Lie-p-Algebren und die Berechnung ihrer p-Darstellungen

von

Theresia Nolte

März 2008

An der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen zur Erlangung des akademischen Grades einer Diplom-Mathematikerin vorgelegte

DIPLOMARBEIT

in Mathematik

Angefertigt am Lehrstuhl D für Mathematik bei
Universitätsprofessor Dr. Gerhard Hiß

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Einleitung

I.1 Motivation

Klassische Lie-Algebren Lie-Algebren wurden von dem norwegischen Mathematiker Marius Sophus Lie (1842-1899) eingeführt und dienten zur Erforschung der Lie-Gruppen. Daher wurden sie zunächst nur über den Körpern der reellen und der komplexen Zahlen betrachtet.
Die Klassifikation der einfachen komplexen Lie-Algebren beruht auf ihrer Wurzelraumzerlegung beziehungsweise der Cartan-Zerlegung. Die Menge der Wurzeln bildet ein Wurzelsystem. Wurzelsysteme einfacher endlich-dimensionaler Lie-Algebren über $\mathbb{C}$ sind klassifizierbar in die verschiedenen Typen A, B, C, D, E, F und G. Diese Klassifikation wurde 1900 von Élie Cartan abgeschlossen.
Zu jeder Lie-Algebra gibt es eine assoziative Algebra, die eine „Hülle " bildet. Jede assoziative Algebra ist eine Lie-Algebra bezüglich des Kommutators $[x,y] = xy - yx$, und das Produkt der Lie-Algebra kann in dieser Hülle als Kommutator aufgefasst werden. Man nennt diese Algebra die universell einhüllende Algebra der Lie-Algebra. Sie ist eine Hopf-Algebra bezüglich des Koprodukts Δ, welches durch $x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x$ induziert wird, sowie der Koeins ε, welche durch die Nullabbildung induziert wird, und der Antipode S, welche durch $x \mapsto -x$ induziert wird, wobei jeweils alle x aus der Lie-Algebra sind.

Modulare Lie-Algebren Lie-Algebren über Körpern positiver Charakteristik nennt man modulare Lie-Algebren. Alle klassischen Lie-Algebren existieren auch über Körpern positiver Charakteristik, jedoch sind sie nicht die einzigen einfachen modularen Lie-Algebren. Die erste einfache modulare Lie-Algebra, die nicht klassisch ist, wurde von Ernst Witt gefunden.
Es gibt eine Klasse von modularen Lie-Algebren, bei denen die p-ten Potenzen aller adjungierten Abbildungen innere Derivationen sind. Diese Lie-Algebren heißen Lie-p-Algebren. Wir können in Lie-p-Algebren eine p-Potenzabbildung $x \mapsto x^{[p]}$, sowie

eine besondere „Hülle“ definieren, die wir universell p-einhüllende Algebra nennen. Auch sie ist eine assoziative Algebra. Assoziative Algebren in Charakteristik p sind Lie-p-Algebren bezüglich des Kommutators und der gewöhnlichen p-Potenzabbildung $x \mapsto x^p$, und man kann das Produkt in der Universell p-Einhüllenden Algebra als Kommutator, sowie die p-Potenzabbildung als gewöhnliche p-Potenzabbildung auffassen. Falls die Lie-p-Algebra endlich-dimensional ist, ist die universell p-einhüllende Algebra ebenfalls endlich-dimensional im Gegensatz zur Universell Einhüllenden Algebra. Die universell p-einhüllende Algebra ist eine Hopf-Algebra bezüglich der gleichen Abbildungen wie im Fall der Universell Einhüllenden Algebra.
Im Jahre 1966 vermuteten Kostrikin und Shafarevich, dass über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p > 5$ eine endlich-dimensionale einfache Lie-p-Algebra entweder klassisch oder vom Cartan-Typ ist. Diese Vermutung bewiesen Block und Wilson im Jahre 1998 für $p > 7$ ([BW98]). Auf den allgemeineren Fall einer modularen Lie-Algebra, die nicht unbedingt eine Lie-p-Algebra sein muss, bezieht sich die verallgemeinerte Kostrikin-Shafarevich-Vermutung. Sie besagt, dass jede einfache Lie-Algebra der Charakteristik $p > 5$ entweder klassisch oder eine der filtrierten Lie-Algebren vom Cartan-Typ ist. Helmut Strade bewies diese Vermutung 1998 für $p > 7$ ([PS06]). Er bewies außerdem einen Klassifikationssatz ([PS06]) über modulare Lie-Algebren für $p > 3$. Dieser Klassifikationssatz besagt, dass jede einfache Lie-Algebra der Charakteristik $p > 3$ entweder klassisch, eine der filtrierten Lie-Algebren vom Cartan-Typ oder eine der Melikian-Algebren in Charakteristik 5 ist.
Die Klassifikation der einfachen Lie-Algebren der Charakteristik < 5 ist jedoch noch nicht vollständig. Es gibt in Charakteristik 2 und 3 andere Lie-Algebren als die klassischen oder die vom Cartan-Typ. Zum Beispiel existiert in Charakteristik 3 eine Lie-p-Algebra der Dimension 18, die keinem der beiden Typen zuzuordnen ist, sowie Verwandte der Melikian-Algebren in Charakteristik 2 und 3 [Skr92], [Bro95].

Darstellungstheorie Die Darstellungen einer Lie-Algebra stehen in Bijektion zu den Darstellungen ihrer Universell Einhüllenden Algebra. Möchte man die irreduziblen Darstellungen einer einfachen Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ bestimmen, kann man diese über die Cartan-Zerlegung berechnen. Jeder endlich-dimensionale einfache Modul hat einen maximalen Vektor und ist Höchstgewichtsmodul zu diesem Vektor zu einem bestimmten Gewicht. Somit kann man die endlich-dimensionalen Darstellungen der Lie-Algebren über $\mathbb{C}$ mithilfe ihrer Gewichtsraumzerlegung beschreiben.
Bei den Lie-p-Algebren gibt es eine bestimmte Klasse von Moduln, die p-Moduln. Bei p-Moduln ist die zugehörige Darstellung invariant unter der p-Potenzabbildung.
Auch hier stehen die Darstellungen in Bijektion zu den Darstellungen ihrer Universell Einhüllenden Algebra und zusätzlich stehen die p-Darstellungen in Bijektion zu den Darstellungen ihrer Universell p-Einhüllenden Algebra. Die Berechnung aller Darstellungen einer Lie-Algebra funktionert in positiver Charakteristik allerdings nicht auf dieselbe Weise wie in Charakteristik 0, da die Cartan-Unteralgebren der

Lie-Algebren positiver Charakteristik nicht notwendig maximale torale Unteralgebren sind ([Wil80]).

Ziel der Arbeit Diese Arbeit wird sich sowohl mit den grundlegenden Begriffen der Lie-p-Algebren und ihrer Darstellungen beschäftigen, sowie konkrete Lie-Algebren vorstellen. Außerdem stellt sich wegen des Fehlens der Höchstgewichtsmodul-Methode zur Berechnung der Moduln nun die Frage, wie man die Moduln für Lie-Algebren in positiver Charakteristik ermittelt. Wir werden allerdings nicht nur theoretisch an diese Frage herangehen, sondern sie auch an einigen kleinen Lie-Algebren mithilfe des Programms GAP [GAP07] ausprobieren.

I.2 Struktur und Hauptresultate der Arbeit

Im zweiten Kapitel werden wir einige grundlegende Begriffe zu Lie-Algebren und Lie-p-Algebren, sowie einige Notationen einführen. Wir lernen die Universell Einhüllende und die universell p-einhüllende Algebra und ihre Hopf-Algebren-Eigenschaft kennen. Zum Schluss übertragen wir das Konzept der Graduierung und der Filtrierung einer Algebra auf eine Lie-Algebra.
Die Begriffe Moduln und Darstellungen werden im dritten Kapitel erläutert. Wir werden eine Methode entwickeln, alle p-Moduln einer Lie-p-Algebra zu berechnen, die über das Tensorieren von Moduln funktioniert. Hier lernen wir auch einige Eigenschaften der Universell Einhüllenden Algebra kennen und berechnen die maximale Dimension eines einfachen Moduls. Zusätzlich werden wir kurz die Chevalley-Eigenschaft einführen.
Im vierten Kapitel werden konkrete Lie-Algebren vorgestellt. Es werden nacheinander die Jacobson-Witt-Algebren $W(n,\underline{m})$, die Speziellen Algebren $S(n,\underline{m})$, die Hamilton-Algebren $H(2r,\underline{m})$, die Kontakt-Algebren $K(2r+1,\underline{m})$ und die Melikian-Algebren $\mathscr{M}(m_1,m_2)$ eingeführt. Wir werden sehen, dass alle diese einfach sind. Nach einer Untersuchung ihrer Lie-p-Algebren-Eigenschaft stellen wir fest, dass sie genau dann Lie-p-Algebren sind, wenn $\underline{m}=1$ beziehungsweise $m_1=m_2=1$ ist. Danach stellen wir die Klassifikationssätze vor. Außerdem werden wir eine Lie-Algebra in Charakteristik 3 beschreiben, die nicht der Klassifikation in Charakteristik ≥ 5 entspricht.
Um die Methode zur Berechnung der p-Moduln zu bestätigen, berechnen wir im fünften Kapitel die p-Moduln einiger kleiner einfacher Lie-p-Algebren und stellen sie tabellarisch dar. Da dieses mithilfe des Programms GAP geschieht, werden wir kurz auf die Implementierung in GAP eingehen.

Danksagung Das Thema meiner Diplomarbeit verdanke ich Professor Gerhard Hiß. Bei ihm möchte ich mich für die intensive und geduldige Betreuung während der Ausarbeitung und die zahlreichen Hilfestellungen bedanken. Seine Ratschläge trugen maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit bei. Desweiteren danke ich Frank Lübeck, der mir bei der Nutzung des Programms GAP half. Seine Anregung und Kritik zu Kapitel V waren sehr hilfreich. Felix Noeske erklärte mir das GAP-Paket Chop und sorgte somit für eine akzeptable Geschwindigkeit meiner Berechnungen. Bei Professor Bettina Eick bedanke ich mich für die freundliche Bereitstellung des GAP-Pakets Finlie.
Ferner möchte ich meinen Freunden und Kommilitonen meinen Dank aussprechen, die mich durch die Höhen und Tiefen meines Studiums begleiteten und mir immer mit Rat und Tat zur Seite standen. Zuguterletzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, auf die ich mich immer verlassen kann.

Kapitel II

Lie-, Lie-p- und Einhüllende Algebren

In diesem Kapitel möchten wir die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften von Lie-Algebren beschreiben.

II.1 Lie-Algebren

In diesem Abschnitt folgen wir [Hum72].

(1.1) Bezeichnung
In dieser Arbeit schreiben wir $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$, also ist $0 \notin \mathbb{N}$. Für $\{0,1,2,3,4,\ldots\}$ schreiben wir $\mathbb{N}_0$.

Sei K ein Körper, der in diesem Abschnitt keine weiteren Voraussetzungen erfüllen muss.

(1.2) Definition
Ein K-Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $[\cdot,\cdot] : A \times A \to A, (x,y) \mapsto [x,y]$ ist eine **Lie-Algebra**, falls für alle $x,y,z \in A$ gilt:

1. $[x,x] = 0$,

2. $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$ (**Jacobi-Identität**).

(1.3) Definition
Sei A eine K-Algebra. Eine K-lineare Abbildung $\delta : A \to A$ heißt **Derivation** von A, falls $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$ für alle $x,y \in A$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Der}(A)$ die Menge der Derivationen von A.

(1.4) Beispiel
1. Eine assoziative K-Algebra A ist eine Lie-Algebra bezüglich der Verknüpfung $[\cdot,\cdot] : A \times A \to A,\ (x,y) \mapsto [x,y] := xy - yx$.

2. Ein Spezialfall von 1. sind die linearen Lie-Algebren. Sei dazu V ein K-Vektorraum und $\mathfrak{gl}(V) := \mathrm{End}_K(V)$ und $\mathfrak{gl}(n,K) := K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Alle Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(V)$ oder $\mathfrak{gl}(n,K)$, die bezüglich $[,]$ abgeschlossen sind, wie zum Beispiel $\mathfrak{sl}(n,K) := \{x \in \mathfrak{gl}(n,K) \mid \mathrm{Spur}(x) = 0\}$ heißen **lineare Lie-Algebren**. Sie sind Lie-Algebren bezüglich der Verknüpfung $[x,y] := xy - yx$.

3. Die Menge der Derivationen einer K-Algebra A ist abgeschlossen bezüglich $[\cdot,\cdot]$ in $\mathfrak{gl}(A) = \mathrm{End}_K(A)$, das heißt, es gilt für alle $x,y \in A$, $\delta_1,\delta_2 \in \mathrm{Der}(A)$

$$\begin{aligned}
[\delta_1,\delta_2](xy) &= \delta_1\circ\delta_2(xy) - \delta_2\circ\delta_1(xy)\\
&= \delta_1(x\delta_2(y)+\delta_2(x)y) - \delta_2(x\delta_1(y)+\delta_1(x)y)\\
&= x\delta_1\circ\delta_2(y)+\delta_1(x)\delta_2(y)+\delta_1\circ\delta_2(x)y+\delta_2(x)\delta_1(y)\\
&\quad -\delta_2(x)\delta_1(y)-x\delta_2\circ\delta_1(y)-\delta_2\circ\delta_1(x)y-\delta_1(x)\delta_2(y)\\
&= x[\delta_1,\delta_2](y)+[\delta_1,\delta_2](x)y.
\end{aligned}$$

   Damit ist $\mathrm{Der}(A)$ eine Lie-Algebra.

4. Ein anderes Beispiel ist die F-Algebra $W(2,\underline{1})$, wobei F ein Körper der Charakteristik $\mathrm{char}(F) = p \in \mathbb{P}$ ist. Sie ist eine Derivationen-Algebra:

$$A := F[x,y]/(x^p,y^p),\ \ W(2,\underline{1}) := \mathrm{Der}(A).$$

   Definiere $D_x : A \to A,\ x^iy^j \mapsto x^{i-1}y^j$, wobei $x^i := 0$ für $i < 0$ gesetzt sei, und analog D_y. Dann sind D_x und D_y Derivationen. Eine Basis von $W(2,\underline{1})$ über F ist gegeben durch $\{x^iy^jD_z \mid 0 \le i,j < p,\ z = x,y\}$.

Ist L eine Lie-Algebra über K, dann ist für alle $x \in L$ die Abbildung

$$\mathrm{ad}(x) : L \to L,\ y \mapsto [x,y]$$

linear und eine Derivation von L. Alle Derivationen D, für die es ein $x \in L$ mit $D = \mathrm{ad}(x)$ gibt, heißen **innere Derivationen**.
Ist A eine K-Algebra, deren Produkt $[\cdot,\cdot]$ antikommutativ ist, das heißt, es gilt $[x,x] = 0$ für alle $x \in A$, dann zeigt eine einfache Rechnung, dass die Jacobi-Identität in A genau dann gilt, wenn für alle $x \in A$ die Abbildung $\mathrm{ad}(x)$ eine Derivation ist.

(1.5) Definition
Seien L,L' Lie-Algebren über K und $A,B \subseteq L$.

1. Für $x \in L$ bezeichnen wir mit $[x,A]$ das Vektorraum-Erzeugnis aller $[x,y]$ mit $y \in A$ und analog mit $[A,B]$ das Vektorraum-Erzeugnis aller $[x,B]$ mit $x \in A$.

   (a) Der **Kommutator** von L ist dann die Menge $L^{(1)} := [L,L]$.

(b) Wir definieren $L^{(1)} := L$, sowie $L^{(n+1)} := [L^{(n)}, L^{(n)}]$ und nennen

$$L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq L^{(3)} \dots$$

die **Kommutatorreihe** von L.

(c) L ist **auflösbar**, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $L^{(n)} = 0$.

(d) Wir definieren $L^1 := L$, sowie $L^{n+1} := [L^n, L]$ und nennen

$$L^1 \supseteq L^2 \supseteq L^3 \dots$$

die **absteigende Zentralreihe** von L.

(e) L ist **nilpotent**, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $L^n = 0$.

2. Ein **Lie-Algebren-Homomorphismus** ist eine K-lineare Abbildung $\alpha : L \to L'$ mit $\alpha([x,y]) = [\alpha(x), \alpha(y)]$ für alle $x, y \in L$. Ein **Lie-Algebren-Isomorphismus** ist ein bijektiver Lie-Algebren-Homomorphismus. Die Lie-Algebren L, L' sind **isomorph**, wenn ein Lie-Algebren-Isomorphismus $\alpha : L \to L'$ existiert.

3. Ein Untervektorraum A von L ist eine **Unter-(Lie-)Algebra**, falls $[A,A] \subseteq A$ ist.

4. Ein Untervektorraum I ist ein **Ideal** von L, falls $[x,I] \subseteq I$ für alle $x \in L$ gilt. Sei nun I ein Ideal von L.

   (a) Der Quotient $L/I = \{x + I \mid x \in L\}$ ist bezüglich $[x+I, y+I] := [x,y] + I$ für alle $x, y \in I$ eine Lie-Algebra.

   (b) Falls J ein weiteres Ideal von L ist, dann sind $I + J$ und $[I, J]$ Ideale von L.

   (c) Die üblichen Homomorphiesätze gelten.

5. Das **Zentrum** von L ist definiert als $Z(L) := \{x \in L \mid [x, L] = 0\}$ und ist ein Ideal von L. Die Lie-Algebra L heißt **abelsch**, falls $Z(L) = L$ ist.

6. Für eine Unteralgebra A von L ist der **Zentralisator** von A in L definiert als $C_L(A) := \{x \in L \mid [x, A] = 0\}$ und der **Normalisator** von A in L ist definiert als $N_L(A) := \{x \in L \mid [x, A] \subseteq A\}$.

7. Falls L nicht abelsch ist und $\{0\}$ und L die einzigen Ideale von L sind, heißt L **einfach**.

8. Eine **Darstellung** von L ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(n, K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ oder $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ für einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum V. Wir nennen eine Darstellung **treu**, falls sie injektiv ist.

9. Sei L endlich-dimensional; dann ist das **Radikal** $\mathrm{rad}(L)$ von L das eindeutig bestimmte maximale auflösbare Ideal von L. Die Lie-Algebra L ist **halbeinfach**, falls $\mathrm{rad}(L) = 0$ ist.

(1.6) Definition

1. Sei V ein K-Vektorraum und $x \in \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}_K(V)$. Falls ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ existiert, heißt x **nilpotent**.

2. Sei L eine Lie-Algebra über K und $x \in L$. Falls $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(L)$ nilpotent ist, heißt x **ad-nilpotent**.

(1.7) Satz (Satz von Engel [Hum72, 3.2])
Sei L endlich-dimensionale Lie-Algebra, so dass jedes Element von L ad-nilpotent ist. Dann ist L nilpotent.

(1.8) Definition
Sei K algebraisch abgeschlossen.

1. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Element $x \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt **halbeinfach**, falls x diagonalisierbar ist.

2. Sei $\mathrm{char}(K) = 0$, L endlich-dimensionale Lie-Algebra über K und $T \leq L$ eine Unteralgebra. Ist $\mathrm{ad}(t) \in \mathrm{End}_K(L)$ halbeinfach für alle $t \in T$, so heißt T **toral**.

3. Sei L eine endlich-dimensionale Lie-Algebra über K. Eine Unteralgebra H heißt **Cartan-Unteralgebra**, falls H nilpotent und $N_L(H) = H$ ist.

Sei ab hier K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und L eine endlich-dimensionale Lie-Algebra.

(1.9) Definition
Sei L halbeinfach und H eine maximale torale Unteralgebra. Wir definieren zu $\alpha \in H^* := \mathrm{Hom}_K(H,K)$ den **Wurzelraum** durch

$$L_\alpha := \{x \in L \mid (\mathrm{ad}(h))(x) = [h,x] = \alpha(h)x \ \forall\, h \in H\}.$$

Ein Element $0 \neq \alpha \in H^*$ mit $L_\alpha \neq 0$ heißt **Wurzel** von L bezüglich H.

Sei L halbeinfach, H eine maximale torale Unteralgebra von L und Φ die Menge der Wurzeln von L bezüglich H. Dann ist $L = C_L(H) \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha)$. Es gilt insbesondere $|\Phi| < \infty$. Weiterhin gilt, dass $H = C_L(H)$ ist (siehe [Hum72, 8.2]).
Eine maximale torale Unteralgebra H einer halbeinfachen Lie-Algebra ist abelsch und somit nilpotent. Wegen $L = H \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha)$ mit $[H,L_\alpha] = L_\alpha$ gilt $H = N_L(H)$ (siehe [Hum72, 15.3]). Insgesamt folgt, dass H eine Cartan-Unteralgebra ist.

(1.10) Definition

1. Die Abbildung $\kappa : L \times L \to K,\ (x,y) \mapsto \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y))$ heißt **Killing-Form** von L.

2. Die Menge $\mathrm{rad}(\kappa) := \{x \in L \mid \kappa(x,y) = 0$ für alle $y \in L\}$ ist das **Radikal** der Killing-Form κ.

3. Die Killing-Form κ ist **nicht ausgeartet**, wenn $\mathrm{rad}(\kappa) = 0$ ist.

(1.11) Satz ([Hum72, 5.1])
Die Killing-Form κ von L ist genau dann nicht ausgeartet, wenn L halbeinfach ist.

