form  $\lambda/\mu$  mit Inhalt  $\nu$ , das TE erfüllt. Die Partition  $\lambda$  liefert also einen Konstituenten von  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  und es ist  $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$ , und damit

$$p = 2^{(\ell(\mu) + \ell(\nu) - \ell(\lambda))/2} = 2^{\ell(\nu)/2}.$$

Da der Faktor  $\varepsilon = \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\mu \cup \nu}$  höchstens 2 ist, ist auch  $p \leq 2$ . Folglich ist  $\ell(\nu) \leq 2$ , d.h.  $\nu$  ist von der Form  $(m)$  oder  $(m - l, l)$  für  $m, l \in \mathbb{N}$ .

Wir machen noch eine Bemerkung über die Werte von (III.1) für assoziierte Charaktere.

### (2.7) Bemerkung

Es seien  $\mu$  und  $\nu$  strikte Partitionen von  $k$  und  $l$  mit  $k + l = n$ . Ist  $\lambda \in \mathcal{D}_n^-$  und nicht gleich  $\mu \cup \nu$ , dann gilt

$$\langle \langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \langle \lambda \rangle \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_n} = \langle \langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \langle \lambda \rangle^a \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_n}.$$

**Beweis.** Es gilt

$$e := \langle \langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \langle \lambda \rangle \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_n} = \frac{1}{2} \langle \langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \langle \lambda \rangle \rangle_{\tilde{\mathcal{A}}_n},$$

außer wenn  $\lambda = \mu \cup \nu$  und ungerade ist: Nach Theorem II.(4.2) (i) und (ii) ist für eine Element  $x \in \tilde{\mathcal{S}}_n \setminus \tilde{\mathcal{A}}_n$  genau dann  $\langle \lambda \rangle(x) \neq 0$ , wenn  $x$  vom Typ  $\lambda$  ist. Ebenso folgt  $\langle \mu \rangle \otimes_z \langle \nu \rangle(x) = 0$ , falls  $x$  nicht vom Typ  $\mu \cup \nu$  ist — siehe II.(2.10) und benutze wieder II.(4.2). (Insbesondere folgt damit  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle(x) = 1/|\tilde{\mathcal{S}}_k \times_z \tilde{\mathcal{S}}_l| \sum \langle \mu \rangle \otimes_z \langle \nu \rangle(y^{-1}xy) = 0$ , falls  $x$  nicht vom Typ  $\mu \cup \nu$  ist; hierbei wird über alle  $y \in \tilde{\mathcal{S}}_n$  mit  $y^{-1}xy \in \tilde{\mathcal{S}}_k \times_z \tilde{\mathcal{S}}_l$  summiert.)

Ist  $\lambda$  ungerade, so ist  $\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{A}_n =: \alpha$  irreduzibel und es folgt mit Frobenius-Reziprozität (siehe I.(2.1))

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2} (\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \langle \lambda \rangle)_{\tilde{A}_n} \\ &= \frac{1}{2} (\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle \downarrow \tilde{A}_n, \alpha)_{\tilde{A}_n} \\ &= \frac{1}{2} (\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \alpha \uparrow \tilde{S}_n)_{\tilde{S}_n} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \langle \lambda \rangle)_{\tilde{S}_n} + (\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \langle \lambda \rangle^a)_{\tilde{S}_n} \}. \end{aligned}$$

Der erste Summand in der letzten Zeile ist nach Voraussetzung gleich  $e$ , also folgt dies auch für den zweiten Summand in der Klammer.  $\square$

Wir halten eine direkte Folgerung aus dieser Bemerkung fest.

**(2.8) Korollar**

Es seien  $\mu$  und  $\nu$  strikte Partitionen für die  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  vielfachheitsfrei ist. Falls  $\mu \cup \nu$  ungerade ist und ein Konstituent  $\langle \lambda \rangle$  existiert mit  $\ell(\lambda) = \ell(\mu) + \ell(\nu)$  und  $\lambda \neq \mu \cup \nu$  (in diesem Fall ist  $\sigma(\lambda) = \sigma(\mu \cup \nu)$  und  $f = p/\varepsilon = 1/2$ ), dann ist auch  $\langle \lambda \rangle^a$  ein Konstituent von  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$ . Insbesondere ist in diesem Fall  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  nicht imprimitiv.

Unter einer zusätzlichen Voraussetzung können wir eine Umkehrung von III.(2.4) beweisen.