Wenn die Killing-Form κ von L nicht ausgeartet ist, existiert zu jedem $\mu \in H^*$ genau ein $t_\mu \in H$ mit $\mu(h) = \kappa(t_\mu, h)$ für alle $h \in H$. Definiere $(\mu,\nu) := \kappa(t_\mu, t_\nu)$ für $\mu,\nu \in H^*$. Dann ist $(\cdot,\cdot)$ eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf H^*.

(1.12) Satz ([Hum72, 8.5])
Sei L halbeinfach, H eine maximale torale Unteralgebra, Φ die Menge der Wurzeln von L bezüglich H, $E_{\mathbb{Q}} = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{Q}\alpha \leq H^*$ (der von den Wurzeln aufgespannte $\mathbb{Q}$-Vektorraum in H^*) und $E := E_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. *$\Phi \subseteq E$ und $|\Phi| < \infty$.*

2. *Die Menge E ist das Erzeugnis von Φ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und $0 \notin \Phi$.*

3. *Für $\alpha \in \Phi$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r\alpha \in \Phi$ ist $r \in \{-1, 1\}$.*

Auf E ist ein Skalarprodukt $(\ ,\ )$ definiert, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *Für $\alpha,\beta \in \Phi$ ist $\beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \Phi$.*

2. *Für $\alpha,\beta \in \Phi$ ist $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.*

Wir werden nun die Klassifikation der Lie-Algebren über den komplexen Zahlen vorstellen. Um diese Klassifikation zu veranschaulichen, führen wir den Coxeter-Graphen und das Dynkin-Diagramm des Wurzelsystems Φ einer Lie-Algebra ein.

(1.13) Definition

1. Eine Basis Δ von E mit $\Delta \subseteq \Phi$ heißt **Basis** von Φ, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

   Besitzt $\beta \in \Phi$ die Darstellung $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ mit $k_\alpha \in \mathbb{R}$, dann ist $k_\alpha \in \mathbb{N}_0$ für alle $\alpha \in \Delta$ oder $k_\alpha \in -\mathbb{N}_0$ für alle $\alpha \in \Delta$.

2. Die Elemente einer Basis heißen **einfache Wurzeln**.

3. Ist Δ eine Basis von Φ und $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$, dann ist β eine **positive Wurzel**, falls $k_\alpha \in \mathbb{N}_0$ für alle $\alpha \in \Delta$ gilt, oder eine **negative Wurzel**, falls $k_\alpha \in -\mathbb{N}_0$ für alle $\alpha \in \Delta$ gilt. Die Menge der positiven Wurzeln bezüglich einer Basis Δ bezeichnen wir mit Φ^+, die der negativen mit Φ^-.

Das Wurzelsystem Φ besitzt eine Basis. Sei nun Δ eine Basis von Φ und $\langle\beta,\alpha\rangle := \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ für $\alpha,\beta \in \Phi$.

(1.14) Definition
Der **Coxeter-Graph** von Φ ist ein Graph mit Knoten, die in Bijektion zu Δ stehen, und mit $\langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle$ Kanten zwischen α und β.

(1.15) Beispiel
Wir betrachten die zwei einfachen Wurzeln α,β mit $\langle\beta,\alpha\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle = -1$. Dann hat der Coxeter-Graph zwei Knoten und eine Kante zwischen diesen Knoten.

$$\underset{\alpha}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{\beta}{\circ}$$

(1.16) Definition
Das **Dynkin-Diagramm** von Φ ist der Coxeter-Graph von Φ mit Pfeilen an mehrfachen Kanten, die auf die kürzere Wurzel zeigen. Dabei sei eine Wurzel α genau dann kürzer als eine Wurzel β, wenn $(\alpha,\alpha) < (\beta,\beta)$ ist.

(1.17) Beispiel
Wir betrachten die zwei einfachen Wurzeln α,β mit $\langle\beta,\alpha\rangle = -2$, $\langle\alpha,\beta\rangle = -1$ und $(\alpha,\alpha) = 1 < 2 = (\beta,\beta)$. Dann hat das Dynkin-Diagramm einen „kürzeren“ und einen „längeren“ Knoten mit zwei Kanten.

$$\underset{\alpha}{\circ}\Leftarrow\underset{\beta}{\circ}$$

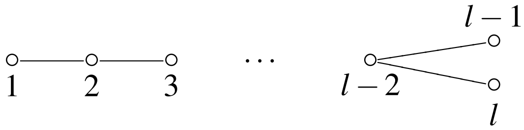
Das Dynkin-Diagramm von Φ hängt nicht von der Wahl der Basis Δ ab. Genau dann sind zwei halbeinfache Lie-Algebren isomorph, wenn sie das gleiche Dynkin-Diagramm haben; siehe [Hum72, Theorem V.18.4].

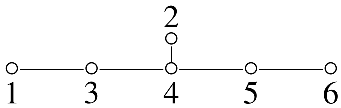
Klassifikation: Es gibt (bis auf Isomorphie) über $\mathbb{C}$ nur einfache Lie-Algebren mit Wurzelsystemen $\Phi = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$, die folgende Dynkin-Diagramme haben. In diesen Diagrammen wird der Knoten zur Wurzel α_i mit i bezeichnet.

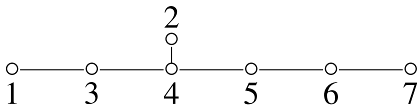
Typ A_l mit $l \geq 1$: $\underset{1}{\circ}-\underset{2}{\circ}-\underset{3}{\circ}\quad\cdots\quad\underset{l-1}{\circ}-\underset{l}{\circ}$

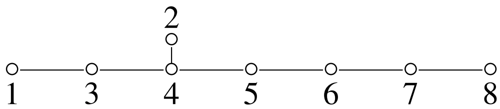
Typ B_l mit $l \geq 2$: 

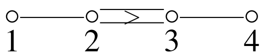
Typ C_l mit $l \geq 3$: 

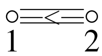
Typ D_l mit $l \geq 4$: 

Typ E_6 mit $l = 6$: 

Typ E_7 mit $l = 7$: 

Typ E_8 mit $l = 8$: 

Typ F_4 mit $l = 4$: 

Typ G_2 mit $l = 2$: 

II.2 Die universell einhüllende Algebra

In diesem Abschnitt sei L eine Lie-Algebra über einem beliebigen Körper K. Die universell einhüllende Algebra von L ist eine assoziative Algebra. Sie bildet eine „Hülle“ der Lie-Algebra, so dass man die Verknüpfung in L wie in assoziativen Algebren auffassen kann, also als $[x,y] = xy - yx$ für $x, y \in L$. Wir folgen hier [Hum72, V.17].

(2.1) Definition
Die **universell einhüllende Algebra** von L ist ein Paar $(\mathscr{U}, \iota)$, wobei $\mathscr{U}$ eine assoziative K-Algebra ist und $\iota : L \to \mathscr{U}$ eine lineare Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

1. ι ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus.

2. Für alle assoziativen K-Algebren $\mathscr{U}'$ und jeden Lie-Algebren-Homomorphismus $\kappa : L \to \mathscr{U}'$ existiert genau ein K-Algebren-Homomorphismus $\varphi : \mathscr{U} \to \mathscr{U}'$ mit $\kappa = \varphi \circ \iota$.

Falls die universell einhüllende Algebra existiert, ist sie eindeutig bis auf Isormophie und wir schreiben für diese eindeutige Algebra $\mathscr{U}(L)$.
Für eine Menge X bezeichnen wir im Folgenden mit $K\langle X\rangle$ die freie assoziative K-Algebra über X.
Wir konstruieren nun die universell einhüllende Algebra $\mathscr{U}(L)$. Dazu wählen wir eine Basis X von L, eine weitere Menge $\bar{X}$, die zu X gleichmächtig ist und durch $\iota : X \to \bar{X}$ in Bijektion zu X steht. Wir schreiben $\bar{x} := \iota(x)$ für $x \in X$. Man kann nun ι zu einer linearen Abbildung $\iota : L \to K\langle\bar{X}\rangle$ fortsetzen. Sei außerdem I das Ideal in $K\langle\bar{X}\rangle$, welches durch $\bar{x}\bar{y} - \bar{y}\bar{x} - \iota([x,y])$ für $x,y \in X$ erzeugt wird. Wir setzen nun $\mathscr{U} := K\langle\bar{X}\rangle/I$. Sei $\bar{\pi} : K\langle\bar{X}\rangle \to \mathscr{U}$ die kanonische Abbildung und bezeichne ι auch die Komposition $\pi \circ \iota$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & K\langle\bar{X}\rangle \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathscr{U} \end{tikzcd}$$

Dann ist $(\mathscr{U}, \iota)$ die Universell Einhüllende von L.
Wir suchen nun eine Basis der Universell Einhüllenden Algebra von L. Dazu ordnen wir die Basis X mit Hilfe einer Menge J, die wohlgeordnet ist und in Bijektion zu X steht, das heißt, es gibt eine bijektive Abbildung $J \to X$, $j \mapsto x_j$. Sei $<$ die Wohlordung von J. Insgesamt ist eine Bijektion $J \to \bar{X}$, $j \mapsto \bar{x}_j := \iota(x_j)$ definiert. Damit ist eine Wohlordnung auf $\bar{X} = \{\bar{x}_j \mid j \in J\}$ gegeben durch $\bar{x}_i < \bar{x}_j :\Leftrightarrow i < j$.

(2.2) Theorem (Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt)
Mit obigen Bezeichnungen ist die Menge

$$\{\bar{x}_{j_1} \cdots \bar{x}_{j_n} + I \mid j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$$

eine K-Basis von $\mathscr{U}$.

Aus Theorem II.(2.2) folgt insbesondere, dass $\iota : L \to \mathscr{U}$ injektiv ist. Man kann nun L als Teilmenge von $\mathscr{U}(L)$ auffassen. Dann kann man für obige Basis auch

$$\{x_{j_1} \cdots x_{j_n} \mid j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$$

schreiben.

II.3 Lie-p-Algebren

Sei F ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Wir folgen hier [SF88, Abschnitt 2.1].
Sei A eine assoziative Algebra über F, X eine Unbestimmte über A. Definiere $A[X]$ durch $A[X] := \{\sum_{i=1}^{n} a_i X^i \mid a_i \in A, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Durch $aX^i \cdot bX^j = abX^{i+j}$ und distributive Fortsetzung wird eine Multiplikation auf $A[X]$ definiert. Mit dieser Multiplikation wird $A[X]$ zu einer F-Algebra.

(3.1) Lemma

1. *Sei A eine assoziative Algebra über F, X eine Unbestimmte über A. Dann existiert eine eindeutig bestimmte F-lineare Abbildung $D \in \mathrm{Der}(A[X])$, so dass $D(aX^i) = iaX^{i-1}$ für alle $a \in A$ und $i \in \mathbb{N}_0$ gilt.*

2. *Ist A eine assoziative Algebra, so gilt $\mathrm{ad}(x)^n(y) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^i \cdot y \cdot x^{n-i}$.*

Beweis.

1. Es gilt für alle $a, b \in A$ und $i, j \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} D(aX^i \cdot bX^j) &= D(abX^{i+j}) \\ &= (i+j)abX^{i+j-1} \\ &= iaX^{i-1} \cdot bX^j + aX^i \cdot jbX^{j-1} \\ &= D(aX^i) \cdot bX^j + aX^i D(bX^j). \end{aligned}$$

   Aufgrund der Linearität von D folgt, dass D eine Derivation ist.

   Sei $D' \in \mathrm{Der}(A[X])$ ein weiteres Element mit $D'(aX^i) = iaX^{i-1}$ für alle $a \in A$ und $i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $(D' - D)(aX^i) = 0$ für alle $a \in A$ und $i \in \mathbb{N}_0$, also $D = D'$.

2. Wir zeigen die Behauptung per vollständiger Induktion. Der Fall $n = 0$ ist trivial. Ist die Formel für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ wahr, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(x)^{n+1}(y) &= [x, \mathrm{ad}(x)^n(y)] = [x, \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i} y x^i] \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} [x, x^{n-i} y x^i] \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (x^{n-i+1} y x^i - x^{n-i} y x^{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i+1} y x^i + \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} x^{n-i} y x^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i+1} y x^i + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \binom{n}{i-1} x^{n+1-i} y x^i \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n+1}{i} x^{n-i+1} y x^i + x^{n+1} y + (-1)^{n+1} y x^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} x^{n-i+1} y x^i. \end{aligned}$$

❑

Ist nun A eine assoziative F-Algebra, so gilt wegen $p \mid \binom{p}{i}$ für alle $1 \leq i \leq p-1$

$$\mathrm{ad}(x)^p(y) = x^p y - y x^p = \mathrm{ad}(x^p)(y). \tag{1}$$

Wir möchten nun wissen, wie sich die Vektorraumstruktur bezüglich der Abbildung $A \to A,\ x \mapsto x^p$ verhält. Es ist

$$(\alpha x)^p = \alpha^p x^p$$

für alle $\alpha \in F, x \in A$. Schließlich interessiert uns die Entwicklung von $(a+b)^p$ nach $a,b \in A$. Sei dazu X eine Unbestimmte über A und betrachte für a und b das Polynom

$$(aX+b)^p = a^p X^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b) X^i \tag{2}$$

mit $s_i(a,b) \in A$. Wenden wir nun die Derivation D aus Lemma II.(3.1) 1. auf (2) an, so erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{p-1} (aX+b)^i a (aX+b)^{p-1-i} = \sum_{i=1}^{p-1} i s_i(a,b) X^{i-1},$$

wobei die linke Seite durch Induktion bewiesen wird. Es gilt $\binom{p-1}{i} = (-1)^i$ wegen $\mathrm{char}(F) = p$ und damit gilt

$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p-1}{i} (aX+b)^i a (aX+b)^{p-1-i} = \sum_{i=1}^{p-1} i s_i(a,b) X^{i-1},$$

und mit der Formel aus Lemma II.(3.1) 2. und $p \mid \binom{p}{i}$ für alle $1 \leq i \leq p-1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(aX+b)^{p-1}(a) &= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p-1}{i} (aX+b)^i a (aX+b)^{p-1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} i s_i(a,b) X^{i-1}. \end{aligned}$$

Setzen wir $X = 1$, so folgt

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b). \tag{3}$$

Damit haben wir $i s_i(a,b)$ als den Koeffizienten von X^{i-1} in dem Polynom $\mathrm{ad}(aX+b)^{p-1}(a) \in A[X]$ identifiziert.

(3.2) Lemma
Sei L eine Lie-Algebra über F und seien $a,b \in L$. Sei $A := \mathscr{U}(L)$ die universell einhüllende Algebra von L. Betrachte die Lie-Algebra H, die durch a und b erzeugt wird. Dann ist $s_i(a,b) \in H^p$, wobei $s_i(x,y)$ wie in (2) definiert sei. (Hierbei ist H^p das p-te Glied in der absteigenden Zentralreihe von H, vergleiche II.(1.5)).

Beweis. Sei X eine Unbestimmte über A. Dann ist

$$[aX^i, bX^j] = aX^i bX^j - bX^j aX^i = abX^{i+j} - baX^{i+j}.$$

Damit ist $\mathrm{ad}(aX+b)(a) = [a,a]X + [b,a] = [b,a] \in H^2$. Sei nun $h = \sum_{i=0}^m a_i X^i$ mit $a_i \in H^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(aX+b)(h) &= \sum_{i=0}^m [aX+b, a_i X^i] \\ &= \sum_{i=0}^m [a,a_i]X^{i+1} + [b,a_i]X^i. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von X^i sind Elemente von H^{n+1}. Mit Induktion folgt, dass die Koeffizienten von $\mathrm{ad}(aX+b)^{n+1}(a)$ in H^{n+2} liegen. Insbesondere ist $s_i(a,b) \in H^p$ für alle $1 \leq i \leq p-1$. ❑

(3.3) Definition ([SF88, 2.1])
Die Lie-Algebra L ist eine **Lie-p-Algebra** (restricted Lie algebra), falls eine Abbildung $[p] : L \to L,\ x \mapsto x^{[p]}$ definiert ist, so dass für alle $x, y \in L,\ a \in F$ gilt:

1. $\mathrm{ad}(x^{[p]}) = \mathrm{ad}(x)^p$
2. $(ax)^{[p]} = a^p x^{[p]}$
3. $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y)$, wobei $s_i(x,y)$ wie in (2) definiert sei. (Nach Lemma II.(3.2) liegen die $s_i(x,y)$ in L).

Die Abbildung $[p]$ heißt **p-Potenzabbildung** von L.

(3.4) Beispiel (siehe Beispiel II.(1.4))

1. Ist L eine assoziative F-Algebra ($[x,y] = xy - yx$), dann ist L eine Lie-p-Algebra bezüglich $x^{[p]} := x^p$ für alle $x \in L$.
2. Jede Lie-Algebra L, die eine Unter-Lie-Algebra einer assoziativen Algebra ist und für die $x^p \in L$ für alle $x \in L$ gilt, ist eine Lie-p-Algebra.
3. Als Spezialfall von 1. ist die Derivationenalgebra einer Lie-Algebra L als lineare Algebra $\mathrm{Der}(L) \subseteq \mathfrak{gl}(L)$ eine Lie-p-Algebra.
4. Ist $L = W(2, \underline{1})$, dann ist L eine Lie-p-Algebra bezüglich $D^{[p]} = D^p$ für alle $D \in L$.

Beweis.

1. Die 1. Bedingung aus II.(3.3) folgt aus II.(3.1) 2., die 2. Bedingung ist trivial, und die 3. Bedingung folgt aus (3).

2. Klar.

3. Es ist zu zeigen, dass $D^p \in \mathrm{Der}(L)$ ist. Wir zeigen dazu die Leibniz-Regel

$$D^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^i(x) \cdot D^{n-i}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0,\ \forall\, x,y \in L$$

per vollständiger Induktion nach n. Im Fall $n = 0$ lautet die Formel

$$xy = D^0(xy) = D^0(x)D^0(y) = xy.$$

Ist die Formel für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ wahr, dann gilt

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(xy) &= D^n(D(x)y + xD(y)) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^{i+1}(x) \cdot D^{n-i}(y) + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^i(x) \cdot D^{n-i+1}(y) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} D^i(x) \cdot D^{n+1-i}(y) + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^i(x) \cdot D^{n-i+1}(y) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} D^i(x) \cdot D^{n+1-i}(y) + D^{n+1}(x)y + xD^{n+1}(y) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} D^i(x) \cdot D^{n+1-i}(y).
\end{aligned}$$

Also ist $D^p(xy) = D^p(x)y + xD^p(y)$ wegen $p \mid \binom{p}{i}$ für alle $1 \leq i \leq p-1$ und damit $D^p \in \mathrm{Der}(L)$.

4. Die Algebra $A = F[x,y]/(x^p + y^p)$ ist als assoziative Algebra eine Lie-Algebra. Damit ist $L = \mathrm{Der}(A) \subseteq \mathfrak{gl}(L)$ eine Lie-p-Algebra bezüglich $D^{[p]} = D^p$.

❏

(3.5) Definition
Seien L, L' zwei Lie-p-Algebren über F mit p-Potenzabbildungen $[p]$, $[p]'$.

1. Ein p-**Homomorphismus** ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus $\varphi : L \to L'$ mit $\varphi(x^{[p]}) = \varphi(x)^{[p]'}$ für alle $x \in L$.

2. Ein p-**Isomorphismus** ist ein bijektiver p-Homomorphismus.

3. Die Lie-p-Algebren L, L' sind **isomorph**, falls ein p-Isomorphismus $\varphi : L \to L'$ existiert.

4. Eine p-**Darstellung** von L ist eine Darstellung von L, die gleichzeitig ein p-Homomorphismus ist.

5. Ein Ideal I von L heißt p-**Ideal**, falls $x^{[p]} \in I$ für alle $x \in I$ ist.

6. Eine Unter-Lie-Algebra M von L heißt p-**Unteralgebra**, falls $x^{[p]} \in M$ für alle $x \in M$ ist.

Für V, W Vektorräume über F ist eine Abbildung $f : V \to W$ p-**semilinear** ist, falls für alle $\alpha \in F$, $x, y \in L$ gilt: $f(\alpha x + y) = \alpha^p f(x) + f(y)$.

(3.6) Proposition
Sei L eine Unteralgebra einer Lie-p-Algebra $(G, [p])$ und sei $[p]_1 : L \to L$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *$[p]_1$ ist eine p-Potenzabbildung.*

2. *Es gilt $[p]_1 = [p] + f$ für eine p-semilineare Abbildung $f : L \to C_G(L)$.*

Beweis. Sei $[p]_1$ eine p-Potenzabbildung und betrachte $f(x) := x^{[p]_1} - x^{[p]}$. Wegen $\mathrm{ad}(f(x))(y) = 0$ für alle $x, y \in L$ (II.(3.3) 1.) bildet f in den Zentralisator $C_G(L)$ ab. Für $x, y \in L$ und $a \in F$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f(ax+y) &= a^p x^{[p]_1} + y^{[p]_1} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(ax,y) - a^p x^{[p]} - y^{[p]} - \sum_{i=1}^{p-1} s_i(ax,y) \\ &= a^p f(x) + f(y), \end{aligned}$$

wobei s_i wie in II.(3.3) 3. definiert ist. Wir nehmen nun an, dass f p-semilinear ist. Für $x, y \in L$ gilt

$$\begin{aligned} (x+y)^{[p]_1} &= (x+y)^{[p]} + f(x+y) \\ &= x^{[p]} + f(x) + y^{[p]} + f(y) + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y) \\ &= x^{[p]_1} + y^{[p]_1} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y). \end{aligned}$$

❑

(3.7) Theorem (Jacobson, [SF88, Theorem 2.2.3])
Sei L eine Lie-Algebra über F und $(e_j)_{j\in J}$ eine Basis von L, so dass $y_j \in L$ mit $\mathrm{ad}(e_j)^p = \mathrm{ad}(y_j)$ existieren. Dann gibt es genau eine p-Potenzabbildung $[p] : L \to L$ mit $e_j^{[p]} = y_j$ für alle $j \in J$.