**(2.9) Lemma**

Es seien  $\mu$  und  $\nu$  strikte Partitionen von  $k$  bzw.  $l$  mit  $k + l = n$ , für die das projektive äußere Produkt  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  vielfachheitsfrei ist und zusätzlich

$$\text{st}(\lambda; \mu, \nu) \leq 1$$

für alle  $\lambda \in \mathcal{D}_n$  gilt. Dann ist  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  wie in einer der folgenden Fälle:

- (i)  $\langle \text{irgendwas} \rangle \hat{\otimes} \langle 1 \rangle$ .
- (ii)  $\langle \text{Hakentreppe} \rangle \hat{\otimes} \langle 2, 1 \rangle$  und die Hakentreppe ist in  $\mathcal{D}_k^+$ .
- (iii)  $\langle \text{Treppe} \rangle \hat{\otimes} \langle m \rangle$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ .
- (iv)  $\langle \text{Treppe} \rangle \hat{\otimes} \langle m - 1, 1 \rangle$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 3$ , so dass die Treppe und  $(m - 1, 1)$  verschiedene Signum haben.
- (v)  $\langle \text{Treppe} \rangle \hat{\otimes} \langle m + 1, m \rangle$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  und die Treppe aus  $\mathcal{D}_k^+$ .

**Beweis.** Wir ermitteln die Paarungen  $(\mu, \nu)$  aus III.(2.1), die vielfachheitsfreie projektive äußere Produkte liefern. Ist eine der Partitionen gleich  $(1)$ , so ist die Behauptung klar. Man beachte, dass man sich wegen Bemerkung III.(2.6) auf Partitionen  $\nu$  mit  $\ell(\nu) \leq 2$  beschränken kann.

Es sei  $\mu$  eine Hakentreppe und  $\nu = (2, 1)$ . Wie in Bemerkung III.(2.6) gesehen, gibt es immer einen Konstituenten  $\langle \lambda \rangle$  von  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  mit  $\ell(\lambda) = \max\{\ell(\mu), \ell(\nu)\}$ . In diesem Fall ist  $p = \sqrt{2}$  oder 2. Ist  $p = 2$ , so auch  $\varepsilon$ , also ist insbesondere  $\mu \cup \nu$  eine ungerade Partition, und damit  $\mu$  gerade. Falls  $p = \sqrt{2}$  ist, so ist  $\mu = (m)$  für ein  $m$  ist.

Es sei  $\mu$  eine Treppe mit Länge größer 1 und  $\nu = (m + 1, m)$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Wieder gibt es einen Konstituenten  $\langle \lambda \rangle$  für eine Partition  $\lambda$  mit  $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$ . Also folgt  $p = \varepsilon = 2$  und somit wieder, dass  $\mu \cup \nu$  eine ungerade Partition ist. Also haben  $\mu$  und  $\nu$  verschiedenes Signum und  $\mu$  ist gerade.

Der Fall, dass beide Partitionen Treppen sind, ist bereits behandelt, denn entweder ist die kleinere Partition gleich (1) oder gleich (2, 1).

Es bleibt der Fall (vi) aus III.(2.1): Hat die Treppe Länge kleiner oder gleich 2, so ist diese (1) oder (2, 1). Da Fast-Treppen spezielle Hakentreppen sind, ist der zweite Fall schon abgehandelt (ebenso wie der erste). Es habe also die Fast-Treppe, die wir mit  $\nu$  bezeichnen, höchstens Länge 2, d.h. es ist  $\nu = (m)$  oder  $\nu = (m - 1, 1)$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Der erste Fall wurde bereits abgehandelt. Im zweiten Fall folgt wie in den Fällen zuvor, dass die Treppe und  $\nu$  unterschiedliches Signum haben müssen.

Das Lemma ist bewiesen. □



# Kapitel IV

## Ergebnisse

*To sum it all up: begin at the beginning, go  
on till you come to the end, and then, with  
no further ado, stop.*

*P. R. Halmos*

Wir kommen zum letzten Kapitel dieser Arbeit und somit zu den eigentlichen Ergebnissen. Wir wenden die Aussagen aus den vorherigen Kapiteln an, um die imprimitiven Spincharaktere der Überlagerungsgruppen  $\tilde{S}_n$  bzw.  $\tilde{A}_n$  zu bestimmen, welche von Untergruppen  $\tilde{S}_k \times_z \tilde{S}_{n-k}$  bzw.  $\tilde{A}_k \times_z \tilde{A}_{n-k}$  induziert sind. In den Beweisen werden wir zunächst für die Charaktere von  $\tilde{S}_n$  und den Fall  $k = 1$  die Branching-Rule benutzen und schließlich im zweiten Abschnitt die Littlewood-Richardson-Regel aus dem letzten Kapitel. Hierbei werden wir uns auf die Fälle aus Lemma III.(2.9) beschränken. Vielfachheitsfreie projektive äußere Produkte in anderen Fällen haben mindestens zwei Konstituenten, wie wir in Bemerkung III.(2.6) und Korollar III.(2.8) gesehen haben. Im dritten und vierten Abschnitt richten wir unser Augenmerk dann auf die Überlagerungsgruppen der alternierenden Gruppen. Hierbei greifen wir immer wieder auf die Ergebnisse für die  $\tilde{S}_n$  zurück und verwenden den Satz von Clifford in bereits gewohnter Form (siehe II.(2.3)).