Beweis. Sei $z \in L$ und $j \in J$. Nach Beispiel II.(3.4) ist die assoziative Algebra $\mathscr{U}(L)$ eine Lie-p-Algebra bezüglich der p-Potenzabbildung x^p für alle $x \in \mathscr{U}(L)$. Dann gilt in der Universell Einhüllenden Algebra $0 = (\mathrm{ad}(e_j)^p - \mathrm{ad}(y_j))(z) = [e_j^p - y_j, z]$ für alle $z \in L$ wegen (1). Also ist $e_j^p - y_j$ in $C_{\mathscr{U}(L)}(L)$, dem Zentralisator von L in $\mathscr{U}(L)$. Definiere die p-semilineare Abbildung $f : L \to C_{\mathscr{U}(L)}$ durch

$$f(\sum_{j\in J} a_j e_j) := \sum_{j\in J} a_j^p (y_j - e_j^p)$$

und betrachte $V := \{x \in L \mid x^p + f(x) \in L\}$. Sei s_i wie in II.(3.3) 3. definiert und $x, y \in L$, sowie $a \in F$. Wegen

$$(ax+y)^p + f(ax+y) = a^p x^p + y^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(ax,y) + a^p f(x) + f(y)$$

und II.(3.2) ist V ein Untervektorraum von L. Da jedes e_j $(j \in J)$ in V liegt, ist $x^p + f(x) \in L$ für alle $x \in L$, das heißt, es ist $V = L$. Mit Proposition II.(3.6) folgt dann, dass $[p] : L \to L$, $x^{[p]} := x^p + f(x)$ eine p-Potenzabbildung auf L ist. Wir erhalten zusätzlich $e_j^{[p]} = e_j^p + f(e_j) = y_j$ für alle $j \in J$.
Wir nehmen an, dass $[p]' : L \to L$ eine zweite p-Potenzabbildung mit $e_j^{[p]'} = y_j$ für alle $j \in J$ ist. Dann ist $f = [p] - [p]'$ eine p-semilineare Abbildung mit $f(e_j) = 0$ für alle $j \in J$ und es folgt mit $x^{[p]} = x^{[p]'}$ für alle $x \in L$ die Eindeutigkeit. ❑

(3.8) Bemerkung
Eine Lie-Algebra L hat genau dann eine p-Potenzabbildung, die sie zu einer Lie-p-Algebra macht, wenn $\mathrm{ad}(L)$ eine p-Unteralgebra von $\mathrm{Der}(L)$ ist, das heißt, wenn $\mathrm{ad}(x)^p \in \mathrm{ad}(L)$ für alle $x \in L$ ist.

Beweis. Die Hinrichtung ist klar. Die Rückrichtung kann man mit II.(3.7) zeigen. ❑

(3.9) Lemma
Sei V ein F-Vektorraum und $f : V \to V$ eine p-semilineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *Das Erzeugnis von $f(V)$ ist V.*

2. *Zu jedem $v \in V$ existieren $a_1, \dots, a_n \in F$ mit $v = \sum_{i=1}^n a_i f^i(v)$.*

Beweis. Die Rückrichtung ist offensichtlich. Sei $v \in V$ und

$$U = \{\sum_{i=1}^n a_i f^i(v) \mid a_i \in F, 1 \le i \le n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Weil U ein f-invarianter Unterraum von V ist, induziert U eine p-semilineare Abbildung

$$\bar{f} : V/U \to V/U,\ x + U \mapsto f(x) + U$$

mit $\langle \bar{f}(V/U) \rangle = V/U$. Der Raum V/U erhält eine F-Vektorraumstruktur durch $a.w := a^p w$ für $a \in F$ und $w \in V/U$. Die Abbildung f ist bezüglich der so erhaltenen Struktur linear. Die Unterräume bezüglich dieser Struktur sind genau die F^p-Unterräume von V/U. Dabei ist $F^p = \{a^p \mid a \in F\}$, ein Teilkörper von F. Da eine F^p-Basis von $\bar{f}(V/U)$ ein Erzeugendensystem für den F-Vektorraum $\langle \bar{f}(V/U) \rangle$ ist, haben wir $\dim_F \langle \bar{f}(V/U) \rangle \le \dim_{F^p} \bar{f}(V/U)$. Damit gilt die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} \dim_F V/U &= \dim_F \mathrm{Kern}(\bar{f}) + \dim_{F^p} \bar{f}(V/U) \\ &\ge \dim_F \mathrm{Kern}(\bar{f}) + \dim_F \langle \bar{f}(V/U) \rangle \\ &= \dim_F \mathrm{Kern}(\bar{f}) + \dim_F V/U. \end{aligned}$$

Wir erhalten $\mathrm{Kern}(\bar{f}) = 0$. Wegen $v + U \in \mathrm{Kern}(\bar{f})$ ist $v \in U$. ❑

(3.10) Beispiel (Klassische Lie-Algebren [Str04, 4.1])
Sei $\mathscr{G}$ eine einfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$, $\mathscr{H}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathscr{G}$, $\Phi = \Phi(\mathscr{G}, \mathscr{H})$ das zugehörige Wurzelsystem und $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ eine Basis von einfachen Wurzeln in Φ. Für $\alpha, \beta \in \Phi$ sei $\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$, wobei $(\cdot, \cdot)$ das Skalarprodukt von II.(1.12) sei. Dann gilt:
Die Lie-Algebra $\mathscr{G}$ hat eine Basis $\mathscr{B} = \{e_\alpha \mid \alpha \in \Phi\} \cup \{h_i \mid 1 \le i \le l\}$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $[h_i, h_j] = 0, 1 \le i, j \le l.$

2. $[h_i, e_\beta] = \langle \beta, \alpha_i \rangle e_\beta, 1 \le i \le l, \beta \in \Phi.$

3. $[e_\alpha, e_{-\alpha}] =: h_\alpha$ ist eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von $h_1, \dots, h_l$.

4. Seien $\alpha, \beta \in \Phi, \beta \ne \pm\alpha$ und sei $\{\beta - q\alpha, \dots, \beta + r\alpha\}$ eine α-Kette durch β. Dann ist $[e_\alpha, e_\beta] = 0$, falls $\alpha + \beta \notin \Phi$, und $[e_\alpha, e_\beta] = \pm(q+1)e_{\alpha+\beta}$, falls $\alpha + \beta \in \Phi$. Außerdem ist $q \in \{0, 1, 2\}$, falls $\alpha + \beta \in \Phi$.

Diese Basis ist eine **Chevalley-Basis** von $\mathcal{G}$. Das $\mathbb{Z}$-Erzeugnis von $\mathcal{B}$, $\mathcal{G}_{\mathbb{Z}}$ ist abgeschlossen unter der Lie-Klammer. Also ist $\mathcal{G}_F := \mathcal{G}_{\mathbb{Z}} \otimes F$ eine Lie-Algebra über F mit Basis $\mathcal{B} \otimes 1$. Ihre Strukturkonstanten erhält man aus denen für $\mathcal{G}_{\mathbb{Z}}$ durch Reduktion modulo p. Für $p > 3$ ist die Lie-Algebra $\mathcal{G}_F$ nur dann nicht einfach, falls das Wurzelsystem Φ vom Typ A_l mit $l = mp - 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist. Dann ist die Lie-Algebra $\mathcal{G}_F / Z(\mathcal{G}_F) \cong \mathfrak{psl}(mp)$ einfach. Die Lie-Algebren, die man auf diese Art und Weise erhält, nennt man **klassisch**. Alle klassischen Lie-Algebren sind Lie-p-Algebren mit p-Potenzabbildung gegeben durch $(e_\alpha \otimes 1)^{[p]} = 0$ und $(h_i \otimes 1)^{[p]} = h_i \otimes 1$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $1 \leq i \leq l$.

Sei F algebraisch abgeschlossen, L eine endlich-dimensionale Lie-Algebra über F und H eine Cartan-Unteralgebra von L. Wir definieren für $h \in H$ und $\alpha \in H^*$ die Menge

$$L_\alpha = \{x \in L \mid \forall h \in H\ \exists n(h,x) \in \mathbb{N} :\ (\mathrm{ad}(h) - \alpha(h)\,\mathrm{id}_L)^{n(h,x)}(x) = 0\}.$$

Es gilt $H = L_0$. Falls $L_\alpha \neq 0$ gilt, heißt die Linearform $\alpha : H \to F$ **Wurzel** und die Menge L_α **Wurzelraum** von L bezüglich H.

(3.11) Korollar (Zassenhaus [SF88, 1.4.4])
Sei F algebraisch abgeschlossen, L eine endlich-dimensionale Lie-Algebra über F und H eine Cartan-Unteralgebra von L. Dann ist $L = \bigoplus_{\alpha \in H^*} L_\alpha$.

Diese Zerlegung von L nennt man **Wurzelraumzerlegung** von L bezüglich H.

II.4 Die universell p-einhüllende Algebra

Für Lie-p-Algebren gibt es ein Analogon zu der Universell Einhüllenden Algebra, die universell p-einhüllende Algebra. Sie hat einen Vorteil gegenüber der Universell Einhüllenden Algebra. Falls L endlich-dimensional ist, ist die universell p-einhüllende Algebra es auch. Definiert wird sie analog zur Universell Einhüllenden Algebra. Wir folgen hier [SF88, Abschnitt 2.5].
Sei also in diesem Abschnitt F ein Körper der Charakteristik p und L eine Lie-p-Algebra über F.

(4.1) Definition
Die **universell p-einhüllende Algebra** (restricted universal enveloping algebra) von L ist ein Paar $(\mathcal{U}_p, \iota)$ mit einer assoziativen F-Algebra $\mathcal{U}_p$ und einer linearen Abbildung $\iota : L \to \mathcal{U}_p$, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. ι ist ein p-Homomorphismus.
2. Für alle assoziativen F-Algebren $\mathcal{U}'$ und jeden p-Homomorphismus $\kappa : L \to \mathcal{U}'$ existiert genau ein F-Algebren-Homomorphismus $\varphi : \mathcal{U}_p \to \mathcal{U}'$ mit $\kappa = \varphi \circ \iota$.

Die universelle Eigenschaft der universell p-einhüllende Algebra zeigt, dass es bis auf Isomorphie höchstens eine universell p-einhüllende Algebra gibt.

(4.2) Theorem

1. *Die universell p-einhüllende Algebra von L existiert.*

2. *Es existiert ein Ideal I in $\mathscr{U}(L)$, so dass mit den II.(2.2) nachfolgenden Konventionen gilt: Die Menge*

$$B := \{x_{j_1}^{s_1} \cdots x_{j_n}^{s_n} + I \mid j_1 < \ldots < j_n,\ 0 \le s_k \le p-1,\ 1 \le k \le n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

bildet eine Basis von $\mathscr{U}_p(L) := \mathscr{U}(L)/I$ über F. Insbesondere ist $\iota : L \to \mathscr{U}_p(L)$ injektiv und $\dim_F \mathscr{U}_p(L) = p^n$, falls $\dim_F L = n$.

Beweis. Für $j \in J$ ist $z_j := x_j^p - x_j^{[p]} \in Z(\mathscr{U}(L))$. Dann ist $I := \sum_{j \in J} z_j \mathscr{U}(L)$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathscr{U}(L)$, weil die z_j zentral sind. Die Menge B ist linear unabhängig in $\mathscr{U}_p(L)$ (siehe [SF88, Lemma 1.9.7]). Sie erzeugt $\mathscr{U}_p(L)$ als F-Vektorraum wegen $x^p + I = x^{[p]} + I \in L + I$ für $x \in L$. Sei $\iota : \mathscr{U}(L) \to \mathscr{U}_p(L) = \mathscr{U}(L)/I$ die kanonische Abbildung. Dann gilt für alle $x \in L$

$$\iota(x)^p = \iota(x^p) = \iota(x^{[p]}).$$

Sei nun A eine assoziative Algebra und $f : L \to A$ ein p-Homomorphismus. Dann besitzt f eine eindeutige Fortsetzung $g : \mathscr{U}(L) \to A$. Wegen

$$g(z_j) = g(x_j^p - x_j^{[p]}) = g(x_j)^p - g(x_j^{[p]}) = f(x_j)^p - f(x_j^{[p]}) = 0$$

für alle j erhalten wir $g(I) = 0$. Damit existiert ein Homomorphismus $\bar{f} : \mathscr{U}(L)/I \to A$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & \mathscr{U}(L) \arrow[r, "\text{kan.}"'] \arrow[d, "g"] & \mathscr{U}_p(L) \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Weil $\mathscr{U}_p(L)$ durch $\iota(L)$ erzeugt wird, ist $\bar{f}$ eindeutig durch die Gleichung $\bar{f} \circ \iota = f$ bestimmt. ❑

Wir bezeichen nun die universell p-einhüllende Algebra wie in II.(4.2) mit $\mathscr{U}_p(L)$. Aus Theorem II.(4.2) folgt insbesondere, dass $\iota : L \to \mathscr{U}_p(L)$ injektiv ist. Man kann nun L als Teilmenge von $\mathscr{U}_p(L)$ auffassen. Dann kann man für obige Basis B auch

$$\{x_{j_1}^{s_1} \cdots x_{j_n}^{s_n} \mid j_1 < \ldots < j_n,\ 0 \le s_k \le p-1,\ 1 \le k \le n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

schreiben.

II.5 Hopf-Algebren

Die universell einhüllende Algebra und die universell p-einhüllende Algebra haben eine spezielle Struktur, sie sind Hopf-Algebren.
Für einen Körper K und K-Vektorräume U,V schreiben wir $U \otimes V := U \otimes_K V$.

(5.1) Definition
Sei K ein Körper.

1. Ist A ein K-Vektorraum, so nennen wir (A,Δ,ε) (oder kurz: A) eine **Koalgebra**, falls zwei lineare Abbildungen $\Delta : A \to A \otimes A$ und $\varepsilon : A \to K$ mit folgenden Eigenschaften existieren:

   (a) $(\Delta \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta = (\mathrm{id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}_A"'] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

   (b) $m_r \circ (\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}_A = m_l \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta$,

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon"'] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}_A"] \\ A \otimes K \arrow[r, "m_r"'] & A & K \otimes A \arrow[l, "m_l"] \end{tikzcd}$$

   wobei $m_r : A \otimes K,\ a \otimes x \mapsto ax$ beziehungsweise $m_l : K \otimes A,\ x \otimes a \mapsto xa$ die Links- beziehungsweise Rechtsoperation des Körpers auf der Algebra seien. Die Abbildung Δ beziehungsweise ε heißen **Koprodukt** beziehungsweise **Koeins**.

2. Für Koalgebren A und C ist die Abbildung $f : A \to C$ ein **Koalgebren-Homomorphismus**, falls $(f \otimes f) \circ \Delta_A = \Delta_C \circ f$ und $\varepsilon_C \circ f = \varepsilon_A$ erfüllt ist.

Ist B eine Algebra mit Multiplikations-Abbildung $m : B \otimes B \to B$ und Eins-Abbildung $\eta : K \to B$, so sind (a) und (b) „dual" anolog zu Assoziativität und Einheitseigenschaft von m und η.

(5.2) Definition
Sei nun A eine Algebra (mit Struktur-Abbildungen m,η) und eine Koalgebra (mit Struktur-Abbildungen Δ,ε). Dann heißt A **Bialgebra**, falls Δ und ε Algebren-Homomorphismen sind, oder (äquivalent) falls m und η Koalgebren-Homomorphismen sind. Falls zusätzlich eine lineare Abbildung $S : A \to A$ existiert, die

$$m \circ (S \otimes id_A) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (id_A \otimes S) \circ \Delta$$

erfüllt, ist A eine **Hopf-Algebra**.

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[dd, "\mathrm{id}_A\otimes S"'] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A\otimes A \arrow[dd, "S\otimes \mathrm{id}_A"] \\
 & K \arrow[d, "\eta"'] & \\
A\otimes A \arrow[r, "m"'] & A & A\otimes A \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung S heißt in diesem Fall **Antipode**.

Die Antipode S einer Hopf-Algebra H ist eindeutig und sowohl ein Algebren-, als auch ein Koalgebren-Antiautomorphismus ($S(xy) = S(y)S(x)$ für alle $x, y \in H$).

(5.3) Beispiel

1. Sei L eine Lie-Algebra über einem Körper K.

   $\mathscr{U}(L)$ ist eine Hopf-Algebra bezüglich

$$\Delta : \mathscr{U}(L) \to \mathscr{U}(L) \otimes \mathscr{U}(L) \text{ induziert durch } x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x,$$

$$\varepsilon : \mathscr{U}(L) \to K \text{ induziert durch } x \mapsto 0,$$

$$S : \mathscr{U}(L) \to \mathscr{U}(L) \text{ induziert durch } x \mapsto -x$$

   für alle $x \in L$.

2. Sei L eine Lie-p-Algebra über einem Körper F, $\mathrm{char}(F) = p \neq 0$.

   $\mathscr{U}_p(L)$ ist eine Hopf-Algebra bezüglich

$$\Delta_p : \mathscr{U}_p(L) \to \mathscr{U}_p(L) \otimes \mathscr{U}_p(L) \text{ induziert durch } x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x,$$

$$\varepsilon_p : \mathscr{U}_p(L) \to F \text{ induziert durch } x \mapsto 0,$$

$$S_p : \mathscr{U}_p(L) \to \mathscr{U}_p(L) \text{ induziert durch } x \mapsto -x$$

   für alle $x \in L$.

Beweis. Die Abbildungen sind per Definition Algebren-Homomorphismen. Wir überprüfen ihre Eigenschaften:

1. Für $x \in L$ gilt

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)})(\Delta(x)) &= (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)})(1 \otimes x + x \otimes 1) \\
&= 1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1, \\
(\mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)} \otimes \Delta)(\Delta(x)) &= (\mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)} \otimes \Delta)(1 \otimes x + x \otimes 1) \\
&= 1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1.
\end{aligned}$$

2. Für $x \in L$ gilt

$$\begin{aligned}
(m_r \circ (\mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)} \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(x) &= m_r \circ (\mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)} \otimes \varepsilon)(1 \otimes x + x \otimes 1) \\
&= m_r(1 \otimes 0 + x \otimes 1) = x, \\
(m_l \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)}) \circ \Delta)(x) &= (m_l \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)}))(1 \otimes x + x \otimes 1) \\
&= m_l(1 \otimes x + 0 \otimes 1) = x.
\end{aligned}$$

3. Für $x \in L$ gilt

$$\begin{aligned}
(m \circ (S \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)}) \circ \Delta)(x) &= (m \circ (S \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)}))(1 \otimes x + x \otimes 1) \\
&= m(1 \otimes x - x \otimes 1) = 0, \\
(\eta \circ \varepsilon)(x) &= \eta(0) = 0, \\
(m \circ (\mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)} \otimes S) \circ \Delta)(x) &= (m \circ (\mathrm{id}_{\mathscr{U}(L)}) \otimes S)(1 \otimes x + x \otimes 1) \\
&= m(-1 \otimes x + x \otimes 1) = 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen für Lie-p-Algebren beweist man analog. ❑

(5.4) Bemerkung
Wir betrachten (II.(5.3) 1.) eine endlich-dimensionale Lie-Algebra L über dem Körper K mit Basis $\{x_1, \ldots, x_k\}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Seien $n = (n_1, \ldots, n_k)$, $m = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}_0^k$. Wir setzen

$$x^n := x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} \in \mathscr{U}(L)$$

und

$$\binom{n}{m} := \binom{n_1}{m_1} \cdots \binom{n_k}{m_k} \in \mathbb{N}_0.$$

Auf $\mathbb{N}_0^k$ definiere eine Halbordnung "$\leq$" durch

$$n \leq m \Leftrightarrow n_i \leq m_i \ \ \forall\, 1 \leq i \leq k.$$

Für $1 \leq i \leq k$ definieren wir $\varepsilon_i := (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{ik})$ (Kronecker-Delta). Wegen II.(2.2) lässt sich somit jedes $a \in \mathscr{U}(L)$ schreiben als

$$a = \sum_{0 \leq n \leq l} a_n x^n$$

für ein $l \in \mathbb{N}_0^k$ und $a_n \in K$ für $n \in \mathbb{N}_0^k$. Wir möchten nun zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0^k$ gilt

$$\Delta(x^n) = \sum_{0 \leq m \leq n} \binom{n}{m} x^m \otimes x^{n-m}.$$

Wir zeigen diese Behauptung per vollständiger Induktion über $\sum_{i=1}^{k} n_i$. Für $n = 0$ ist die Aussage

$$1 \otimes 1 = \Delta(1) = \Delta(x^0) = \sum_{0 \le m \le 0} \binom{0}{m} x^m \otimes x^{0-m} = 1 \otimes 1,$$

also wahr. Die Behauptung gelte nun für $n \in \mathbb{N}_0^k$ und sei $1 \le i \le n$; dann ist

$$\begin{aligned}
\Delta(x^{n+\varepsilon_i}) &= \Delta(x^n)\Delta(x_i) \\
&= (\sum_{0 \le m \le n} \binom{n}{m} x^m \otimes x^{n-m})(1 \otimes x_i + x_i \otimes 1) \\
&= \sum_{0 \le m \le n} \binom{n}{m} (x^m \otimes x^{n-m+\varepsilon_i} + x^{m+\varepsilon_i} \otimes x^{n-m}) \\
&= \sum_{0 \le m \le n} \binom{n}{m} (x^m \otimes x^{n-m+\varepsilon_i}) + \sum_{\varepsilon_i \le m \le n+\varepsilon_i} \binom{n}{m-\varepsilon_i} (x^m \otimes x^{n-m+\varepsilon_i}) \\
&= \sum_{\varepsilon_i \le m \le n} \binom{n+\varepsilon_i}{m} (x^m \otimes x^{n-m+\varepsilon_i}) + 1 \otimes x^{n+\varepsilon_i} + x^{n+\varepsilon_i} \otimes 1 \\
&= \sum_{0 \le m \le n+\varepsilon_i} \binom{n+\varepsilon_i}{m} (x^m \otimes x^{n+\varepsilon_i-m}).
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung per vollständiger Induktion gezeigt.