### IV.1 Serie von imprimitiven Spincharakteren der $\tilde{S}_n$

Wir geben in diesem Abschnitt eine Serie von imprimitiven Spincharakteren von  $\tilde{S}_n$  an. Diese Charaktere  $\langle \mu \rangle$  sind induzierte Charaktere  $\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{S}_n$  für einen Spincharaktere  $\langle \lambda \rangle$  von  $\tilde{S}_{n-1}$ . Diese Serie imprimitiver Spincharaktere lässt sich durch die Form der Partition  $\mu$  parametrisieren.

#### (1.1) Proposition

Es sei  $\langle \mu \rangle$  ein irreduzibler Spincharakter der  $\tilde{S}_n$ . Genau dann ist  $\langle \mu \rangle = \langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{S}_n$  für einen irreduziblen Spincharakter  $\langle \lambda \rangle$  von  $\tilde{S}_{n-1}$ , falls  $\mu = (m+1, m-1, m-2, \dots, 1) \in \mathcal{D}_n$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \equiv 2$  oder  $3 \pmod{4}$  ist. In diesem Fall ist  $\mu \in \mathcal{D}_n^+$  und  $\lambda = (m, m-1, \dots, 1) \in \mathcal{D}_{n-1}^-$ .

**Beweis.** Sei  $\langle \lambda \rangle \in \text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{S}}_{n-1})$  mit  $\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{\mathcal{S}}_n = \langle \mu \rangle$  irreduzibel. Es muss  $|N(\lambda)| = 1$  und  $\lambda_{\ell(\lambda)} = 1$  sein, d. h. es ist

$$\begin{aligned} \lambda_i - \lambda_{i-1} &= 1 \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq \ell(\lambda) - 1 \text{ und} \\ \lambda_{\ell(\lambda)} &= 1. \end{aligned}$$

Also hat man  $\lambda = (m, m-1, \dots, 1)$  mit  $m = \ell(\lambda)$ . Dann ist  $\mu \in \mathcal{D}_n^+$ , da sonst mit der Branching-Rule (siehe II.(5.3))

$$\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{\mathcal{S}}_n = \langle \mu \rangle + \langle \mu \rangle^a + \dots$$

wäre (insbesondere ist dann  $\lambda \in \mathcal{D}_{n-1}^-$ ). Folglich ist  $\mu = (m+1, m-1, m-2, \dots, 1) \in \mathcal{D}_n^+$  und nach der Branching-Rule  $\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{\mathcal{S}}_n = \langle \mu \rangle$ . Somit ist  $n = 1 + \sum_{i=1}^m i = m(m+1)/2 + 1$  und damit

$$\sigma(\mu) = n - \ell(\mu) = n - m = \frac{m(m-1)}{2} + 1.$$

Da  $\mu \in \mathcal{D}_n^+$  ist folgt, dass  $\sigma(\mu)$  gerade, also  $m(m-1)/2$  ungerade ist. Das ist allerdings gleichbedeutend mit  $m \equiv 2$  oder  $3 \pmod{4}$ , wie man leicht sieht.  $\square$

## IV.2 Mögliche Fälle imprimitiver Spincharaktere aus dem Satz von Bessenrodt

In diesem Abschnitt kommt der Satz von Bessenrodt (III.(2.4)) zur Anwendung. Wir untersuchen die projektiven äußeren Produkte  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  auf Imprimitivität, für die  $\text{st}(\lambda; \mu, \nu) \leq 1$  für alle  $\lambda$  ist. Nach Korollar III.(2.8) haben die projektiven äußeren Produkte  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  in den anderen Fällen mindestens zwei Konstituenten. Wir betrachten also Paarungen  $(\mu, \nu)$  wie in den Fällen (ii)-(v) von Satz III.(2.4) (der Fall (i) wurde bereits in Abschnitt IV.1 mit Hilfe der Branching-Rule behandelt). Die Strategie im Beweis wird sein, in den meisten Fällen mindestens zwei verschiedene Konstituenten von  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  anzugeben. In keinem Fall ist ein solches projektives äußeres Produkt  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  irreduzibel. Wir kommen zur entsprechenden Behauptung.

### (2.1) Proposition

Es seien  $\mu \in \mathcal{D}_l$  und  $\nu \in \mathcal{D}_{n-l}$ . Sind  $n-l$  und  $l$  ungleich 1, dann ist  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  ein reduzibler Charakter von  $\tilde{\mathcal{S}}_n$ .

Ist  $\mu$  eine Treppe mit geradem Signum und  $\nu = (2, 1)$ , dann ist  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle = \langle \lambda \rangle + \langle \lambda \rangle^a$  mit  $\lambda = (k+2, k, k-2, \dots, 2, 1)$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  und  $\sigma(\lambda) = \sigma(\mu) + 3$ .

**Beweis.** Wir führen zunächst eine abkürzende Notation ein. Zu gegebenem  $\lambda \in \mathcal{D}_n$  und  $\mu \in \mathcal{D}_k$  bezeichnen wir mit  $S(\lambda/\mu)$  wie bisher das zugehörige verschobene Schief-Diagramm. Wir werden im Weiteren dann

$$S(\lambda/\mu) \xrightarrow{T} T(\lambda/\mu)$$

für eine gewählte Tableau-Abbildung schreiben und entsprechend

$$T(\lambda/\mu) \xrightarrow{w} w(T)$$

für die Zuordnung des Tableau-Worts zum Tableau. Des Weiteren bezeichnen wir für zwei Partitionen  $\mu$  und  $\nu$  mit  $\nu_1 \leq \mu_{\ell(\mu)}$  die Partition von  $|\mu| + |\nu|$ , die durch die Aneinanderreihung aller Teile von  $\mu$  und  $\nu$  entsteht, mit  $\mu \sqcup \nu$ . Das heißt, es ist

$$\mu \sqcup \nu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\ell(\mu)}, \nu_1, \dots, \nu_{\ell(\nu)}).$$

Wir kommen zum ersten Fall.

Es seien  $\mu \in \mathcal{D}_{n-3}^+$  eine Haken-Treppe und  $\nu = (2, 1)$ . Wir schreiben  $\mu$  in der Form  $\mu = \mu^{(1)} \sqcup \mu^{(2)}$ , wobei

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} &= (k+r, (k-1)+r, \dots, 1+r) \quad \text{eine breite Treppe, und} \\ \mu^{(2)} &= (m, m-1, \dots, 1) \quad \text{eine Treppe} \end{aligned}$$

ist. Insbesondere kann einer der beiden Teile leer sein. Weiter sei noch  $r \geq 1$ , falls  $\mu^{(1)}$  nicht leer ist und zusätzlich  $1+r > m+1$ , falls keiner der beiden Teile leer ist (im Fall  $1+r = m+1$  ist  $\mu^{(1)} \sqcup \mu^{(2)}$  eine Treppe). Betrachten wir die verschiedenen Fälle. Angenommen es ist  $\mu^{(1)}$  nicht leer und  $k \geq 2$ , dann ergeben

- (a1)  $\langle \lambda \rangle$ , mit  $\lambda = (\mu_1^{(1)} + 2, \mu_2^{(1)} + 1, \mu_3^{(1)}, \dots)$ , und  
 (a2)  $\langle \lambda \rangle$ , mit  $\lambda = (\mu_1^{(1)} + 2, \mu_2^{(1)}, \mu_3^{(1)}, \dots, 1+r, m+1, m-1, \dots, 1)$   
 (wobei hier  $\hat{\lambda} = (k+r+2, k-1+r, \dots, r+1, 1)$  ist, falls  $\mu^{(2)}$  leer ist),

irreduzible Konstituenten von  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$ . In (a1) erhält man folgendes Tableau mit Inhalt  $\nu = (2, 1)$ :

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & \end{array}$$

In (a2) erhält man ganz ähnlich das Tableau

$$\begin{array}{cc} & 1 & 1 \\ & \dots & \\ 2 & & \end{array}$$

In beiden Fällen erfüllen die Tableaus mit Wort  $w = 211$  die Eigenschaft TE.

Nehmen wir nun  $k = 1$  und  $m \geq 1$  an. In diesem Fall ist  $\lambda$  wie in (a2) wieder ein Konstituent. Des Weiteren ist

- (b1)  $\langle \lambda \rangle$  mit  $\lambda = (r+2, m+1, m, m-2, \dots)$ , wobei hier  $\lambda = (r+2, 2, 1)$ , falls  $m = 1$  ist,

ebenfalls ein Konstituent. Das zu (b1) gehörende Tableau ist:

$$\begin{array}{cc} & \dots & 1 \\ & 1 & \\ 2 & & \end{array}$$

Falls  $\mu = (k)$  mit  $k > 1$  ist, die Treppe also leer ist und die breite Treppe nur eine Stufe hat, so erhält man mit

(c1)  $\langle \lambda \rangle = \langle (k+2, 1) \rangle$  und

(c2)  $\langle \lambda \rangle = \langle (k+1, 2) \rangle$

zwei Konstituenten von  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$ . Im Fall (c2) ist das Tableau

$$\begin{array}{c} \dots 1 \\ 1 \ 2 \end{array}$$

und  $w = 121$  das zugehörige Wort.