(5.5) Definition

1. Für jede Hopf-Algebra H sei

   $$P(H) = \{h \in H \mid \Delta(h) = 1 \otimes h + h \otimes 1 \text{ und } \varepsilon(h) = 0\}$$

   die Menge der **primitiven Elemente** von H.

2. Seien H und H' Hopf-Algebren. Eine lineare Abbildung $f : H \to H'$ heißt **Hopf-Algebren-Homomorphismus**, falls sie zugleich ein Algebren-Homomorphismus und ein Koalgebren-Homomorphismus ist und es gilt $f \circ S_H = S_{H'} \circ f$.

3. Ein Ideal I einer Hopf-Algebra H heißt **Hopf-Ideal**, falls die Bedingungen $\Delta(I) \subseteq I \otimes H + H \otimes I$, $I \subseteq \mathrm{Kern}(\varepsilon)$ und $S(I) \subseteq I$ gelten.

4. Für jede Hopf-Algebra H sei $H^+ = \mathrm{Kern}(\varepsilon)$.

(5.6) Bemerkung

1. Ist L eine (endlich-dimensionale) Lie-Algebra über K ($\mathrm{char}(K) = 0$), dann ist $P(\mathscr{U}(L)) = L$.

2. Ist L eine (endlich-dimensionale) Lie-p-Algebra über F ($\mathrm{char}(F) = p > 0$), dann ist $P(\mathscr{U}_p(L)) = L$.

Beweis.

1. Sei $\{x_1, \ldots, x_k\}$ eine Basis von L und $a = \sum_{0 \leq n \leq l} a_n x^n$ für ein $l \in \mathbb{N}_0^k$ und $a_n \in K$ für alle $0 \leq n \leq l$ mit den Notationen aus Bemerkung II.(5.4). Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& \Delta(a) - (1 \otimes a + a \otimes 1) \\
= & \sum_{0 \leq n \leq l} a_n \sum_{0 \leq m \leq n} \binom{n}{m} x^m \otimes x^{n-m} - \sum_{0 \leq n \leq l} a_n (x^n \otimes 1 + 1 \otimes x^n) \\
= & \sum_{0 \leq n \leq l} \sum_{0 < m < n} a_n \binom{n}{m} x^m \otimes x^{n-m}.
\end{aligned}
$$

Für $a \in P(\mathscr{U}(L))$ folgt

$$\sum_{0 \leq n \leq l} \sum_{0 < m < n} a_n \binom{n}{m} x^m \otimes x^{n-m} = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\{x^n \otimes x^{n-m} \mid n, m \in \mathbb{N}_0^k\}$ müssen also alle Koeffizienten $a_n \binom{n}{m}$ für $0 < m < n \leq l$ gleich Null sein. Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m}$ sind $\neq 0$ für alle $0 < m < n$. Damit ist $a_n = 0$ für alle $0 < n \in \mathbb{N}_0^k$, für die ein $m \in \mathbb{N}_0^k$ mit $0 < m < n$ existiert. Das heißt, es ist nur dann $a_n \neq 0$, wenn $n = \varepsilon_i$ für ein $1 \leq i \leq k$ oder $n = 0$ ist. Wir erhalten $P(\mathscr{U}(L)) \subseteq L + K$. Für $a \in L$ und $0 \neq b \in K$ ist $\varepsilon(a+b) = 0 + b \neq 0$, und somit gilt sogar $P(\mathscr{U}(L)) \subseteq L$. Wegen $L \subseteq P(\mathscr{U}(L))$ sind die Mengen gleich.

2. Sei $\{x_1, \ldots, x_k\}$ eine Basis von L und $a = \sum_{0 \leq n \leq l} a_n x^n$ für ein $l = (l_1, \ldots, l_k) \in \mathbb{N}_0^k$ mit $0 \leq l_i \leq p-1$ und $a_n \in F$ für alle $0 \leq n \leq l$. Wie in 1. gilt dann für $a \in P(\mathscr{U}_p(L))$

$$\sum_{0 \leq n \leq l} \sum_{0 < m < n} a_n \binom{n}{m} x^m \otimes x^{n-m} = 0.$$

Auch hier gilt $\binom{n}{m} \neq 0$ für alle $0 < m < n$ wegen $n_i \leq p-1$ für alle $1 \leq i \leq k$. Und die Behauptung folgt wie in 1.

❏

(5.7) Bemerkung
Sei F ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und H eine Hopf-Algebra über F.

1. Die Menge $P(H)$ ist eine Lie-p-Algebra L unter der Kommutatorabbildung $[x,y] = xy - yx$ mit $x,y \in P(H)$. In der Tat ist eine endlich-dimensionale Hopf-Algebra H die p-Einhüllende Algebra des Vektorraumes seiner primitiven Elemente genau dann, wenn H durch $P(H)$ als Algebra erzeugt wird.
2. Für einen Hopf-Algebren-Homomorphismus $f : H \to H'$ ist $f(P(H)) \subseteq P(H')$ und $f|_{P(H)}$ ein p-Homomorphismus.
3. Ein Hopf-Ideal I von H ist also der Kern eines Hopf-Algebren-Homomorphismus mit Definitionsbereich H. Seine Eigenschaften sind genau die, die man braucht um den **Quotienten** H/I mit einer kanonischen Hopf-Algebren-Struktur zu versehen, so dass die Projektion $H \to H/I$ eine Hopf-Algebren-Abbildung ist.

Beweis.

1. Für $x,y \in P(H)$ ist wegen

$$\begin{aligned}
\Delta([x,y]) &= \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) \\
&= (x\otimes 1 + 1\otimes x)(y\otimes 1 + 1\otimes y) - (y\otimes 1 + 1\otimes y)(x\otimes 1 + 1\otimes x) \\
&= xy\otimes 1 + x\otimes y + y\otimes x + 1\otimes xy - yx\otimes 1 - y\otimes x - x\otimes y - 1\otimes yx \\
&= (xy - yx)\otimes 1 + 1\otimes (xy - yx)
\end{aligned}$$

und

$$\varepsilon([x,y]) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) - \varepsilon(y)\varepsilon(x) = 0,$$

der Kommutator $[x,y] = xy - yx \in P(H)$. Damit ist $P(H) = L$ eine Lie-Algebra. Für $x \in L$ gilt

$$\Delta(x^p) = \Delta(x)^p = (x\otimes 1 + 1\otimes x)^p = x^p \otimes 1 + 1\otimes x^p$$

und

$$\varepsilon(x^p) = \varepsilon(x)^p = 0.$$

Damit ist $x^p \in L$ und L eine Lie-p-Algebra.

2. Für $h \in P(H)$ ist

$$(\Delta_{H'} \circ f)(h) = (f\otimes f)(\Delta_H(h)) = (f\otimes f)(1\otimes h + h\otimes 1) = 1\otimes f(h) + f(h)\otimes 1.$$

Da $f|_{P(H)}$ ein Algebren-Homomorphismus ist, ist er auch ein p-Homomorphismus (Rechnung wie für Δ in 1.).

❑

II.6 Graduierte Lie-Algebren und filtrierte Lie-Algebren

Manche Algebren haben zusätzliche Eigenschaften; sie sind filtriert beziehungsweise graduiert. Diese Begriffe möchten wir hier erläutern. Wir folgen hier [SF88, Aschnitt 1.9, Kapitel 3]. Sei K ein Körper.

(6.1) Definition
Sei A eine Algebra über K.

1. Eine **(aufsteigende) Filtrierung** von A ist eine Familie $(A_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ von Unterräumen mit $A_{(k)} \subseteq A_{(l)}$ für $k \le l$ und $A_{(k)}A_{(l)} \subseteq A_{(k+l)}$ für alle $k,l \in \mathbb{Z}$. Dann heißt das Paar $(A,(A_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}})$ **filtrierte Algebra**.

2. Eine aufsteigende Filtrierung $(L_{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$ einer Lie-p-Algebra L heißt p**-Filtrierung**, falls $L_{(k)}^{[p]} \subseteq L_{(pk)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

3. Eine ($\mathbb{Z}$-)**Graduierung** von A ist eine Familie $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ von Unterräumen mit $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ und $A_kA_l \subseteq A_{k+l}$ für alle $l,k \in \mathbb{Z}$. Elemente von A_l heißen **homogene** Elemente vom **Grad** l. Dann heißt das Paar $(A,(A_k)_{k\in\mathbb{Z}})$ **graduierte Algebra**.

4. Eine Graduierung $L = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} L_k$ einer Lie-p-Algebra mit $L_k^{[p]} \subseteq L_{pk}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ heißt p**-Graduierung**.

Ist $(L,(L_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ eine graduierte Lie-Algebra, dann hat L eine Filtrierung $(L_{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $L_{(n)} = \sum_{i\le n} L_i$.
Sei $(L,(L_{(i)})_{i\in\mathbb{Z}})$ eine filtrierte Lie-Algebra. Wir setzen $L_i := L_{(i)}/L_{(i-1)}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Definiere auf $\mathrm{gr}(L) := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$ eine Lie-Algebren-Struktur durch

$$[x + L_{(i-1)}, y + L_{(j-1)}] := [x,y] + L_{(i+j-1)}$$

für $x \in L_{(i)}, y \in L_{(j)}$. Man nennt $(\mathrm{gr}(L),(L_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ die graduierte Algebra assoziiert zu $(L,(L_{(i)})_{i\in\mathbb{Z}})$.

(6.2) Theorem
Für eine filtrierte Lie-Algebra $(L,(L_{(i)})_{i\in\mathbb{Z}})$ über K gilt:

1. *Die Lie-Algebra $(\mathrm{gr}(L),(L_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ ist graduiert.*

2. *Falls L eine Lie-p-Algebra über einem Körper F mit $\mathrm{char}(F) = p > 0$ und $(L_{(i)})_{i\in\mathbb{Z}}$ eine p-Filtrierung ist, dann definiert*

$$(x + L_{(i-1)})^{[p]} := x^{[p]} + L_{(pi-1)} \in L_{pi} \text{ für alle } x \in L_{(i)}$$

eine p-Potenzabbildung auf $\mathrm{gr}(L)$, so dass die Graduierung eine p-Graduierung auf $\mathrm{gr}(L)$ ist.

Beweis.

1. Die Aussage folgt direkt aus der Definition.

2. Ist $x \in L_{(i)}$, dann ist $x^{[p]} \in L_{(pi)}$. Für $y \in L_{(j)}$ gilt dann

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}(x+L_{(i-1)}))^p(y+L_{(j-1)}) &= \mathrm{ad}(x)^p(y)+L_{(ip+j-1)}\\ &= [x^{[p]},y]+L_{(ip+j-1)}\\ &= \mathrm{ad}(x^{[p]}+L_{(ip-1)})(y+L_{(j-1)})\\ &= \mathrm{ad}((x+L_{(i-1)})^{[p]})(y+L_{(j-1)}).\end{aligned}$$

Da es eine Basis von $\mathrm{gr}(L)$ aus homogenen Elementen gibt, folgt mit dem Theorem von Jacobson II.(3.7) die Behauptung.

❑

(6.3) Beispiel

1. Sei L eine Lie-Algebra über einem Körper F der Charakteristik $p > 0$ und $(\mathscr{U}(L),\iota)$ ihre universell einhüllende Algebra. Mit den Bezeichnungen aus Theorem II.(2.2) hat $\mathscr{U}(L)$ eine Filtrierung

$$\mathscr{U}(L)_{(0)} := F,\ \mathscr{U}(L)_{(k)} := \langle\, y_1\cdots y_n \mid y_i \in L,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq n \leq k\,\rangle + F,$$

die **kanonische Filtrierung** von $\mathscr{U}(L)$.

2. Die Lie-Algebra $W(2,\underline{1})$ ist graduiert mit

$$L_i = \{x^k y^l D_z \mid k+l = i+1,\ 1 \leq k,\ l \leq p-1,\ z = x,y\,\}.$$

(6.4) Definition

Sei A eine Algebra über K. Eine Abbildung $\nu : A \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ heißt **Pseudo-Bewertung** auf A, falls gilt

1. $\nu(a+b) \leq \max\{\nu(a),\nu(b)\}$ für alle $a,b \in A$,

2. $\nu(\lambda a) = \nu(a)$ für alle $a \in A$ und $0 \neq \lambda \in K$,

3. $\nu(ab) \leq \nu(a)+\nu(b)$ für alle $a,b \in A$.

(6.5) Bemerkung

Sei A eine Algebra über K, $\nu : A \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ eine Pseudo-Bewertung auf A, $a,b \in A$ mit $\nu(a) < \nu(b)$. Dann ist $\nu(a+b) = \nu(b)$. Angenommen es ist $\nu(a+b) < \nu(b)$. Dann wäre $\nu(b) = \nu(a+b-a) \leq \max\{\nu(a),\nu(a+b)\} < \nu(b)$. Für $a,b \in A$ mit $\nu(a) \neq \nu(b)$ gilt also $\nu(a+b) = \max\{\nu(a),\nu(b)\}$.

Sei L eine Lie-Algebra mit einer Filtrierung $(L_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$, für die $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} L_{(k)} = L$ gilt. Dann definiert

$$\nu(x) := \begin{cases} -\infty, & \text{für } x \in \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} L_{(k)} \\ \min\{k \mid x \in L_{(k)}\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Pseudo-Bewertung auf L.
Ist umgekehrt ν eine Pseudo-Bewertung auf L, dann ist

$$L_{(k)} := \{x \in L \mid \nu(x) \leq k\}$$

eine Filtrierung $(L_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$, für die $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} L_{(k)} = L$ gilt.
Sei L eine Lie-Algebra über dem Körper F mit einer Filtrierung $(L_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$, für die $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} L_{(k)} = L$ gilt. Setze

$$\mathscr{U}(L)_{(0)} := F,\ \mathscr{U}(L)_{(k)} := \langle\, x_1 \cdots x_n \mid x_i \in L,\ 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \nu(x_i) \leq k \,\rangle + F.$$

Dann ist $(\mathscr{U}(L)_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Filtrierung von $\mathscr{U}(L)$. Wir nennen diese Filtrierung die zu $(L_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ **gehörige Filtrierung** von $\mathscr{U}(L)$. Die triviale Pseudo-Bewertung

$$\nu : L \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\},\ \nu(x) = 1\ \forall\, x \neq 0,\ \nu(0) = -\infty$$

induziert die kanonische Filtrierung von $\mathscr{U}(L)$.

(6.6) Proposition
Sei L eine Lie-Algebra über dem Körper F und $\nu : L \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ eine Pseudo-Bewertung auf L, $\{x_j \mid j \in J\}$ wie in II.(2.2) eine geordnete Basis von L, so dass $L_{(k)} = \langle\, x_j \mid \nu(x_j) \leq k \rangle$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist, und $(\mathscr{U}(L)_{(l)})_{l\in\mathbb{Z}}$ die zu $(L_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ gehörige Filtrierung. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *$\mathscr{U}(L)_{(l)} = \langle\, x_{j_1} \cdots x_{j_n} \mid j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J,\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} \nu(x_{j_i}) \leq l \,\rangle + F$,*
2. *$\{x_{j_1} \cdots x_{j_n} + \mathscr{U}(L)_{(l-1)} \mid j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J,\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} \nu(x_{j_i}) = l\}$ ist für alle $l \in \mathbb{Z}$ eine Basis von $\mathscr{U}(L)_{(l)}/\mathscr{U}(L)_{(l-1)}$.*

Beweis.

1. (a) Wir betrachten für $l \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ die Unterräume

$$U(k,l) := \langle\, y_1 \cdots y_j \mid j \leq k,\ y_i \in L\ \forall 1 \leq i \leq j,\ \sum_{i=1}^{j} \nu(y_i) \leq l \,\rangle.$$

Wir behaupten, dass für alle $y_1, \ldots, y_k \in L$ und jede Permutation $\sigma \in S_k$

$$y_1 \cdots y_k - y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(k)} \in U(k-1, \sum_{i=1}^{k} \nu(y_i))$$

gilt. Sei

$$G := \{\sigma \in S_k \mid y_1 \cdots y_k - y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(k)} \in U(k-1, \sum_{i=1}^{k} \nu(y_i)\,)\ \forall y_1, \ldots, y_k \in L\}.$$

Dann ist G eine Untergruppe von S_k. Sei $\tau \in S_k$, so dass ein $1 \leq i \leq k$ mit $\tau(i) = i+1$, $\tau(i+1) = i$ existiert und $\tau(j) = j$ für alle $1 \leq j \leq k$, $j \neq i, i+1$ ist. Folglich ist

$$\begin{aligned} y_1 \cdots y_k - y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(k)} &= y_1 \cdots y_k - y_1 \cdots y_{i-1} y_{i+1} y_i \cdots y_k \\ &= y_1 \cdots y_{i-1} [y_i, y_{i+1}] \cdots y_k \\ &\in U(k-1, \sum_{j=1, j \neq i, i+1}^{k} \nu(y_j) + \nu([y_i, y_{i+1}])\,) \\ &\subseteq U(k-1, \sum_{j=1}^{k} \nu(y_j)), \end{aligned}$$

denn wegen II.(6.4) 3. ist $\nu([y_i, y_{i+1}]) \leq \nu(y_i) + \nu(y_{i+1})$. Damit ist $\tau \in G$. Also gilt $S_k = G$, weil S_k von solchen τs erzeugt wird. Die Behauptung folgt.

(b) Wir zeigen durch Induktion nach k, dass

$$U(k,l) \subseteq \langle\, x_{j_1} \cdots x_{j_n} \mid j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J,\ n \leq k,\ \sum_{i=1}^{n} \nu(x_{j_i}) \leq l\,\rangle$$

gilt. Der Fall $k = 1$ bedeutet

$$U(1,l) = \langle\, y \in L \mid \nu(y) \leq l\,\rangle = L_{(l)} = \langle\, x_j \mid j \in J,\ \nu(x_j) \leq l\,\rangle$$

nach Voraussetzung. Sei die Behauptung für alle $j < k$ wahr und seien $y_1, \ldots, y_k \in L$ mit $\sum_{i=1}^{k} \nu(y_i) \leq l$. Wegen $y_1 \cdots y_{k-1} \in U(k-1, \sum_{i=1}^{k-1} \nu(y_i))$ und $y_k \in U(1, \nu(y_k))$ folgt

$$y_1 \cdots y_{k-1} = \sum_{j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J, n \leq k-1, \sum_{i=1}^{n} \nu(x_{j_i}) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \nu(y_i)} a(j_1, \ldots, j_n) x_{j_1} \cdots x_{j_n},$$

$$y_k = \sum_{j \in J, \nu(x_j) \leq \nu(y_k)} \beta_j x_j.$$

Wenn wir nun alle x_j an die richtige Stelle (Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt II.(2.2)) zwischen die x_{j_i} einordnen, erhalten wir mit (a)

$$x_{j_1} \cdots x_{j_n} x_j - x_{j_1} \cdots x_{j_i} x_j x_{j_{i+1}} \cdots x_{j_n} \in \mathscr{U}(k-1, l)$$

für alle $j_i \leq j \leq j_{i+1}$. Es folgt, dass

$$\sum_{j_1 \leq \ldots \leq j_n, n \leq k-1, j_i \leq j \leq j_{i+1} \in J} a(j_1, \ldots, j_{k-1}) \beta_j x_{j_1} \cdots x_{j_i} x_j x_{j_{i+1}} \cdots x_{j_{k-1}}$$
$$\equiv \quad y_1 \cdots y_k \mod (\mathscr{U}(k-1, l))$$

ist, während

$$\sum_{i=1}^{n} \nu(x_{j_i}) + \nu(x_j) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \nu(y_i) + \nu(x_j) \leq \sum_{i=1}^{k} \nu(y_i) \leq l$$

für jedes $j \in J$ mit $\nu(x_j) \leq \nu(y_k)$ gilt. Die Behauptung folgt nun durch Induktion.

(c) Nach Definition ist $\mathscr{U}_{(l)} = \sum_{k \geq 0} \mathscr{U}(k, l)$. Mit Teil (b) gilt die Inklusion $\subseteq$ der Behauptung. Die Inklusion $\supseteq$ folgt aus der Definition von $\mathscr{U}_{(l)}$.