Sei schließlich  $\mu = (k, k-1, \dots, 1)$  eine Treppe mit  $k > 1$ . Dann sind

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \times \\ \times & \times & & & & & \times \\ \times & & \times & \times & \times & & \times \\ & & & & & & \times \end{array}$$

die einzigen möglichen Schief-Diagramme der Form  $\lambda/\mu$  für irgendwelche  $\lambda$ , die ein Tableau mit Inhalt  $(2, 1)$  liefern können. Nur im ersten Fall gibt es ein Tableau, welches TE erfüllt, nämlich

$$\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ 2 \end{array}$$

Also gibt es in diesem Fall nach Bemerkung III.(2.7) nur zwei zueinander assoziierte Konstituenten von  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle (2, 1) \rangle$ . In diesem Fall ist

$$\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle (2, 1) \rangle = \langle \lambda \rangle + \langle \lambda \rangle^a$$

für  $\lambda = (k+2, k, k-2, k-3, \dots, 2, 1)$ . Da  $\mu$  als gerade Partition vorausgesetzt ist folgt, dass

$$\sigma(\mu) = \frac{k(k-1)}{2}$$

gerade ist, also  $k \equiv 0$  oder  $1 \pmod{4}$ .

Im Fall (iii) aus III.(2.4) ist  $\mu = (k, k-1, \dots, 1) \in \mathcal{D}_{n-m}$  eine Treppe und  $\nu = (m)$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Es seien  $m$  und  $k > 1$ , denn diese Fälle fallen unter die Anwendung der Branching-Rule im vorherigen Abschnitt. Dann liefern

(a)  $\lambda = (k+m, k-1, \dots, 1)$  und

(b)  $\lambda = (k+m-1, k, k-2, \dots, 1)$

irreduzible Konstituenten von  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  und damit ist  $(\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle, \langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle) > 1$ . In (a) ist das verschobene Schief-Diagramm bzw. Tableau von  $\lambda/\mu$  mit Inhalt  $\nu = (m)$  gleich

$$\underbrace{\times \times \times \dots \times}_{m\text{-mal}} \xrightarrow{T} 1 \ 1 \ \dots \ 1,$$

also erfüllt  $T$  die Bedingung TE. Im zweiten Fall ist das verschobene Schief-Diagramm bzw. Tableau gleich

$$\begin{array}{ccccccc} \times & \times & \dots & \times & \xrightarrow{T} & 1' & 1 & \dots & 1 \\ \times & & & & & 1 & & & \end{array}$$

also liefert  $w = 11'11 \dots 1$  ein TE-konformes Wort.

Nun sei  $\mu = (k, k-1, \dots, 1) \in \mathcal{D}_{n-m}$  eine Treppe — wieder mit  $k > 1$  — und  $\nu = (m-1, 1)$  mit  $m > 3$ . Dann sind

- (a)  $\langle \lambda \rangle$  mit  $\lambda = (k+m-1, k, k-2, \dots, 1)$  und
- (b)  $\langle \lambda \rangle$  mit  $\lambda = (k+m-2, k+1, k-2, \dots, 1)$

irreduzible Konstituenten von  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$ . Im ersten Fall erhalten wir

$$S(\lambda/\mu) = \begin{array}{cccc} \times & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \end{array} \xrightarrow{T} \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & & & \end{array} \xrightarrow{w} w(T) = 211 \dots 1.$$

Da  $w(T)$  TE erfüllt, ist  $\langle \lambda \rangle$  Konstituent von  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$ . In (b) ergibt sich

$$S(\lambda/\mu) = \begin{array}{cccc} \times & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & & \end{array} \xrightarrow{T} \begin{array}{cccc} 1' & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & \end{array} \xrightarrow{w} w(T) = 121'1 \dots 1.$$

Ist  $m = 4$ , so ist  $m_1(3) = m_2(3) = 1$  und  $w_{4-3} = w_1 = 1$ . Das Wort erfüllt in diesem Fall also die Gitter-Eigenschaft. In allen anderen Fällen ist  $m_1(j) > m_2(j)$  für  $0 < j \leq 2m$ , und somit erfüllt das Tableau ebenfalls TE.

Im fünften Fall aus III.(2.4) sei nun  $\mu = (k, k-1, \dots, 1) \in \mathcal{D}_{n-(2m+1)}^+$  eine Treppe und  $\nu = (m+1, m)$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq 2$  (denn  $\nu = (2, 1)$  haben wir bereits in Fall (ii) betrachtet). Da  $\mu$  eine gerade Partition ist, ist  $k(k-1)/2 = \sigma(\mu)$  gerade, also ist  $k \equiv 0$  oder  $1 \pmod{4}$ . Wir betrachten hier nur  $k > 1$ , somit ist  $k \geq 4$ . Dann liefern

- (a)  $\lambda = (k+m+1, (k-1)+m, k-2, \dots, 1)$  und
- (b)  $\lambda = (k+m+1, k+m-2, k-1, k-3, \dots, 1)$

irreduzible Konstituenten von  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$ . Im ersten Fall erhält man folgendes Tableau bzw. Tableau-Wort:

$$S(\lambda/\mu) = \begin{array}{cccccc} \times & \times & \cdots & \times & \times & \\ \times & \times & \cdots & \times & & \end{array} \xrightarrow{T} \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & & \end{array} \xrightarrow{w} w(S) = \underbrace{22 \cdots 2}_{m\text{-mal}} \underbrace{11 \cdots 11}_{(m+1)\text{-mal}}.$$

Dieses Tableau erfüllt offensichtlich TE. Im zweiten Fall erhält man mit

$$S(\lambda/\mu) = \begin{array}{cccccc} \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ \times & \times & \cdots & \times & & \\ \times & & & & & \end{array} \xrightarrow{T} \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2' & 2 & \cdots & 2 & & \\ 2 & & & & & \end{array} \xrightarrow{w} w(S) = \underbrace{22'2 \cdots 2}_{m\text{-mal}} \underbrace{11 \cdots 11}_{(m+1)\text{-mal}}$$

ebenfalls ein Tableau, welches TE erfüllt. Damit hat  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  mindestens zwei Konstituenten in  $\text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{S}}_n)$ . □

### IV.3 Serie von imprimitiven Spincharakteren der $\tilde{A}_n$

Ist  $\mu \in \mathcal{D}_n^-$ , so ist  $\langle \mu \rangle$  ein nicht selbst-assoziierter Charakter von  $\tilde{S}_n$  und folglich  $\langle \mu \rangle \downarrow \tilde{A}_n$  ein irreduzibler Charakter von  $\tilde{A}_n$  (vgl. Satz II.(4.1)).

#### (3.1) Proposition

Es sei  $\varphi$  ein irreduzibler Charakter von  $\tilde{A}_n$ . Genau dann ist  $\varphi = \sigma \uparrow \tilde{A}_n$  für einen irreduziblen Charakter  $\sigma$  von  $\tilde{A}_{n-1}$ , wenn folgendes gilt: Es ist  $\varphi = \langle \mu \rangle \downarrow \tilde{A}_n$  mit  $\mu = (m+1, m-1, m-2, \dots, 1)$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \equiv 0$  oder  $1 \pmod{4}$  ist. In diesem Fall ist  $\mu \in \mathcal{D}_n^-$  und  $\varphi = \sigma \uparrow \tilde{A}_n$  für den Spincharakter  $\sigma = \langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{A}_{n-1}$  mit  $\lambda = (m, m-1, \dots, 1) \in \mathcal{D}_{n-1}^+$ .

**Beweis.** Sei  $\sigma \in \text{Irr}(\tilde{A}_{n-1})$  mit  $\varphi := \sigma \uparrow \tilde{A}_n$  irreduzibel. Angenommen, es wäre  $\varphi \uparrow \tilde{S}_n = \langle \mu \rangle$  irreduzibel, dann wäre  $\mu \in \mathcal{D}_n^+$  (siehe II.(4.1)). Weiter müsste dann auch  $\sigma \uparrow \tilde{S}_{n-1} =: \langle \lambda \rangle$  irreduzibel sein, denn es gilt

$$(\sigma \uparrow \tilde{A}_n) \uparrow \tilde{S}_n = (\sigma \uparrow \tilde{S}_{n-1}) \uparrow \tilde{S}_n.$$

Also ist auch  $\lambda$  eine gerade Partition (von  $n-1$ ). Es gibt jedoch keine gerade Partition  $\lambda$ , so dass  $\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{S}_n = \langle \mu \rangle$  irreduzibel ist, denn für  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)})$  ist die ungerade Partition  $\nu = (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}) \in N(\lambda)$  und damit nach der Branching-Rule (siehe II.(5.3))

$$\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{S}_n = \langle \nu \rangle + \langle \nu \rangle^a + \dots$$

Es folgt  $\varphi \uparrow \tilde{S}_n = \langle \mu \rangle + \langle \mu \rangle^a$  mit einem  $\mu \in \mathcal{D}_n^-$ . Im Hinblick auf  $\sigma \uparrow \tilde{S}_n = (\sigma \uparrow \tilde{S}_{n-1}) \uparrow \tilde{S}_n$  untersuchen wir zwei Fälle:

- (i)  $\sigma \uparrow \tilde{S}_{n-1} = \langle \lambda \rangle$  mit einem  $\lambda \in \mathcal{D}_{n-1}^+$ ,
- (ii)  $\sigma \uparrow \tilde{S}_{n-1} = \langle \lambda \rangle + \langle \lambda \rangle^a$  mit einem  $\lambda \in \mathcal{D}_{n-1}^-$ .