2. In 1. haben wir gezeigt, dass die angegebene Menge $\mathscr{U}_{(l)}/\mathscr{U}_{(l-1)}$ erzeugt. Ist

$$0 = \sum_{j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J, \sum_{i=1}^{n} \nu(x_{j_i}) = l} a(j_1, \ldots, j_n) x_{j_1} \cdots x_{j_n} + \mathscr{U}_{(l-1)},$$

dann ist

$$\sum_{j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J, \sum_{i=1}^{n} \nu(x_{j_i}) = l} a(j_1, \ldots, j_n) x_{j_1} \cdots x_{j_n} \in \mathscr{U}_{(l-1)}.$$

Dieses impliziert wegen 1., dass

$$\sum_{j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J, \sum_{i=1}^{n} \nu(x_{j_i}) = l} a(j_1, \ldots, j_n) x_{j_1} \cdots x_{j_n}$$
$$= \sum_{j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J, \sum_{i=1}^{n} \nu(x_{j_i}) \leq l-1} b(j_1, \ldots, j_n) x_{j_1} \cdots x_{j_n}$$

gilt. Mit Theorem II.(2.2) folgt $a(j_1, \ldots, j_n) = 0$ für alle $j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J$.

❑

Wenn wir eine Lie-Algebra L durch

$$\begin{cases} L_{(k)} = 0, & k \leq 0 \\ L_{(k)} = L, & k > 0 \end{cases}$$

filtrieren, dann ist $\mathrm{gr}(L) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} L_{(k)}/L_{(k-1)} \cong L_{(1)} \cong L$ als Vektorraum und

$$[x + L_{(0)}, y + L_{(0)}] \in L_{(2)}/L_{(1)} = 0$$

für alle $x+L_{(0)},\ y+L_{(0)} \in L_{(1)}/L_{(0)}$ und damit ist $\mathrm{gr}(L)$ abelsch. Dann ist ν durch

$$\nu(x) := \begin{cases} -\infty, & x = 0 \\ 1, & x \in L\backslash\{0\} \end{cases}$$

gegeben. Damit gilt $\sum_{i=1}^{n} \nu(x_i) \leq n$ für $x_i \in L$, $1 \leq i \leq n$ und $n \in \mathbb{N}$. Die zugehörige Filtrierung von $\mathscr{U}(L)$ ist somit

$$U_{(0)} = F,\ U_{(k)} = \langle\, x_1 \cdots x_n \mid x_i \in L, 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq n \leq k \,\rangle + F,$$

also die kanonische Filtrierung.
Sei $L = \oplus L_i$ graduiert, $L_{(j)} := \sum_{i \geq j} L_i$ die zugehörige Filtrierung. Offensichtlich ist dann $\mathrm{gr}(L) \cong L$ unter der Abbildung $x + L_{(j+1)} \mapsto x$ für ein homogenes $x \in L_j$.

(6.7) Theorem
Sei L eine Lie-Algebra mit einer Filtrierung $(L_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$, für die $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} L_{(k)} = L$ gilt, und $(\mathscr{U}_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ die zu $(L_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ gehörige Filtrierung. Dann gilt:

1. *$gr(\mathscr{U}(L))$ ist eine assoziative Algebra.*
2. *$gr(L)$ ist eine Lie-Algebra.*
3. *$gr(\mathscr{U}(L)) \cong \mathscr{U}(gr(L))$.*

Beweis.

1. Dies folgt aus der Definition.
2. Dies folgt auch aus der Definition.
3. Sei $\nu : L \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ die Pseudo-Bewertung definiert durch $(L_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$. Sei $\{x_j \mid j \in J\}$ eine geordnete Basis von L mit $L_{(k)} = \langle\, x_j \mid \nu(x_j) \leq k \,\rangle$. Dann impliziert II.(2.2), dass $\mathscr{U}_{(k)} \cap L = \langle\, x_j \mid j \in J,\ \nu(x_j) \leq k \,\rangle = L_{(k)}$ gilt. Damit existieren injektive Abbildungen

   $$\varphi_l : L_{(l)}/L_{(l-1)} \to \mathscr{U}(L)_{(l)}/\mathscr{U}(L)_{(l-1)},\ x + L_{(l-1)} \mapsto x + \mathscr{U}(L)_{(l-1)}$$

   für $l \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\varphi = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k : \mathrm{gr}(L) \to gr(\mathscr{U}(L))$ ein injektiver Lie-Algebren-Homomorphismus. Sei $\psi : \mathscr{U}(\mathrm{gr}(L)) \to \mathrm{gr}(\mathscr{U}(L))$ die eindeutige Fortsetzung von φ zu einem Algebren-Homomorphismus.

   Es ist $\{x_j + L_{(\nu(x_j)-1)} \mid j \in J\}$ eine Basis von $\mathrm{gr}(L)$. Mit II.(2.2) erhalten wir die Basis

   $$\mathscr{B} := \{\ (x_{j_1} + L_{(\nu(x_{j_1})-1)}) \cdots (x_{j_n} + L_{(\nu(x_{j_n})-1)}) \mid j_1 \leq \ldots \leq j_n \in J, n \in \mathbb{N}\}$$

von $\mathscr{U}(\mathrm{gr}(L))$. Es gilt

$$\psi((x_{j_1}+L_{(\nu(x_{j_1})-1)})\cdots(x_{j_n}+L_{(\nu(x_{j_n})-1)}))=x_{j_1}\cdots x_{j_n}+\mathscr{U}(L)_{(\sum_{i=1}^n \nu(x_{j_i})-1)}.$$

Damit ist $\psi(\mathscr{B})$ eine Basis von $\mathrm{gr}(\mathscr{U}(L))$. Folglich ist ψ ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt.

❑

(6.8) Lemma

Sei L eine endlich-dimensionale Lie-Algebra und $(\mathscr{U}(L)_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ die kanonische Filtrierung von $\mathscr{U}(L)$.

1. *Die graduierte Algebra $\mathrm{gr}(\mathscr{U}(L))$ ist isomorph zu einem Polynomring in* $\dim_F L$ *Unbestimmten.*
2. *Die universell einhüllende Algebra $\mathscr{U}(L)$ ist nullteilerfrei.*

Beweis.

1. Die kanonische Filtrierung ist zu

$$\begin{cases} L_{(k)}=0, & k\le 0\\ L_{(k)}=L, & k>0\end{cases}$$

gehörige Filtrierung. Wie oben gesehen, ist $\mathrm{gr}(L)$ abelsch. Weil für die Dimensionen $\dim_F L=\dim_F \mathrm{gr}(L)$ gilt, ist $\mathscr{U}(\mathrm{gr}(L))$ isomorph zu einem Polynomring in $\dim_F L$ Unbestimmten. Die Behauptung folgt nun mit II.(6.7) 3.

2. Wegen 1. ist $\mathrm{gr}(\mathscr{U}(L))$ nullteilerfrei. Seien $0\neq x,y\in\mathscr{U}(L)$. Dann sind

$$r:=\min\{k\mid x\in\mathscr{U}(L)_{(k)}\}\text{ und } s:=\min\{k\mid y\in\mathscr{U}(L)_{(k)}\}$$

wohldefiniert (wegen $\mathscr{U}(L)_{(l)}=\{0\}$ für $l<0$) und es gilt $x+U_{(r-1)}\neq 0$, sowie $y+U_{(s-1)}\neq 0$ in $\mathrm{gr}(\mathscr{U}(L))$. Also ist $0\neq xy+U_{(r+s-1)}$ und damit $xy\neq 0$.

❑

Kapitel III

Darstellungstheorie

In diesem Kapitel befassen wir uns mit Darstellungen von Lie-p-Algebren und ihren Universell Einhüllenden Algebren und möchten eine Methode zur Berechnung der irreduziblen Darstellungen vorstellen.

III.1 Darstellungen und Moduln

Seien in diesem Abschnitt K ein Körper, L eine Lie-Algebra über K, A eine assoziative K-Algebra und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

(1.1) Definition

1. Der Vektorraum V ist ein **Modul** von L, falls eine Abbildung $L \times V \to V$, $(x,v) \mapsto x.v$ existiert, so dass für alle $a,b \in K,\ x,y \in L,\ v,w \in V$ gilt:

   (a) $(ax+by).v = a(x.v)+b(y.v)$,

   (b) $x.(av+bw) = a(x.v)+b(x.w)$,

   (c) $[x,y].v = x.(y.v)-y.(x.v)$.

2. Der Vektorraum V ist ein **Modul** von A, falls eine Abbildung $A \times V \to V$, $(x,v) \mapsto x.v$ existiert, so dass für alle $a,b \in K,\ x,y \in A,\ v,w \in V$ gilt:

   (a) $(ax+by).v = a(x.v)+b(y.v)$,

   (b) $x.(av+bw) = a(x.v)+b(x.w)$,

   (c) $(xy).v = x.(y.v)$,

   (d) $1.v = v$.

Ist $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung, dann wird V zu einem L-Modul via $x.v := \varphi(x)(v)$ für $x \in L$ und $v \in V$. Umgekehrt: Falls V ein L-Modul ist, bekommen wir eine Darstellung $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V),\ x \mapsto \varphi(x)$ via $\varphi(x)(v) := x.v$ für $v \in V$. Gleiches gilt für assoziative Algebren.

(1.2) Definition
Sei die Charakteristik von K gleich p, L eine Lie-p-Algebra und V ein L-Modul mit der Eigenschaft, dass die zugehörige Darstellung eine p-Darstellung ist. Der Modul V heißt dann ***p*-Modul**.

(1.3) Definition
Sei V ein L-Modul und $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ die zugehörige Darstellung auf V.

1. Ein Untervektorraum $U \leq V$ mit $L.U := \{x.u \mid x \in L, u \in U\} \subseteq U$ nennt man **Untermodul** von V.

2. Der Modul V ist **einfach**, wenn $V \neq 0$ und 0 und V seine einzigen Untermoduln sind.

3. Ist $U \leq V$ ein Untermodul, dann wird der Quotientenraum V/U zu einem L-Modul via $x.(v+U) = x.v + U,\ x \in L,\ v \in V$. Man nennt den so erhaltenen Modul **Quotientenmodul** von V und U.

4. Ein Modul heißt **halbeinfach**, wenn er endlich-dimensional ist und als direkte Summe von einfachen Moduln dargestellt werden kann.

5. Eine **Kompositionsreihe** von V ist eine endliche Kette von Untermoduln
$$0 = V_0 \leq \ldots \leq V_t = V$$
mit einfachen Faktoren $V_i/V_{i-1},\ 1 \leq i \leq t$. Die Quotientenmoduln V_i/V_{i-1}, $1 \leq i \leq t$ heißen **Kompositionsfaktoren** von V.

6. Die Darstellung φ ist **irreduzibel**, falls V einfach ist.

7. Der **Annihilator** von V in L ist die Menge $\mathrm{Ann}_L(V) := \{x \in L \mid x.v = 0\ \forall\, v \in V\}$.

Die Begriffe werden analog für assoziative Algebren definiert.

(1.4) Bemerkung
Insgesamt bekommen wir mit der universellen Eigenschaft der Universell Einhüllenden Algebra von L zu jeder Darstellung φ von L eine Darstellung ψ von $\mathscr{U}(L)$ und umgekehrt (via $\varphi = \psi \circ \iota$):

$$\begin{array}{rcl} \text{Darstellungen von } L & \leftrightarrow & L\text{-Moduln} \\ & \leftrightarrow & \mathscr{U}(L)\text{-Moduln} \\ & \leftrightarrow & \text{Darstellungen von } \mathscr{U}(L) \end{array}$$

und genauso für Lie-p-Algebren:

$$\begin{aligned} p\text{-Darstellungen von } L &\leftrightarrow L\text{-}p\text{-Moduln} \\ &\leftrightarrow \mathcal{U}_p(L)\text{-Moduln} \\ &\leftrightarrow \text{Darstellungen von } \mathcal{U}_p(L) \end{aligned}$$

Eine Darstellung ist genau dann treu, wenn der Annihilator des zugehörigen Moduls nur die Null enhält.

(1.5) Beispiel

1. Sei L eine Lie-Algebra über dem Körper K. Dann ist K ein L-Modul mit zugehöriger Darstellung $\varphi : L \to K,\ a \mapsto 0$. Falls nun $\mathrm{char}(K) = p$ und L eine Lie-p-Algebra ist, dann ist diese Darstellung φ eine p-Darstellung und K ein p-Modul. Man nennt die Darstellung φ die **triviale Darstellung** von L. Der zugehörige Modul heißt **trivialer Modul** von L.

2. Sei L eine Lie-Algebra. Dann ist $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{End}_K(L),\ x \mapsto \mathrm{ad}(x)$ eine Darstellung, die **adjungierte Darstellung** von L. Der zugehörige Modul heißt **adjungierter Modul** von L.

Die Ideale von L sind genau die Untermoduln der adjungierten Darstellung von L. Also ist eine Lie-Algebra L genau dann einfach, wenn ihr adjungierter Modul einfach ist.

(1.6) Definition

1. Ein L-Modul V heißt **projektiv**, falls er ein direkter Summand des adjungierten Moduls ist.

2. Ein L-Modul V heißt **zerlegbar**, wenn er durch $V = W_1 \oplus W_2$ mit L-Moduln $W_1 \neq 0$ und $W_2 \neq 0$ dargestellt werden kann; sonst heißt er **unzerlegbar**.

(1.7) Definition

Sei $L = \bigoplus_{i=-r}^{s} L_i$ graduiert mit $r, s \geq 1$. Die Graduierung von L heißt **zulässig**, wenn $L_{-r} = C_L(L_{-1})$ ist.

Haben wir eine graduierte Lie-Algebra, deren Graduierung zulässig ist, können wir die Einfachheit mit dem folgenden Satz III.(1.9) beweisen. Hierfür definieren wir $L^+ := \bigoplus_{i=1}^{s} L_i$, $L^- := \bigoplus_{i=-r}^{-1} L_i$. Folgende Eigenschaften sind nützlich:

(g1) Für alle $i \geq 0$ und $x \in L_i \backslash \{0\}$ existiert ein $y \in L_{-1}$ mit $[x, y] \neq 0$.

(g2) Für $i < 0$ ist $L_i = (L_{-1})^{-i}$ das $(-i)$-te Glied der Zentralreihe, vergleiche II.(1.5).

(g3) L_{-1} ist ein treuer einfacher L_0-Modul.

(g4) Für alle $i < 0$ und $x \in L_i \backslash \{0\}$ existiert ein $j > 0$ mit $[x, L_j] \neq 0$.

Sei L eine Lie-Algebra und V ein Untervektorraum von L. Wir bezeichnen mit $\mathscr{U}(L)\cdot V$ das von V erzeugte Ideal in L.

(1.8) Theorem
Sei $L = \bigoplus_{i=-r}^{s} L_i$ eine graduierte Lie-Algebra mit den Eigenschaften (g1)-(g4) und $r,s > 0$. Dann ist L halbeinfach und $I_{\min} := \mathscr{U}(L)\cdot L_{-1}$ ist das einzige minimale Ideal in L.

Beweis. Sei $J \neq 0$ ein Ideal von L. Setzen wir

$$J_i := (J + \sum_{k<i} L_k) \cap L_i,$$

für $-r \leq i \leq s$, dann ist $[J_i, L_j] \subseteq J_{i+j}$ für $-r \leq i+j \leq s$. Wir suchen nun ein $k \geq 0$ mit $J_k \neq 0$.
Für $x \neq 0 \in J$ existieren $x_i \in L_i$ für alle $-r \leq i \leq s$ mit $x = \sum_{i=-r}^{s} x_i$. Definieren wir $l := \max\{i \mid x_i \neq 0\}$, so gilt $0 \neq x_l = x - \sum_{i=-r}^{l-1} x_i \in J_l$. Ist $l \geq 0$, so haben wir ein $k := l$ mit $J_k \neq 0$ gefunden.
Im Falle $l < 0$ gibt es wegen (g4) ein $j_1 > 0$, so dass $[J_l, L_{j_1}] \neq 0$ ist, und somit ist $J_{l+j_1} \neq 0$. Ist $l + j_1 \geq 0$, so haben wir ein $k = l + j_1 \geq 0$ mit $J_k \neq 0$. Ist $l + j_1 < 0$, so existiert ein $j_2 > 0$ mit $J_{l+j_1+j_2} \neq 0$. Nachdem wir diesen Schritt oft genug durchgeführt haben (weniger als l Schritte wegen $j_i > 0$ für alle i), erhalten wir $k = l + j_1 + j_2 + \ldots \geq 0$ mit $J_k \neq 0$.
Damit existiert für dieses $k \geq 0$ ein $0 \neq x \in J_k$. Wegen (g1) existiert dazu ein $y \in L_{-1}$ mit $0 \neq [x,y] \in J_{k-1}$. Damit ist $J_{k-1} \neq 0$. Führe diesen Schritt $k+1$-mal durch, dann erhalten wir $J_{-1} \neq 0$.
Die Menge J_{-1} ist ein L_0-Untermodul von L_{-1}. Es folgt

$$J_{-1} = L_{-1} = (J + \sum_{k<-1} L_k) \cap L_{-1}$$

mit (g3). Also ist L_{-1} eine Teilmenge von $J + \sum_{k<-1} L_k$. Aus (g2) und Induktion folgt dann $L_{-i} \subseteq J + \sum_{k<-i} L_k$ für alle $1 \leq i \leq r$, denn es ist

$$L_{-i-1} = [L_{-i}, L_{-1}] \subseteq [J, L_{-1}] + \sum_{k<-i} [L_k, L_{-1}] \subseteq J + \sum_{k<-i-1} L_k$$

für alle $1 \leq i \leq r-1$.
Zeige per vollständiger Induktion nach i, dass $L_i \subseteq J$ für alle $-r \leq i \leq s$ gilt. Nach obiger Überlegung gilt $L_{-r} \subseteq J$. Ist nun $-r < l \leq s$ und $L_i \subseteq J$ für alle $-r \leq i < l$, dann ist auch $L_l \subseteq J + \sum_{k<l} L_l \subseteq J$. Also ist L_{-1} eine Teilmenge von J beziehungsweise $\mathscr{U}(L)\cdot L_{-1} \subseteq J$. Folglich liegt $\mathscr{U}(L)\cdot L_{-1}$ in jedem echten Ideal von L.
Wir zeigen nun, dass L halbeinfach ist. Dazu setzen wir $I := \mathscr{U}(L)\cdot L_{-1}$. Wegen (g1) ist $[L_1, L_{-1}] \neq 0$ und $[L_1, L_{-1}] \subseteq I \cap L_0$. Der L_0-Modul $[I \cap L_0, L_{-1}]$ ist wegen

(g1) nicht-trivial und stimmt wegen (g3) mit L_{-1} überein. Deswegen ist $L_{-1} \subseteq I^{(2)}$ und $I = \mathscr{U}(L) \cdot L_{-1} \subseteq I^{(2)}$. Für das minimale Ideal gilt also $I = I^{(2)}$ und dieses ist somit nicht auflösbar. Folglich ist das maximale auflösbare Ideal $\mathrm{rad}(L) = 0$ und L halbeinfach. ❑

(1.9) Theorem (Einfachheitssatz)
Sei $L = \bigoplus_{i=-r}^{s} L_i$ eine endlich-dimensionale zulässig graduierte Lie-Algebra, so dass die folgenden fünf Bedingungen erfüllt sind:

1. $s, r \geq 1$,
2. $C_L(L^+) \subseteq \sum_{i \geq -1} L_i$,
3. L_{-1} *ist ein einfacher* L_0*-Modul,*
4. $L_i = [L_{-1}, L_{i+1}]$ *für alle* $-r \leq i \leq s-1$ *und*
5. $L_s = [L_0, L_s]$.

Dann ist L einfach.

Beweis. Für den Beweis benötigen wir die Eigenschaften (g1)-(g4) von Seite 39:

(g1) Sei $i \geq 0$ und $x \in L_i$ mit $[x,y] = 0$ für alle $y \in L_{-1}$. Dann ist
$$x \in C_L(L_{-1}) \cap L_i = L_{-r} \cap L_i = 0$$
wegen der Zulässigkeit der Graduierung.

(g2) Die Aussage folgt aus 4. per Induktion.

(g3) Wegen 3. brauchen wir nur zu zeigen, dass L_{-1} treu ist. Dieses folgt aber direkt aus der Zulässigkeit der Graduierung.

(g4) Sei $i < 0$ und $x \in L_i \backslash \{0\}$ mit $[x, L_j] = 0$ für alle $j > 0$. Wegen 2. ist $i = -1$. Sei $V = C_{L_{-1}}(L^+)$. Betrachte $x \in L_0$, $y \in V$ und $z \in L^+$. Dann ist $[z,x] \in L_+$ und es gilt
$$[[x,y],z] = -[[y,z],x] - [[z,x],y] = -[0,x] - 0 = 0.$$
Damit ist V ein nicht-trivialer L_0-Untermodul von L_{-1}, also $V = L_{-1}$. Es folgt $L^+ \subseteq C_L(L_{-1})$. Dieses widerspricht der Zulässigkeit der Graduierung und die geforderte Eigenschaft folgt.