Im Fall (ii) müsste jedoch  $\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{S}_n \in \{\langle \mu \rangle, \langle \mu \rangle^a\}$  irreduzibel sein, was dem Ergebnis in IV.(1.1) widerspricht: Die von  $\tilde{S}_{n-1}$  induzierten irreduziblen Charaktere von  $\tilde{S}_n$  gehören zu geraden Partitionen, aber  $\mu$  ist ungerade. Demnach ist nur der erste Fall möglich. Nach der Branching-Rule ist

$$\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{S}_n = \langle \mu \rangle + \langle \mu \rangle^a.$$

Man folgert wie im Beweis von IV.(1.1), dass  $\lambda = (m, m-1, \dots, 1)$  ist. Damit ist  $\mu$  von der Form wie behauptet und  $n - \ell(\mu) = n - m = m(m-1)/2 + 1$  ungerade, was gleichbedeutend mit  $m \equiv 0$  oder  $1 \pmod{4}$  ist.  $\square$

### IV.4 Mögliche imprimitive Spincharaktere anderer Art

In diesem Abschnitt untersuchen wir schließlich, ob es imprimitive Spincharaktere der  $\tilde{A}_n$  von der Form  $\alpha \uparrow \tilde{A}_n$  gibt, wobei  $\alpha$  irreduzibler Spincharakter von  $\tilde{A}_k \times_z \tilde{A}_{n-k}$  ist. Hierbei betrachten wir nur noch den Fall, dass weder  $k$  noch  $n-k$  gleich 1 ist. Im Beweis der folgenden Proposition werden wir wiederholt das Ergebnis aus Abschnitt IV.2 benutzen, wo wir die entsprechende Aussage über imprimitive Charaktere der  $\tilde{S}_n$  gemacht haben.

**(4.1) Proposition**

Sei  $\alpha$  ein irreduzibler Spincharakter von  $\tilde{A}_{n-k} \times_z \tilde{A}_k$ , und sei weder  $k$  noch  $n - k$  gleich 1, dann ist der Charakter  $\alpha \uparrow \tilde{A}_n$  reduzibel.

**Beweis.** Wir bezeichnen mit  $U$  die Untergruppe  $\tilde{S}_k \times_z \tilde{S}_{n-k}$  in  $\tilde{S}_n$ . In IV.2 haben wir bereits alle imprimitiven Charaktere der  $\tilde{S}_n$  bestimmt, welche von irreduziblen Spincharakteren solcher Untergruppen nach  $\tilde{S}_n$  induziert sind. Da das Induzieren von Charakteren transitiv ist, gilt

$$(\alpha \uparrow \tilde{A}_n) \uparrow \tilde{S}_n = (\alpha \uparrow U) \uparrow \tilde{S}_n.$$

Sei nun  $\alpha \uparrow \tilde{A}_n = \psi$  ein irreduzibler Spincharakter von  $\tilde{A}_n$ .

Wir nehmen zunächst an, dass  $\psi \uparrow \tilde{S}_n$  ebenfalls irreduzibel ist. Dann folgt mit II.(4.1), dass  $\psi \uparrow \tilde{S}_n = \langle \lambda \rangle$  ein selbst-assoziiertes Charakter ist, also  $\lambda \in \mathcal{D}_n^+$ . Andererseits ist dann aber auch  $\langle \lambda \rangle = \varphi \uparrow \tilde{S}_n$  für einen irreduziblen Charakter  $\varphi$  von  $U$ . Nach dem Ergebnis IV.(2.1) gibt es keinen solchen imprimitiven Charakter von  $\tilde{S}_n$ , also ist  $\psi \uparrow \tilde{S}_n = \langle \lambda \rangle + \langle \lambda \rangle^a$  für einen nicht selbst-assoziierten Charakter  $\langle \lambda \rangle$ , d. h.  $\lambda \in \mathcal{D}_n^-$ .

Nehmen wir nun an, dass  $\alpha \uparrow U = \varphi$  irreduzibel ist. Nach IV.(2.1) ist  $\varphi \uparrow \tilde{S}_n = \langle \lambda \rangle + \langle \lambda \rangle^a$  für ein  $\lambda \in \mathcal{D}_n$ , wenn  $\varphi = \langle \mu \rangle \otimes_z \langle 2, 1 \rangle$  mit einer Treppe  $\mu$  aus  $\mathcal{D}_n^+$  ist. In diesem Fall ist  $\varphi$  ein nicht selbst-assoziiertes Charakter (siehe II.(2.10)), also ist  $\varphi \downarrow \tilde{A}_{n-3} \otimes_z A_3 = \alpha$  und  $\alpha \uparrow U = \varphi + \varphi^a$ . (Nach III.(2.8) könnte es noch vielfachheitsfreie projektive äußere Produkte  $\langle \mu \rangle \hat{\otimes} \langle \nu \rangle$  mit  $\mu \cup \nu$  ungerade geben, die genau zwei zueinander assoziierte Konstituenten besitzen. In diesem Fall ist  $\langle \mu \rangle \otimes_z \langle \nu \rangle$  ebenfalls nicht selbst-assoziiert.) Somit ergibt sich in diesem Fall ein Widerspruch.

Es bleibt nur noch die Möglichkeit  $\alpha \uparrow U = \varphi + \varphi^a$  und  $\varphi \uparrow \tilde{S}_n = \langle \lambda \rangle$  bzw.  $\varphi^a \uparrow \tilde{S}_n = \langle \lambda \rangle^a$  (bei geeigneter Wahl der Assoziierten). Nach IV.(2.1) hat bis auf den eben erwähnten Fall jedes projektive äußere Produkt  $\varphi \uparrow \tilde{S}_n$  mindestens zwei verschiedene, nicht assoziierte Konstituenten (bzw. mindestens zwei verschiedene zueinander assoziierte Konstituenten nach Korollar III.(2.8)). Also ist auch dieser Fall nicht möglich.

Somit ist  $\alpha \uparrow \tilde{A}_n$  in allen Fällen reduzibel. □





# Literaturverzeichnis

- [Bes02] C. Bessenrodt. On Multiplicity-free Products of Schur  $P$ -functions. *Annals of Combinatorics*, 6:119–124, 2002.
- [BT82] F. Rudolf Beyl und Jürgen Tappe. *Group Extensions, Representations, and the Schur Multiplier*. Springer, 1982.
- [CR62] Charles Curtis und Irving Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Wiley, 1962.
- [CR90] Charles Curtis und Irving Reiner. *Methods of representation theory with applications to finite groups and orders*, Band 1. Wiley, 1990.
- [DM74] Dragomir Ž. Doković und Jerry Malzan. Imprimitve Irreducible Complex Characters of the Symmetric Group. *Math. Z.*, 138:219–224, 1974.
- [DM76] Dragomir Ž. Doković und Jerry Malzan. Imprimitve, irreducible complex characters of the alternating group. *Canad. J. Math.*, 28:1199–1204, 1976.
- [Dud06] Dudenredaktion. *Duden. Die deutsche Rechtschreibung*. Dudenverlag, Mannheim, 2006.
- [Fei82] Walter Feit. *The Representation Theory of Finite Groups*. North Holland Publishing Company, 1982.
- [HH92] P. N. Hoffman und J. F. Humphreys. *Projective Representations of the Symmetric Groups*. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [Hup67] Bertram Huppert. *Endliche Gruppen*. Springer, 1967.
- [Isa94] Martin Isaacs. *Character theory of finite groups*. Dover Publications Inc., New York, 1994.
- [JK81] Gordon James und Adalbert Kerber. *The representation theory of the symmetric group*. Addison-Wesley, 1981.
- [Mac79] I. G. MacDonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford University Press, Oxford, 1979.

- [Mor62] A.O. Morris. The spin representations of the symmetric group. *Proc. London Math. Soc.*, 12:55–76, 1962.
- [Mor65] A.O. Morris. The spin representations of the symmetric group. *Canad. J. Math.*, 17:543–549, 1965.
- [Noe02] Felix Noeske. Zur Darstellungstheorie der Schurschen Erweiterungen symmetrischer Gruppen. Diplomarbeit, RWTH Aachen, 2002.
- [Sch04] I. Schur. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. *J. Reine Angew. Math.*, 127:20–50, 1904.
- [Sch07] I. Schur. Untersuchung über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. *J. Reine Angew. Math.*, 132:85–137, 1907.
- [Sch11] I. Schur. Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen. *J. Reine Angew. Math.*, 139:155–250, 1911.
- [Ste89] J. R. Stembridge. Shifted Tableaux and the Projective Representations of Symmetric Groups. *Advances in Mathematics*, 74:87–134, 1989.
- [Ste01] J. R. Stembridge. Multiplicity-Free Products of Schur Functions. *Annals of Combinatorics*, 5:113–121, 2001.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press, 1994.

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.