Wegen Theorem III.(1.8) ist $\mathscr{U}(L) \cdot L_{-1}$ damit das einzige minimale Ideal in L. Wir erhalten $L_0 = [L_1, L_{-1}] \subseteq \mathscr{U}(L) \cdot L_{-1}$ wegen $s > 0$. Mit 5. ist $L_s = [L_s, L_0] \subseteq \mathscr{U}(L) \cdot L_{-1}$ und mit 4. und Iteration erhalten wir $L_i = [L_{-1}, L_{i+1}] \subseteq \mathscr{U}(L) \cdot L_{-1}$ für alle $-r \leq i \leq s-1$. Somit ist $L = \mathscr{U}(L) \cdot L_{-1}$ und einfach. ❑

(1.10) Definition
Sei $L = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} L_k$ eine graduierte Lie-Algebra und V ein Modul von L. Jede Zerlegung $V = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k$ in eine direkte Summe von Unterräumen mit $L_k.V_i \subseteq V_{k+i}$ für alle $k,i \in \mathbb{Z}$ heißt **Graduierung** von V.

III.2 Der Duale Modul

Seien L eine Lie-Algebra über dem Körper K, sowie V und W Moduln von L. Man kann den Vektorraum der Homomorphismen von V nach W als Modul auffassen.

(2.1) Proposition
Der Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ der Homomorphismen von V nach W erhält eine L-Modulstruktur via $(x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v)$ für $x \in L$, $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $v \in V$. Ist L eine Lie-p-Algebra und sind V und W p-Moduln, so erhalten wir eine Lie-p-Modulstruktur.

Beweis. Wir zeigen $[x,y].f = x.(y.f) - y.(x.f)$. Sei $v \in V$, dann gilt

$$\begin{aligned}
& (x.(y.f))(v) - (y.(x.f))(v) \\
= \; & x.(y.f)(v) - (y.f)(x.v) - y.(x.f)(v) + (x.f)(y.v) \\
= \; & x.y.f(v) - x.f(y.v) - y.f(x.v) + f(y.x.v) - y.x.f(v) \\
& + y.f(x.v) + x.f(y.v) - f(x.y.v) \\
= \; & x.y.f(v) - y.x.f(v) - f((x.y - y.x).v) \\
= \; & [x,y].f(v) - f([x,y].v) \\
= \; & ([x,y].f)(v).
\end{aligned}$$

Im Falle einer Lie-p-Algebra haben wir Lie-p-Moduln und der Körper K hat die Charakteristik p. Seien φ respektive ψ die p-Darstellungen zu V und W. Dann ist die Darstellung Φ auf $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ definiert durch

$$\Phi(x)(f)(v) = (x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v) = \psi(x)(f(v)) - f(\varphi(x)(v)),$$

für $x \in L$, $v \in V$ und $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Dann gilt

$$\Phi(x^{[p]})(f)(v) = \psi(x^{[p]})(f(v)) - f(\varphi(x^{[p]})(v)) = \psi(x)^p(f(v)) - f(\varphi(x)^p(v)).$$

Zeige per vollständiger Induktion für $2 \leq n \in \mathbb{N}$, dass

$$\Phi(x)^n(f)(v) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \psi(x)^{n-i}(f(\varphi(x)^i(v)))$$

ist. Für $n = 1$ gilt $\Phi(x)(f)(v) = \psi(x)(f(v)) - f(\varphi(x)(v))$. Sei nun die Behauptung für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ wahr. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Phi(x)^{n+1}(f)(v) &= x.(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\psi(x)^{n-i}(f(\varphi(x)^i(v)))) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\psi(x)^{n+1-i}(f(\varphi(x)^i(v))) \\
&\quad -\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\psi(x)^{n-i}(f(\varphi(x)^{i+1}(v))) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\psi(x)^{n+1-i}(f(\varphi(x)^i(v)) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\binom{n}{i-1}\psi(x)^{n+1-i}(f(\varphi(x)^i(v))) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n+1}{i}\psi(x)^{n+1-i}(f(\varphi(x)^i(v))) \\
&\quad +\psi(x)^{n+1}(f(v))+(-1)^{n+1}f(\varphi(x)^{n+1}(v)) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}\psi(x)^{n+1-i}(f(\varphi(x)^i(v)))
\end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen. Dann gilt wegen $p \mid \binom{p}{i}$ für alle $1 \leq i \leq p-1$

$$\Phi(x)^p(f)(v) = \psi(x)^p(f(v)) - f(\varphi(x)^p(v)) = \Phi(x^{[p]})(f)(v),$$

also ist Φ eine p-Darstellung und $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ein p-Modul. ❑

(2.2) Proposition

Sei $L = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} L_k$ graduiert und $V = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k, W = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} W_k$ endlich-dimensionale graduierte Moduln von L. Dann ist $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ graduiert durch

$$\mathrm{Hom}_K(V,W)_k := \{\, f \mid f(V_i) \subseteq W_{i+k} \text{ für alle } i \in \mathbb{Z} \,\}.$$

Beweis. Seien $x \in L_i$ und $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)_k,\ v \in V_l$. Dann ist

$$(x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v) \in x.W_{k+l} + f(V_{i+l}) \subseteq W_{i+k+l}$$

und somit $x.f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)_{i+k}$. Für die Projektion pr_i auf V_i (beziehungsweise W_i) ist wegen der endlichen Dimension beider Moduln die Identität eine endliche Summe: $\mathrm{id} = \sum_i \mathrm{pr}_i$. Deswegen gilt $f = \sum_{i,j} \mathrm{pr}_i \circ f \circ \mathrm{pr}_j$. Für $v \in V_k$ ist $\mathrm{pr}_i \circ f \circ \mathrm{pr}_j(v) = \delta_{jk}\mathrm{pr}_i(f(v)) \in W_{i+k-j}$. Also ist $\mathrm{pr}_i \circ f \circ \mathrm{pr}_j \in \mathrm{Hom}_K(V,W)_{i-j}$, woraus $\mathrm{Hom}_K(V,W) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_K(V,W)_k$ folgt. Trivialerweise ist die Summe direkt. ❑

Wenn man für W den Körper K wählt (siehe III.(1.5) 1.), erhält man den dualen Modul.

(2.3) Definition
Wir bezeichnen $V^* := \mathrm{Hom}(V,K)$ als den zu V **dualen Modul** von L.

(2.4) Beispiel
Der Modul V habe die Basis $\{v_1,\dots,v_n\}$ und sei $x \in L$ und definiere a_{ij} durch $x.v_i := \sum_{j=1}^n a_{ji}v_j$. Dann ist die **Matrixdarstellung** von V gegeben durch

$$\mathscr{X} : L \to \mathfrak{gl}(n,K),\ x \mapsto A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}.$$

Sei V^* der zu V duale Modul und $\{v_1^*,\dots,v_n^*\}$ die duale Basis von V, das heißt, es gilt $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$. Dann ist (III.(1.5) 1. in Verbindung mit III.(2.1))

$$(x.v_i^*)(v_j) = x.v_i^*(v_j) - v_i^*(x.v_j) = -v_i^*(\sum_{k=1}^n a_{kj}v_k) = -\sum_{k=1}^n a_{kj}v_i^*(v_k) = -a_{ij}.$$

Damit ist $x.v_i^* = \sum_{k=1}^n -a_{ik}v_k^*$. Also ist die Matrixdarstellung von V^* gegeben durch

$$\mathscr{X}^* : L \to \mathfrak{gl}(n,K), x \mapsto -A^t = (-a_{ji})_{1\le i,j\le n}.$$

Wir erhalten, dass der duale Modul ist genau dann einfach ist, wenn der ursprüngliche Modul einfach ist. Es gilt außerdem $V \cong (V^*)^*$.

(2.5) Beispiel
Seien $K = \mathbb{F}_2$, $L = W(2,\underline{1})$ und $\{x_1,\dots,x_8\}$ eine Basis von L. Dann hat L eine dreidimensionale Matrixdarstellung $\mathscr{X}$ mit dualer Matrixdarstellung $\mathscr{X}^*$. Mithilfe von GAP [GAP07] überprüften wir die Äquivalenz zu $\mathscr{X}$ und erhielten $\mathscr{X} \ncong \mathscr{X}^*$. Also ist diese Darstellung nicht **selbstdual**. Für eine Veranschaulichung von III.(2.4) siehe folgende Tabelle III.1.

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mathscr{X}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
$\mathscr{X}^*$	$\begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
	x_5	x_6	x_7	x_8
$\mathscr{X}$	$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
$\mathscr{X}^*$	$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

Tabelle III.1: Ein Modul von $W(2,\underline{1})$ über einem Körper der Charakteristik 2 und sein dualer Modul

III.3 Berechnung aller einfachen p-Moduln

In diesem Abschnitt möchten wir eine Methode, alle einfachen p-Moduln zu berechnen, vorstellen. Wir folgen hier [FK98].
Sei F ein Körper der Charakteristik $\mathrm{char}(F) = p > 0$ und A eine assoziative F-Algebra.

(3.1) Definition
Seien V, W zwei Moduln von A. Dann ist $V \otimes W$ ein $A \otimes A$-Modul via

$$(a \otimes b)(v \otimes w) = (av) \otimes (bw)$$

für alle $a, b \in A, v \in V, w \in W$. Der so erhaltene Modul $V \otimes W$ heißt das **Tensorprodukt** von V und W in A.

(3.2) Bezeichnung

1. Die maximale Länge einer strikt absteigenden Kette $A = I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq \ldots \supsetneq I_n = 0$ von zweiseitigen Idealen von A bezeichnen wir mit $d(A)$. Existiert das Maximum nicht, so setzen wir $d(A) = \infty$.

2. Sei P ein projektiver unzerlegbarer A-Modul. Bezeichne mit $s(A)$ die maximale Zahl t, so dass $\bigoplus^t P$ im regulären A-Modul als direkter Summand vorkommt.

3. Sei V ein A-Modul. Wir schreiben $V^{\otimes j} = V \otimes \ldots \otimes V$ (j-mal) und definieren

$$\mathscr{T}_n(V) = \bigoplus_{j=1}^{n} V^{\otimes j} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

beziehungsweise

$$\mathscr{T}_{m,n}(V) = \bigoplus_{j=m+1}^{n} V^{\otimes j} \text{ für alle } n > m \geq 0.$$

Angenommen A ist eine Bialgebra. Seien V, W A-Moduln. Dann wird $V \otimes W$ zu einem A-Modul via Δ, also

$$a.(v \otimes w) = \Delta(a)(v \otimes w). \qquad (*)$$

Also ist $\mathscr{T}_{m,n}(V)$ ein A-Modul für alle $n > m \geq 0$.

(3.3) Lemma
Sei H eine Hopf-Algebra, sowie V und W H-Moduln.

1. *Setzen wir $I_V := \mathrm{Ann}_H(V)$ beziehungsweise $I_W := \mathrm{Ann}_H(W)$, dann gilt*

$$\mathrm{Ann}_{H \otimes H}(V \otimes W) = I_V \otimes H \oplus H \otimes I_W.$$

2. *Ist $I \subseteq H$ mit $\Delta(I) \subseteq \mathrm{Ann}_{H\otimes H}(V \otimes W)$, dann gilt $I \subseteq \mathrm{Ann}_H(V \otimes W)$.*

Beweis.

1. Sei $x \otimes y \in \mathrm{Ann}_{H\otimes H}(V \otimes W)$. Dann ist

$$(x \otimes y).(v \otimes w) = (x.v \otimes y.w) = 0$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$. Falls also ein $x \in H$ mit $x.v \neq 0$ existiert, ist $y.w = 0$ für alle $y \in H$ und umgekehrt, das heißt, es ist $x \otimes y \in I_V \otimes H \oplus H \otimes I_W$.

Ist umgekehrt $x \otimes y \in I_V \otimes H \oplus H \otimes I_W$, so ist $x \otimes y = a \otimes u + z \otimes b$ mit $a \in I_V$, $b \in I_W$ und $u, z \in H$. Dann gilt für alle $v \in V$ und $w \in W$

$$(x \otimes y).(v \otimes w) = (a.v) \otimes (u.w) + (z.v) \otimes (b.w) = 0.$$

2. Sei $x \in I$, dann ist $\Delta(x) \in \mathrm{Ann}_{H\otimes H}(V \otimes W)$. Es gilt also

$$x.(v \otimes w) = \Delta(x)(v \otimes w) = 0$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$ und damit $x \in \mathrm{Ann}_H(V \otimes W)$.

❏

(3.4) Lemma
Sei H eine Hopf-Algebra mit $d(H) < \infty$ und sei V ein H-Modul. Setzen wir $I_{m,n} = \mathrm{Ann}_H(\mathscr{T}_{m,n}(V))$, dann ist $I_{m,n+r} = I_{m,n}$ für alle $r \in \mathbb{N}$ und für $n - m \geq d(H)$.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest gewählt. Wir behaupten zunächst, dass falls $I_{m,n+1} = I_{m,n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist $I_{m,n+r} = I_{m,n}$ für alle $r \in \mathbb{N}$. Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion nach r. Für $r = 1$ haben wir die Behauptung angenommen. Sei nun also die Behauptung wahr für ein r, also $I_{m,n+r} = I_{m,n}$. Es ist

$$\mathscr{T}_{m,n+r}(V) = \mathscr{T}_{m,m+r}(V) \oplus \mathscr{T}_{m+r,n+r}(V) = \mathscr{T}_{m,m+r}(V) \oplus (\mathscr{T}_{m,n}(V) \otimes V^{\otimes r}).$$

Damit gilt $I_{m,n+r} = \mathrm{Ann}_H(\mathscr{T}_{m,n}(V) \otimes V^{\otimes r}) \cap I_{m,m+r}$ und nach der Anwendung des Koprodukts und wegen III.(3.3) 1.

$$\begin{aligned}
\Delta(I_{m,n+r}) &\subseteq \mathrm{Ann}_{H\otimes H}(\mathscr{T}_{m,n}(V) \otimes V^{\otimes r}) \\
&= I_{m,n} \otimes H + H \otimes \mathrm{Ann}_H(V^{\otimes r}) \\
&= I_{m,n+1} \otimes H + H \otimes \mathrm{Ann}_H(V^{\otimes r}) \\
&= \mathrm{Ann}_{H\otimes H}(\mathscr{T}_{m,n+1}(V) \otimes V^{\otimes r}).
\end{aligned}$$

Es folgt mit III.(3.3)

$$\begin{aligned} I_{m,n+r} &\subseteq \mathrm{Ann}_H(\mathscr{T}_{m,n+1}(V)\otimes V^{\otimes r})\cap I_{m,m+r} \\ &= \mathrm{Ann}_H((\mathscr{T}_{m,n+1}(V)\otimes V^{\otimes r})\oplus \mathscr{T}_{m,m+r}(V)) \\ &= \mathrm{Ann}_H((\mathscr{T}_{m,n+r+1}(V)) = I_{m,n+r+1}. \end{aligned}$$

Es gilt außerdem $I_{m,n+r} = \bigcap_{j=m+1}^{n+r} \mathrm{Ann}_H(V^{\otimes j}) \supseteq \bigcap_{j=m+1}^{n+r+1} \mathrm{Ann}_H(V^{\otimes j}) = I_{m,n+r+1}$ und damit die Gleichheit. Damit haben wir die Behauptung durch Induktion bewiesen.
Es gilt $I_{m,m} \supseteq I_{m,m+1} \supseteq I_{m,m+2} \supseteq \dots$. Da eine strikt absteigende Kette von zweiseitigen Idealen höchstens die Länge $d(A)$ haben kann, muss ein $t \leq d(A)$ mit $I_{m,m+t+1} = I_{m,m+t}$ existieren. Dann folgt aus dem obigen, dass $I_{m,m+t+r} = I_{m,m+t}$ für alle $r \in \mathbb{N}$ ist. Insbesondere erhalten wir für jedes n mit $n - m \geq d(A)$

$$I_{m,n+r} = I_{m,n} \quad \forall\, r \in \mathbb{N}.$$

❏

Für $m = 0$ lautet dieses Lemma:

$$\mathrm{Ann}_H(\mathscr{T}_n(V)) = \mathrm{Ann}_H(\mathscr{T}_{d(H)}(V)) \quad \forall\, n \geq d(H).$$

(3.5) Definition

1. Sei L eine Lie-Algebra und V ein L-Modul. Dann hat $L \times V$ eine natürliche Lie-Algebren-Struktur mit V als abelschem Ideal:

   $$[(x,v),(y,w)] := ([x,y], xw - yv), \; x,y \in L, \; v,w \in V.$$

   Man nennt $L \times V$ zusammen mit dieser Strukture das **semidirekte Produkt** von V und L.

2. Seien L_1, L_2, L_3 Lie-Algebren. Eine **kurze exakte Sequenz** ist gegeben durch

   $$0 \to L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{g} L_3 \to 0,$$

   wobei f ein Lie-Algebren-Monomorphismus, g ein Lie-Algebren-Epimorphismus mit $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g)$ sei.

Bei einer kurzen exakten Sequenz kann man sich L_1 als Lie-Unteralgebra von L_2 und L_3 als den Quotienten L_2/L_1 vorstellen.

(3.6) Lemma (Splitting-Lemma)
Die Lie-Algebra L_2 ist genau dann das semidirekte Produkt von L_1 und L_3, wenn die obige kurze exakte Sequenz spaltet, also ein Lie-Algebren-Homomorphismus $t : L_2 \to L_1$ mit $t \circ f = id_{L_1}$ oder ein Lie-Algebren-Homomorphismus $u : L_3 \to L_2$ mit $g \circ u = id_{L_3}$ existiert.

(3.7) Bemerkung
Zur Definition der injektiven Hülle betrachten wir einen Modul V einer Algebra A. Ein Modul ist **injektiv**, falls jede kurze exakte Sequenz $0 \to V \to M \to N \to 0$ von A-Moduln spaltet. Eine **wesentliche Erweiterung** (essential extension) von V ist ein A-Modul M mit $V \subseteq M$, so dass alle nicht-trivialen Untermoduln N von M einen nicht-trivialen Schnitt mit V haben. Insgesamt ist nun die **injektive Hülle** M des Moduls V eine injektive wesentliche Erweiterung von V.

(3.8) Proposition
Ist A eine endlich-dimensionale Hopf-Algebra und M ein treuer A-Modul, so ist jeder projektive unzerlegbare A-Modul isomorph zu einem direkten Summanden von M.

Beweis. Da A artinsch ist, folgt, dass jeder projektive A-Modul isomorph zu einer direkten Summe von projektiven unzerlegbaren Untermoduln des regulären A-Moduls ist (siehe [AF92, Theorem 28.14]). Sei P ein projektiver unzerlegbarer A-Modul. Dann können wir annehmen, dass P ein Untermodul des regulären Moduls ist. Die Hopf-Algebra A ist endlich-dimensional, das heißt, P ist ein injektiver (Jeder projektive Modul einer noetherschen Hopf-Algebra ist nach [Rot79, Theorem 4.37] injektiv.), unzerlegbarer A-Modul und deswegen ist er die injektive Hülle eines einfachen A-Untermoduls L von P. Insbesondere ist L ein minimales Links-Ideal von A. Da M treu ist, existiert ein $m \in M$ mit $L \cdot m \neq 0$. Betrachte die Abbildung

$$P \to P \cdot M \subseteq M,\ a \mapsto a \cdot m$$

und nehme an, dass sein Kern $\mathrm{Ann}_P(m) \neq 0$ ist. Da P als injektive Hülle des Moduls L eine wesentliche Erweiterung von L und $\mathrm{Ann}_P(m)$ ein nichtrivialer Untermodul von P ist, erhalten wir $0 \neq L \cap \mathrm{Ann}_P(m) \subseteq L$. Wegen der Minimalität von L gilt also $L \cap \mathrm{Ann}_P(m) = L$. Das heißt, es gilt $L \subseteq \mathrm{Ann}_P(m)$, welches $L \cdot m \neq 0$ widerspricht. Deshalb haben wir einen A-Modul-Homomorphismus $P \hookrightarrow M$ und da P injektiv ist, spaltet jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to P \to M \to N \to 0$$

von A-Moduln. Folglich ist P isomorph zu einem direkten Summanden von M. ❑

Sei L eine endlich-dimensionale Lie-p-Algebra über F und $\mathscr{U}_p(L)$ die p-Einhüllende Algebra von L. Dann ist $\dim_F \mathscr{U}_p(L) = p^{\dim_F L}$. Sei $\mathscr{U}_p(L)^+ = \mathrm{Kern}(\varepsilon)$ mit ε wie in Beispiel II.(5.3) und bezeichne mit $\mathrm{Irr}_p(L)$ die Menge der einfachen L-p-Moduln.

(3.9) Proposition
Ein Untervektorraum I von $\mathscr{U}_p(L)$ ist genau dann ein Hopf-Ideal, wenn es ein p-Ideal i in L mit $I = \mathscr{U}_p(L) \cdot \mathscr{U}_p(i)^+$ gibt (vergleiche Definition II.(5.5)).

Beweis. Der Untervektorraum I ist genau dann ein Hopf-Ideal von $\mathscr{U}_p(L)$, wenn eine Hopf-Algebra H und ein Hopf-Algebren-Epimorphismus $\pi : \mathscr{U}_p(L) \to H$ mit $I = \mathrm{Kern}(\pi)$ existieren. Setze $h := \pi(L)$. Es ist klar, dass $\pi : L \to P(H)$ ein p-Homomorphismus ist (Bemerkung II.(5.7) 2., sowie II.(5.4)). Also ist h eine Lie-p-Algebra als p-Unteralgebra von $P(H)$. Außerdem ist $i := \mathrm{Kern}(\pi|_L)$ ein p-Ideal von L und wir haben

$$h \cong L/i$$

als Lie-p-Algebren. Es gilt $P(\mathscr{U}_p(L)) = L$ (siehe Bemerkung II.(5.4)) und wir erhalten

$$h = \pi(L) = \pi(P(\mathscr{U}_p(L))) \subseteq P(H).$$

$\mathscr{U}_p(L)$ wird von L als Algebra erzeugt, also gilt

$$H = \pi(\mathscr{U}_p(L)) = \mathrm{alg}_F(\pi(L)) = \mathrm{alg}_F(h) \subseteq \mathrm{alg}_F(P(H)) \subseteq H.$$

Damit ist $H = \mathscr{U}_p(P(H)) = \mathscr{U}_p(h)$ (Bemerkung II.(5.7) 1.) und wir erhalten

$$\mathscr{U}_p(h) \cong H \cong \mathscr{U}_p(L)/I.$$

Zeige nun, dass $I = \mathscr{U}_p(L) \cdot \mathscr{U}_p(i)^+$ ist. Nach Definition II.(4.1) existiert zu $\pi|_L : L \to h$ eine eindeutige Fortsetzung $\bar{\pi} : \mathscr{U}_p(L) \to \mathscr{U}_p(h) = H$ mit $\bar{\pi} = \pi|_L \circ \iota$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\pi|_L"] \arrow[d, "\iota"'] & h \arrow[d, "\iota"] \\
\mathscr{U}_p(L) \arrow[r, "\bar{\pi}"'] & \mathscr{U}_p(h)
\end{tikzcd}$$

Mit π_L ist auch $\bar{\pi}$ surjektiv. Es ist klar, dass $\mathscr{U}_p(L) \cdot i \subseteq \mathrm{Kern}(\bar{\pi})$ gilt. Sei $x_1, \dots, x_l$ eine Basis von L ($l = \dim_F L$), wobei $x_{k+1}, \dots, x_l$ eine Basis von i sei ($l - k = \dim_F i$). Setzen wir $m := (p-1, \dots, p-1) \in \mathbb{N}^l$, so kann man ein Element $x \in \mathrm{Kern}\,\bar{\pi}$ schreiben als $x = \sum_{0 \leq n \leq m} a_n x^n$ mit der Schreibweise aus II.(5.4) und wegen II.(4.2). Ist $n_i > 0$ für ein $i \geq k+1$, so ist $x^n \in \mathscr{U}_p(L) \cdot i$ und $\bar{\pi}(x^n) = 0$. Es gilt also

$$0 = \bar{\pi}(x) = \sum_{0 \leq n \leq m} a_n \bar{\pi}(x^n) = \sum_{0 \leq n \leq m'} a_n \bar{\pi}(x^n)$$

für $m' := (p-1, \dots, p-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^k \times \{0\}^{l-k}$. Weil $\pi|_L(x_1), \dots, \pi|_L(x_k)$ eine Basis von h bilden, bilden x^n mit $0 \leq n \leq m'$ eine Basis von $\mathscr{U}_p(h)$. Sie sind also linear unabhängig und damit gilt $a_n = 0$ für alle $0 \leq n \leq m'$. Wir erhalten $x \in \mathscr{U}_p(L) \cdot i$ und damit $\mathrm{Kern}(\bar{\pi}) = \mathscr{U}_p(L) \cdot i$ und es folgt

$$\mathscr{U}_p(h) \cong \mathscr{U}_p(L)/\mathscr{U}_p(L) \cdot i.$$

Wegen $i \subseteq \mathrm{Kern}(\varepsilon)$ ist $\mathscr{U}_p(L) \cdot i = \mathscr{U}_p(L) \cdot \mathscr{U}_p(i)^+$. Für die Dimensionen gilt somit

$$\dim_F I = \dim_F \mathscr{U}_p(L) \cdot i = \dim_F \mathscr{U}_p(L) \cdot \mathscr{U}_p(i)^+.$$

Also ist $I = \mathscr{U}_p(L) \cdot \mathscr{U}_p(i)^+$.
Nun zeigen wir die umgekehrte Richtung. Da i ein p-Ideal von L ist, ist die Menge $I_0 := \mathscr{U}_p(L)\mathscr{U}_p(i)^+$ ein Ideal von $\mathscr{U}_p(L)$. Damit ist i eine Teilmenge von $\Delta^{-1}(\mathscr{U}_p(L) \otimes I_0 + I_0 \otimes \mathscr{U}_p(L))$. Die Abbildung Δ ist ein F-Algebren-Homomorphismus, deswegen ist letzteres ein Ideal von $\mathscr{U}_p(L)$. Aber i erzeugt $I_0 = \mathscr{U}_p(L) \cdot i$ als Ideal, das heißt, $I_0 \subseteq \Delta^{-1}(\mathscr{U}_p(L) \otimes I_0 + I_0 \otimes \mathscr{U}_p(L)$ und, wenn wir Δ anwenden, folgt

$$\Delta(I_0) \subseteq \mathscr{U}_p(L) \otimes I_0 + I_0 \otimes \mathscr{U}_p(L).$$

Genauso bekommen wir $S(I_0) \subseteq I_0$. Es ist klar, dass I_0 in $\mathrm{Kern}(\varepsilon)$ liegt. Also ist I_0 ein Hopf-Ideal von $\mathscr{U}_p(L)$. ❑

(3.10) Korollar
Sei M ein L-p-Modul. Genau dann ist M ein treuer p-Modul, wenn $\mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)}(M)$ kein Hopf-Ideal $\neq 0$ enthält.

Beweis. Wir beweisen das Korollar mit Proposition III.(3.9).
Für ein Hopf-Ideal $I \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)}(M)$ existiert ein p-Ideal i mit $I = \mathscr{U}_p(L) \cdot \mathscr{U}_p(i)^+$. Mit $I \neq 0$ ist auch $i \neq 0$. Dann ist $0 \neq i \subseteq I \cap L \subseteq \mathrm{Ann}_L(M)$, also der Modul nicht treu.
Sei der Modul M nicht treu. Da $0 \neq \mathrm{Ann}_L(M)$ ein p-Ideal ist, ist die Menge $\mathscr{U}_p(L) \cdot \mathscr{U}_p(\mathrm{Ann}_L(M))^+ \neq 0$ ein Hopf-Ideal in $\mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)}(M)$. ❑

(3.11) Theorem
Sei V ein treuer L-p-Modul. Dann gilt: Jeder projektive unzerlegbare $\mathscr{U}_p(L)$-Modul ist isomorph zu einem direkten Summanden von $V^{\otimes n}$ für ein $1 \leq n \leq d(\mathscr{U}_p(L))$.

Beweis. Zusätzlich zu [FK98] folgen wir hier [Rie67, Theorem 1].
Für $M := \mathscr{T}_{d(\mathscr{U}_p(L))}(V)$ ist der Annihilator $I := \mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)}(M)$ ein Ideal in $\mathscr{U}_p(L)$. Es ist

$$I = \bigcap_{j=1}^{d(\mathscr{U}_p(L))} \mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)}(V^{\otimes j}) \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)}(V).$$

Wenn wir zeigen, dass I ein Hopf-Ideal ist, dann ist $I = 0$ und der Modul M treu nach III.(3.10). Wegen III.(3.3) 1. ist $I \otimes \mathscr{U}_p(L) \oplus \mathscr{U}_p(L) \otimes I = \mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L) \otimes \mathscr{U}_p(L)}(M \otimes M)$ und wir brauchen nur $\Delta(I) \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L) \otimes \mathscr{U}_p(L)}(M \otimes M)$ zu zeigen. Es gilt

$$M \otimes M = \bigoplus_{1 \leq j,k \leq d(\mathscr{U}_p(L))} (V^j \otimes V^k).$$

Also ist

$$\mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)\otimes\mathscr{U}_p(L)}(M\otimes M)=\bigcap_{1\leq j,k\leq d(\mathscr{U}_p(L))}\mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)\otimes\mathscr{U}_p(L)}(V^j\otimes V^k).$$

Nach III.(3.3) 2. gilt für alle $1\leq j,k\leq d(\mathscr{U}_p(L))$

$$\Delta^{-1}(\mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)\otimes\mathscr{U}_p(L)}(V^{\otimes j}\otimes V^{\otimes k}))=\mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)}(V^{\otimes(j+k)}).$$

Wegen $I=\bigcap_{j=1}^{d(\mathscr{U}_p(L))}\mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)}(V^{\otimes j})$ ist I in $\Delta^{-1}(\mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)\otimes\mathscr{U}_p(L)}(V^{\otimes j}\otimes V^{\otimes k}))$ für alle $1\leq j+k\leq d(\mathscr{U}_p(L))$ mit enthalten und wegen III.(3.4) auch für $1\leq j,k\leq d(\mathscr{U}_p(L))$. Damit ist $\Delta(I)\subseteq I\otimes\mathscr{U}_p(L)\oplus\mathscr{U}_p(L)\otimes I$ und I ist ein Hopf-Ideal (Jedes Ideal J einer endlich-dimensionalen Hopf-Algebra H mit $\Delta(J)\subseteq J\otimes H\oplus H\otimes J$ ist ein Hopf-Ideal nach [PQ95, Lemma 6].). Weil V treu ist, gilt $I=0$ wegen III.(3.10) und M ist treu. Mit III.(3.8) folgt die Behauptung. ❑

(3.12) Korollar
Sei V ein treuer L-p-Modul. Dann ist jeder einfache L-p-Modul isomorph zu einem Untermodul von $V^{\otimes n}$ für ein $1\leq n\leq d(\mathscr{U}_p(L))$.

Seien V_1,V_2,V_3,W Moduln und

$$0\to V_1\to V_2\to V_3\to 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Dann ist auch

$$0\to V_1\otimes W\to V_2\otimes W\to V_3\otimes W\to 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Diese Eigenschaft heißt **Exaktheit des Tensorprodukts**.

(3.13) Lemma
Sei $\mathscr{S}=\{V_1,\dots,V_k\}$ eine Menge von einfachen L-p-Moduln. Sei V_1 treu und alle Kompositionsfaktoren von $V_i\otimes V_j$ seien schon in $\mathscr{S}$ für alle $1\leq i,j\leq k$. Dann ist $\mathscr{S}=\mathrm{Irr}_p(L)$.

Beweis. Sei $\mathscr{S}_i$ für $1\leq i\leq d(\mathscr{U}_p(L))$ nun die Menge der Kompositionsfaktoren von $V_1^{\otimes i}$. Nach III.(3.12) ist

$$\bigcup_{i=1}^{d(\mathscr{U}_p(L))}\mathscr{S}_i=\mathrm{Irr}_p(L).$$

Zeige durch Induktion über i, dass $\mathscr{S}_i\subseteq\{V_1,\dots,V_k\}$ für alle $1\leq i\leq d(\mathscr{U}_p(L))$ gilt. Die Aussage ist trivial für $i=1$. Betrachte $W=V_1^{\otimes i}$ und eine Kompositionsreihe

$$0=W_0\lneq W_1\lneq W_2\lneq\dots\lneq W_{l-1}\lneq W_l=W=V_1^{\otimes i}.$$

Dann ist

$$0 = W_0 \otimes V_1 \leq W_1 \otimes V_1 \leq \ldots \leq W_{l-1} \otimes V_1 \leq W_l \otimes V_1 = V_1^{\otimes i+1}$$

eine Filtrierung von $V_1^{\otimes i+1}$. Ist nun M ein Kompositionsfaktor von W, dann existiert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to W_{k-1} \to W_k \to M \to 0$$

für ein $1 \leq k \leq l$. Wegen der Exaktheit des Tensor-Produkts ist auch

$$0 \to W_{k-1} \otimes V_1 \to W_k \otimes V_1 \to M \otimes V_1 \to 0,$$

eine kurze exakte Sequenz, das heißt, es ist

$$(W_k \otimes V_1)/(W_{k-1} \otimes V_1) \cong M \otimes V_1 \cong W_k/W_{k-1} \otimes V_1.$$

Wenn V ein Kompositionsfaktor von $V_1^{\otimes i+1}$ ist, dann ist er ein Kompositionsfaktor von $W \otimes V_1$ und damit ein Kompositionsfaktor von $W_k/W_{k-1} \otimes V_1$ für ein $1 \leq k \leq l$. Nach Induktion ist W_k/W_{k-1} isomorph zu einem Modul aus $\{V_1, \ldots, V_k\}$ und nach Voraussetzung gilt dies damit auch für alle Kompositionsfaktoren von $W_k/W_{k-1} \otimes V_1$. ❑

(3.14) Beispiel (Berechnung der einfachen Moduln von $W(2,\underline{1})$)
Sei F ein Körper der Charakteristik 2 und V der adjungierte Modul von $W(2,\underline{1})$. Dann ist V wegen $\mathrm{Ann}_{W(2,\underline{1})}(V) = Z(W(2,\underline{1})) = 0$ treu. Das Tensorprodukt $V \otimes V$ hat bis auf Isomorphie die folgenden Kompositionsfaktoren:

1. die triviale Darstellung

$$\mathscr{X}_F : W(2,\underline{1}) \to F,\ x \mapsto 0,$$

2. die beiden Darstellungen aus Beispiel III.(1.5)

$$\mathscr{X} : W(2,\underline{1}) \to \mathfrak{gl}(3,F) \text{ und } \mathscr{X}^* : W(2,\underline{1}) \to \mathfrak{gl}(3,F),$$

3. und die adjungierte Darstellung

$$\mathscr{X}_{\mathrm{ad}} : W(2,\underline{1}) \to \mathfrak{gl}(8,F),\ x \mapsto \mathrm{ad}(x).$$

Diese Menge $M := \{\mathscr{X}_F, \mathscr{X}, \mathscr{X}^*, \mathscr{X}_{\mathrm{ad}}\}$ hat die Eigenschaft aus Lemma III.(3.13). Damit ist $M = \mathrm{Irr}_p(W(2,\underline{1}))$, die Menge aller irreduziblen p-Darstellungen von $W(2,\underline{1})$.

III.4 Die maximale Dimension der einfachen Moduln

Wir folgen hier [SF88] und geben einige Grundlagen der Ringtheorie. Sie werden benötigt, um die maximale Dimension einfacher Moduln einer Lie-p-Algebra zu bestimmen. Sei dazu F ein Köper der Charakteristik $p > 0$.

(4.1) Bezeichnung
Im Folgenden werden wir die nachstehenden Bezeichnungen verwenden. Sei L eine Lie-Algebra über dem Körper F.

- Sei $\hat{L}$ die p-Unter-(Lie-)Algebra von $\mathscr{U}(L)$, die von L erzeugt wird:

$$\hat{L} := \mathrm{alg}_F(\{x^{p^n} \mid x \in L,\ n \in \mathbb{N}_0\}) \subseteq \mathscr{U}(L).$$

- Sei $O(L)$ die F-Algebra, die von $\hat{L} \cap Z(\mathscr{U}(L))$ erzeugt wird.

(4.2) Definition

1. Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung mit $R \subseteq Z(S)$. Ein Element $a \in S$ heißt **ganz** über R, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ und $r_i \in R$ für $0 \leq i \leq m-1$ existieren mit

$$a^m + r_{m-1}a^{m-1} + \ldots + r_1 a + r_0 = 0.$$

2. Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung mit $R \subseteq Z(S)$. Der **ganzen Abschluss** von R in S ist die Menge aller Elemente von S, die ganz über R sind:

$$\bar{R}_S := \{x \in S \mid x \text{ ganz über } R\}.$$

3. Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K := \mathrm{Quot}(R)$. Man nennt R **ganz abgeschlossen**, falls jedes $x \in K$, das ganz über R ist, schon in R liegt, das heißt, falls $\bar{R}_K = R$ gilt.

4. Eine **Divisionsalgebra** ist eine Algebra A über einem Körper K, die zugleich ein Schiefkörper ist, das heißt, jedes $0 \neq a \in A$ ist eine Einheit.

(4.3) Theorem
Es sei $\dim_F(L) = n < \infty$.

1. *Es gibt einen Polynomring $O_1 \subseteq O(L)$ in n Veränderlichen, so dass $\mathscr{U}(L)$ ein freier O_1-Modul ist, dessen Rang eine p-Potenz ist.*

2. *$\mathscr{U}(L)$ ist ein noetherscher $O(L)$-Modul.*

3. *$O(L)$ ist eine endlich erzeugte F-Algebra.*

Beweis.

1. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von L. Wegen $\mathrm{ad}(L) \subseteq \mathfrak{gl}(L)$ ist $\mathrm{ad}(L)$ endlich-dimensional. Also existiert zu jedem $1 \le i \le n$ ein $k_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ad}(e_i)^{p^{k_i}} \in \langle\, \mathrm{ad}(e_i)^{p^j} \mid 0 \le j < k_i \,\rangle_F .$$

Dann existieren $a_{ij} \in F$ mit

$$\mathrm{ad}(e_i)^{p^{k_i}} = \sum_{j<k_i} a_{ij} \mathrm{ad}(e_i)^{p^j}.$$

Setze $v_i := \sum_{j=1}^{k_i-1} a_{ij} e_i^{p^j}$ und $z_i := e_i^{p^{k_i}} - v_i$. Wegen $[z_i, L] = 0$ folgt

$$z_i \in Z(\mathscr{U}(L)) \cap \hat{L} \subseteq O(L).$$

Es ist $v_i \in \mathscr{U}(L)_{(p^{k_i-1})}$ (kanonische Filtrierung von $\mathscr{U}(L)$). Nach [SF88, Lemma 1.9.7] ist

$$B := \{z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n} \cdot e_1^{s_1} \cdots e_n^{s_n} \ \mid\ r_i, s_i \in \mathbb{N}_0,\ s_i < p^{k_i},\ 1 \le i \le n\} \qquad (*)$$

eine F-Basis von $\mathscr{U}(L)$. Damit ist $O_1 = F[z_1, \dots, z_n]$ der gesuchte Polynomring.

2. Wegen Hilberts Basissatz ist O_1 noethersch. Weil $\mathscr{U}(L)$ ein endlich erzeugter O_1-Modul ist, ist $\mathscr{U}(L)$ ein noetherscher O_1-Modul. Also ist $\mathscr{U}(L)$ ein noetherscher $O(L)$-Modul.

3. $O(L)$ ist als endlich erzeugter Modul der endlich erzeugten Algebra O_1 endlich erzeugt.

❑

Aus III.(4.3) folgt, dass $Z(\mathscr{U}(L))$ endlich erzeugter O_1-Modul ist. Mit [Kun79, Korollar II.2.3] ist $Z(\mathscr{U}(L))$ über O_1 eine ganze Ringerweiterung. Die Algebra O_1 ist eine Noether-Normalisierung von $Z(\mathscr{U}(L))$ [Kun79, Definition II.3.3] und n die Krulldimension von $Z(\mathscr{U}(L))$ [Kun79, Satz II.3.4, Definition II.1.3].
Die Algebra O_1 hängt von der Wahl der Basis von L ab. Falls L eine Lie-p-Algebra ist, können wir $k_i = p$ und $v_i = e_i^{[p]}$ für $1 \le i \le n$ setzen. In diesem Fall erhalten wir eine Definition, die unabhängig von der Wahl der Basis ist:

$$O_1 = O_1(L) = \mathrm{alg}_F(\{x^{[p]} - x^p \mid x \in L\}).$$

(4.4) Theorem
Sei L eine Lie-p-Algebra.

1. *Die Algebra $O(L)$ wird von $O_1(L) \cup Z(L)$ erzeugt.*

2. *Ist $\dim_F L = n$, dann ist $O(L)$ ein Polynomring in n Variablen und $\mathscr{U}(L)$ ein freier $O(L)$-Modul vom Rang $p^{\dim_F L/Z(L)}$.*

3. *$O(L)$ ist ganz abgeschlossen.*

4. *Für eine Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ von L ist $\{e_1^{s_1}\cdots e_n^{s_n} \mid 0 \le s_i \le p-1,\ 1 \le i \le n\}$ eine Basis für $\mathscr{U}(L)$ über $O_1(L)$.*

Beweis.

1. Für $x \in L$ ist wegen der Lie-p-Algebra-Eigenschaft $[x^{[p]} - x^p, L] = 0$. Also ist

$$x^{[p]} - x^p \in Z(\mathscr{U}(L)) \cap \hat{L} \subseteq O(L)$$

für alle $x \in L$. Damit gilt $O_1(L) \cup Z(L) \subseteq O(L)$ und die von $O_1(L) \cup Z(L)$ erzeugte Algebra ist eine Teilmenge von $O(L)$.

Umgekehrt: Wir zeigen per vollständiger Induktion nach k

$$x^{p^k} - x^{[p]^k} \in O_1(L) \ \ \forall x \in L,\ k \in \mathbb{N}_0$$

gilt, wobei $[p]^k = [p] \circ \ldots \circ [p]$ (k-mal) ist. Die Aussage ist klar für $k = 0, 1$. Ist nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest gewählt mit $x^{p^k} - (x^{[p]^k}) \in O_1(L)$ für alle $x \in L$, dann gilt

$$x^{p^{k+1}} - x^{[p]^{k+1}} = (x^p - x^{[p]})^{p^k} + (x^{[p]})^{p^k} - (x^{[p]})^{[p]^k} \in O_1(L)\ \forall x \in L$$

und die Behauptung folgt. Damit gilt zunächst

$$\hat{L} \subseteq O_1(L) + L$$

und folglich auch

$$\hat{L} \cap Z(\mathscr{U}(L)) \subseteq (O_1(L) + L) \cap Z(\mathscr{U}(L)).$$

Seien $x \in O_1(L) \subseteq Z(\mathscr{U}(L))$, $y \in L$ und $z \in L \subseteq \mathscr{U}(L)$. Dann gilt

$$(x+y)z = z(x+y) \Leftrightarrow xz + yz = zx + zy = xz + zy \Leftrightarrow yz = zy.$$

Damit ist $\hat{L} \cap Z(\mathscr{U}(L)) \subseteq O_1(L) + Z(L)$ und $O(L)$ eine Teilmenge der von $O_1(L) \cup Z(L)$ erzeugten Algebra.

2. Sei $\{g_1,\dots,g_t\}$ eine Basis für $Z(L)$ und $\{g_1,\dots,g_n\}$ eine Basis für L. Wir setzen $z_i := g_i$ für $1 \le i \le t$ und $z_i := g_i^p - g_i^{[p]}$ für $t+1 \le i \le n$. Dann ist
$$F[z_1,\dots,z_n] \subseteq O(L)$$
ein Polynomring und $Z(L) \subseteq F[z_1,\dots,z_n]$. Es gilt $z_i^p = g_i^p \in F[z_1,\dots,z_n]$ und $z_i^{[p]} = g_i^{[p]} \in Z(L)$ (wegen $z_i \in Z(L)$) für $1 \le i \le t$. Da damit
$$g_i^p - g_i^{[p]} \in F[z_1,\dots,z_n] + Z(L)$$
für $1 \le i \le t$ ist, gilt $O_1(L) \subseteq F[z_1,\dots,z_n]$ und wegen 1. folgt
$$O(L) = F[z_1,\dots,z_n].$$
Mit [SF88, Lemma 1.9.7] erhalten wir eine Basis
$$\{\prod_{j=t+1}^{n} g_j^{s_j} \mid 0 \le s_j \le p-1\}$$
von $\mathscr{U}(L)$ über $O(L)$. Also gilt $\mathrm{rang}_{O(L)}\mathscr{U}(L) = p^{n-t} = p^{\dim_F L/Z(L)}$.
3. Wegen 2. ist $O(L)$ als Polynomring ein faktorieller Ring. Somit ist $O(L)$ ganz abgeschlossen.
4. Folgt aus (*) im Beweis von III.(4.3) 1.

❑

Auf einer Menge $\emptyset \neq S \subseteq Z(\mathscr{U}(L))$, die abgeschlossen bezüglich der Multiplikation ist (für alle $s,t \in S$ ist $s \cdot t \in S$), definieren wir eine Äquivalenzrelation durch
$$(s,a) \sim (t,b) \Leftrightarrow ta = sb$$
für $a,b \in \mathscr{U}(L)$ und $s,t \in S$. Dann hat $S^{-1}\mathscr{U}(L) := S \times \mathscr{U}(L)/\sim$ eine Algebren-Struktur. Wir setzen
$$Q(\mathscr{U}(L)) := (Z(\mathscr{U}(L))\backslash\{0\})^{-1}\mathscr{U}(L).$$
Für Mengen $\emptyset \neq S_1 \subseteq S_2 \subseteq Z(\mathscr{U}(L))$ mit $0 \notin S_2$, die abgeschlossen bezüglich der Multiplikation sind, existiert eine kanonische Einbettung $S_1^{-1}\mathscr{U}(L) \subseteq S_2^{-1}\mathscr{U}(L)$. Also können wir $\mathscr{U}(L)$ und jeden Quotientenkörper $Q(R)$ für einen Teilring R von $Z(\mathscr{U}(L))$ (der Ring R ist ein Integritätsbereich, weil $\mathscr{U}(L)$ nullteilerfrei ist) als Unteralgebra von $Q(\mathscr{U}(L))$ ansehen.

(4.5) Theorem

1. *Ist R ein Teilring von $Z(\mathscr{U}(L))$, so dass $\mathscr{U}(L)$ ein endlich erzeugter R-Modul ist, dann ist $Q(\mathscr{U}(L)) = (R\backslash\{0\})^{-1}\mathscr{U}(L)$.*
2. *$Q(\mathscr{U}(L))$ ist eine Divisionsalgebra.*

Beweis.

1. Die universell einhüllende Algebra $\mathscr{U}(L)$ ist nach [Kun79, Korollar II.2.3] ganz über R, das heißt, ein Element $x \in \mathscr{U}(L)$ genügt einer Gleichung
$$x^n + r_1 x^{n-1} + \ldots + r_n = 0$$
für gewisse $r_i \in R$. Nach Lemma II.(6.8) ist $\mathscr{U}(L)$ nullteilerfrei und wir können annehmen, dass $r_n \neq 0$ ist. Dann ist x in $(R\backslash\{0\})^{-1}\mathscr{U}(L)$ invertierbar und
$$x^{-1} = -r_n^{-1}(x^{n-1} + \ldots + r_{n-1}).$$
Insbesondere ist jedes Element aus $Z(\mathscr{U}(L))\backslash\{0\}$ invertierbar in der Algebra $(R\backslash\{0\})^{-1}\mathscr{U}(L) \subseteq Q(\mathscr{U}(L))$, welches die Gleichheit beweist.
2. Nach III.(4.3) 1. ist $\mathscr{U}(L)$ ein endlich erzeugter $Z(\mathscr{U}(L))$-Modul. Dann folgt wie im Beweis von 1., dass jedes $x \in \mathscr{U}(L)$ invertierbar ist.

❑

(4.6) Lemma
Es gilt $Z(Q(\mathscr{U}(L))) = Q(Z(\mathscr{U}(L)))$.

Beweis. Die Inklusion $Q(Z(\mathscr{U}(L)) \subseteq Z(Q(\mathscr{U}(L)))$ ist klar wegen
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$
für alle $a/b \in Q(\mathscr{U}(L))$ und $c/d \in Q(Z(\mathscr{U}(L)))$.
Für $x/y \in Z(Q(\mathscr{U}(L)))$ gilt
$$\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} \quad \forall\, \frac{a}{b} \in Q(\mathscr{U}(L)).$$
Wählen wir $a = 1$, so folgt
$$\frac{x}{yb} = \frac{x}{by} \quad \forall\, b \in \mathscr{U}(L),$$
also $y \in Z(\mathscr{U}(L))$. Wählen wir $b = 1$, so folgt
$$\frac{ax}{y} = \frac{xa}{y} \quad \forall\, a \in \mathscr{U}(L),$$
also $x \in Z(\mathscr{U}(L))$. Damit ist $x/y \in Q(Z(\mathscr{U}(L)))$. ❑

(4.7) Korollar

1. *Sei $R \subseteq Z(\mathscr{U}(L))$ eine Unteralgebra. Der ganze Abschluss $\bar{R}$ von R in $Q(R) \subseteq Q(\mathscr{U}(L))$ liegt in $\mathscr{U}(L)$.*

2. *Ist $R \subseteq Z(\mathscr{U}(L))$ eine Unteralgebra mit $Q(R) \cap \mathscr{U}(L) = R$, dann ist R ganz abgeschlossen.*

3. *$Z(\mathscr{U}(L))$ ist ganz abgeschlossen.*

Beweis.

1. Ist $x \in \bar{R}$, dann gibt es $a_i \in R$ für $0 \leq i \leq n-1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Wegen $x \in Q(R) \subseteq Q(Z(\mathscr{U}(L))) \subseteq Z(Q(\mathscr{U}(L)))$ (Lemma III.(4.6)) ist die Algebra $B := \sum_{i=0}^{n-1} \mathscr{U}(L)x^i$ eine Unteralgebra von $Q(\mathscr{U}(L))$. Wir schreiben $x = r/s$ für $r \in R$ und $s \in R \backslash \{0\}$. Dann ist

$$\mathscr{U}(L) \subseteq B \subseteq \frac{1}{z}\mathscr{U}(L),$$

mit $z := s^n \in Z(\mathscr{U}(L))$. Wir betrachten die kanonische Filtrierung $(\mathscr{U}(L)_{(k)})_{k\geq 0}$ von $\mathscr{U}(L)$ und zeigen durch Induktion nach k, dass

$$zB \cap \mathscr{U}(L)_{(k)} = z\mathscr{U}(L) \cap \mathscr{U}(L)_{(k)}$$

für alle $k \geq 0$ ist. Es gilt $zB = \sum_{i=0}^{n-1} \mathscr{U}(L) r^i s^{n-i} \subseteq s\mathscr{U}(L)$. Falls $zB \cap F \neq 0$ ist, gilt wegen der kanonischen Filtrierung $s \in F$ und es folgt $z\mathscr{U}(L) \cap F \neq 0$. Falls $z\mathscr{U}(L) \cap F \neq 0$ ist, gilt wegen der kanonischen Filtrierung $z \in F$ und es folgt $zB \cap F \neq 0$. Sei nun $zB \cap \mathscr{U}(L)_{(k)} = z\mathscr{U}(L) \cap \mathscr{U}(L)_{(k)}$ für ein beliebiges, aber festes $k \geq 0$ und $a \in zB \cap \mathscr{U}(L)_{(k+1)}$. Für $m \geq 1$ erhalten wir

$$a^m \in z^m B \subseteq z^{m-1}\mathscr{U}(L).$$

Damit existieren $u_m \in \mathscr{U}(L)$ mit $a^m = z^{m-1}u_m$. Definieren wir

$$\nu : \mathscr{U}(L) \to \mathbb{N}_0,\ x \mapsto \min\{k \mid x \in \mathscr{U}(L)_{(k)}\},$$

so folgt aus dem Beweis von II.(6.8) 2. $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$ für alle $x, y \in \mathscr{U}(L)$. Die Elemente a, z und u_m definieren homogene Elemente $\bar{a} := a + \mathscr{U}(L)_{\nu(a)-1}$, $\bar{z} := z + \mathscr{U}(L)_{\nu(z)-1}$ und $\bar{u}_m := u_m + \mathscr{U}(L)_{\nu(u_m)-1}$ der graduierten Algebra $\mathrm{gr}(\mathscr{U}(L))$. Aus der Definition der Multiplikation in $\mathrm{gr}(\mathscr{U}(L))$ und aus $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$ für alle $x, y \in \mathscr{U}(L)$ folgt dann $(\bar{a})^m = (\bar{z})^{m-1}\bar{u}_m$. Sei nun q ein

Primfaktor von $\bar{z}$. Weil $\mathrm{gr}(\mathscr{U}(L))$ ein faktorieller Ring (II.(6.8) 1.) ist, existieren $j,l \in \mathbb{N}$ mit

$$q^j \mid \bar{z},\ \ q^{j+1} \nmid \bar{z},\ \ q^l \mid \bar{a},\ \ q^{l+1} \nmid \bar{a}.$$

Es folgt

$$q^{(m-1)j} \mid (\bar{z})^{m-1},\ \ q^{(m-1)j+1} \nmid (\bar{z})^{m-1},\ \ q^{ml} \mid (\bar{a})^m,\ \ q^{ml+1} \nmid (\bar{a})^m.$$

Wegen $(\bar{z})^{m-1} \mid (\bar{a})^m$ erhalten wir $(m-1)j \leq ml$ für alle m. Daraus folgt $j \leq l$, das heißt, $\bar{z}$ teilt $\bar{a}$. Also existiert ein $v \in \mathscr{U}(L)$ mit $\bar{a} = \bar{z}\bar{v}$ und damit ist $a - zv \in \mathscr{U}(L)_{(k)}$. Wegen $\mathscr{U}(L) \subseteq B$ und $a \in zB$ folgt

$$a - zv \in \mathscr{U}(L)_{(k)} \cap zB,$$

nach Induktion ist $a - zv \in z\mathscr{U}(L) \cap \mathscr{U}(L)_{(k)}$ und damit $a \in z\mathscr{U}(L) \cap \mathscr{U}(L)_{(k+1)}$, wie gewünscht. Damit ist $z\mathscr{U}(L) = zB$. Wir erhalten $B = \mathscr{U}(L)$, da $\mathscr{U}(L)$ nullteilerfrei ist. Damit ist $x \in B \subseteq \mathscr{U}(L)$.

2. Die Aussage folgt direkt aus 1.

3. Die Menge $Z(\mathscr{U}(L))$ genügt den Bedingungen aus 2.

❑

(4.8) Definition
Sei Δ eine Divisionsalgebra über F und V ein Δ-Vektorraum. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathrm{End}_\Delta(V)$ heißt **dicht** in $\mathrm{End}_\Delta(V)$, falls für jede endliche Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von Δ-linear unabhängigen Elementen von V und jede Menge $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq V$ ein $f \in T$ existiert mit $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

(4.9) Theorem (Dichtheitssatz, Jacobson)
Sei $\varphi : A \to \mathrm{End}_F(V)$ eine irreduzible Darstellung einer assoziativen Algebra A. Dann ist $\Delta := C_{\mathrm{End}_F(V)}(\varphi(A))$ eine Divisionsalgebra und $\varphi(A)$ ist dicht in $\mathrm{End}_\Delta(V)$.

Wir betrachten den Fall $\dim_F(V) < \infty$ und F algebraisch abgeschlossen. Dann ist $\Delta \supseteq F$ eine endlich-dimensionale Körpererweiterung, also ist $F = \Delta$. Damit folgt aus dem Dichtheitssatz $\varphi(A) = \mathrm{End}_F(V)$. Sei insbesondere $\varphi : L \to \mathrm{End}_F(V)$ eine irreduzible Darstellung von L. Dann ist V endlich-dimensional. Falls $\hat{\varphi} : \mathscr{U}(L) \to \mathrm{End}_F(V)$ die eindeutige Erweiterung von φ ist, erhalten wir $\hat{\varphi}(\mathscr{U}(L)) = \mathrm{End}_F(V)$.
Für eine assoziative F-Algebra A sei $\chi(A)$ die Algebra, die von allen Rechts- und Linksmultiplikationen erzeugt wird, das heißt

$$\chi(A) = \langle\, l_a, r_a \mid a \in A \,\rangle \subseteq \mathrm{End}_{Z(A)}(A).$$

(4.10) Theorem (Artin-Whaples)
Es sei A eine einfache assoziative F-Algebra mit $F = Z(A)$. Für F-linear unabhängige Elemente $a_1, \ldots, a_n$ existieren $f_1, \ldots, f_n \in \chi(A)$ mit $f_i(a_j) = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Beweis. Die Algebra A ist ein $\chi(A)$-Modul. Weil A einfach ist, ist es als $\chi(A)$-Modul einfach. Sei $f \in C_{\mathrm{End}_F(A)}(\chi(A)), a \in A$. Dann ist

$$f(a) = (f \circ l_a)(1) = (l_a \circ f)(1) = af(1)$$

und

$$f(a) = (f \circ r_a)(1) = (r_a \circ f)(1) = f(1)a,$$

wobei l_a beziehungsweise r_a die Rechts- beziehungsweise Linksmultiplikation mit a bezeichne. Also haben wir $f(1) \in Z(A) = F$ und $f \in F\,\mathrm{id}_A \cong F$. Aus dem Dichtheitssatz III.(4.9) folgt, dass $\chi(A)$ dicht in $\mathrm{End}_F(A)$ ist, das heißt, es existieren $f \in \chi(A)$ mit $f_i(a_j) = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. ❑

(4.11) Theorem

1. *Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\dim_{Q(Z(\mathscr{U}(L)))} Q(\mathscr{U}(L)) = p^{2m}$.*
2. *Sei F algebraisch abgeschlossen und $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine irreduzible Darstellung. Dann ist $\dim_F V \leq p^m$.*
3. *Falls F algebraisch abgeschlossen ist, existiert ein einfacher L-Modul V mit $\dim_F V = p^m$.*

Beweis.

1. Weil $Q(\mathscr{U}(L))$ eine Divisionsalgebra ist III.(4.5), ist $Z(Q(\mathscr{U}(L)))$ ein Körper. Nach Lemma III.(4.6) gilt $Z(Q(\mathscr{U}(L))) = Q(Z(\mathscr{U}(L)))$. Die Zahl $\dim_{Q(Z(\mathscr{U}(L)))} Q(\mathscr{U}(L))$ ist ein Quadrat nach [Pie82, 13.1 Corollary a].

   Wegen III.(4.3) existiert ein Polynomring $O_1 \subseteq Z(\mathscr{U}(L))$, so dass $\mathscr{U}(L)$ ein freier O_1-Modul von p-Potenz-Rang p^l ist. Damit ist $Q(\mathscr{U}(L))$ ein $Q(O_1)$-Vektorraum der Dimension p^l und es gilt

   $$p^l = \dim_{Q(O_1)} Q(\mathscr{U}(L)) = \dim_{Q(Z(\mathscr{U}(L)))} Q(\mathscr{U}(L)) \cdot [Q(Z(\mathscr{U}(L))) : Q(O_1)],$$

   das heißt, $\dim_{Q(Z(\mathscr{U}(L)))} Q(\mathscr{U}(L))$ ist eine p-Potenz.

   (Für eine Körpererweiterung $L \subseteq K$ ist $[L : K] := \dim_K(L)$.)

2. Die Darstellung $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ kann zu einer irreduziblen Darstellung $\hat{\varphi} : \mathscr{U}(L) \to \mathrm{End}_F(V)$ erweitert werden. Da V endlich-dimensional ist, folgt aus dem Dichtheitssatz III.(4.9)

   $$\hat{\varphi}(\mathscr{U}(L)) = \mathrm{End}_F(V).$$

Ist $x \in \mathscr{U}(L)$, dann ist $Q(Z(\mathscr{U}(L)))[x]$ ein Teilkörper von $Q(\mathscr{U}(L))$, welcher den Grad $\leq p^m$ über $Q(Z(\mathscr{U}(L)))$ hat. Wegen III.(4.7) ist $Z(\mathscr{U}(L))$ ganz abgeschlossen und aus [SF88, Lemma 6.5.2(2)] angewendet auf $Z(\mathscr{U}(L))$ und $Z(\mathscr{U}(L))[x]$ folgt, dass das Minimalpolynom f_x von x über $Q(Z(\mathscr{U}(L)))$ Koeffizienten in $Z(\mathscr{U}(L))$ hat. Da V einfach und F algebraisch abgeschlossen ist, ist

$$\hat{\varphi}(Z(\mathscr{U}(L))) \subseteq Z(\hat{\varphi}(\mathscr{U}(L))) = Z(\mathrm{End}_F(V)) = F\,\mathrm{id}_V$$

und damit gilt $\hat{\varphi}(Z(\mathscr{U}(L))) = F\,\mathrm{id}_V$. Also erfüllt $\hat{\varphi}(x)$ ein Polynom vom Grad $\deg f_x \leq p^m$ über F.

Sei nun $f \in \mathrm{End}_F(V)$. Dann existiert ein $x \in \mathscr{U}(L)$ mit $\hat{\varphi}(x) = f$ und f hat ein Minimalpolynom vom Grad $\leq p^m$. Daraus folgt $\dim_F(V) \leq p^m$.

3. Sei $\{e_1, \dots, e_{p^{2m}}\} \subseteq \mathscr{U}(L)$ eine Basis von $Q(\mathscr{U}(L))$ über $Q(Z(\mathscr{U}(L)))$. Wegen III.(4.10) gibt es $f_1, \dots, f_{p^{2m}} \in \chi(Q(\mathscr{U}(L)))$ mit

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} \;\; \forall\, 1 \leq i, j \leq p^{2m}.$$

Wegen III.(4.5) mit $R = O_1$ ist $Q(\mathscr{U}(L)) = (O_1 \backslash \{0\})^{-1}\mathscr{U}(L)$. Durch Multiplikation mit den Nennern erhalten wir $g_1, \dots, g_{p^{2m}} \in \chi(\mathscr{U}(L))$, sowie ein $\alpha \in O_1 \backslash \{0\}$ mit $g_i(e_j) = \alpha\delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq p^{2m}$. Weil der Schnitt aller maximalen Ideale des Polynomrings O_1 trivial ist, gibt es ein maximales Ideal M von O_1 mit $\alpha \notin M$. Wegen der ‚Going-Up'-Eigenschaft [SF88, Corollary 6.3.4(2)] existiert ein maximales Ideal M' (maximal als zweiseitiges Ideal) von $\mathscr{U}(L)$, so dass $M' \cap O_1 = M$. Seien $r_1, \dots, r_{p^{2m}} \in F$, so dass die Summe $\sum_{j=1}^{p^{2m}} r_j e_j$ in M' liegt. Wegen $g_i \in \chi(\mathscr{U}(L))$ gilt $g_i(M') \subseteq M'$ für alle $1 \leq i, j \leq p^{2m}$. Folglich ist $r_i\alpha = g_i(\sum_{j=1}^{p^{2m}} r_j e_j) \in M' \cap O_1 = M$ für alle $1 \leq i, j \leq p^{2m}$. Wir erhalten $r_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq p^{2m}$, sowie $\dim_F \mathscr{U}(L)/M' \geq p^{2m}$. Da $\mathscr{U}(L)/M'$ endlich-dimensional und einfache F-Algebra (M' maximal als zweiseitiges Ideal in $\mathscr{U}(L)$) ist, existiert ein einfacher $\mathscr{U}(L)$-Modul der Dimension $\geq p^{2m}$. Mit 2. folgt die Behauptung.

❑

(4.12) Korollar

Sei F algebraisch abgeschlossen und L eine Lie-p-Algebra.

1. *Für eine irreduzible Darstellung $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ ist $\dim_F V \leq p^{\frac{1}{2}\dim_F L/Z(L)}$.*
2. *Gilt $Z(\mathscr{U}(L)) = O(L)$, so existiert ein einfacher L-Modul V der Dimension $\dim_F V = p^{\frac{1}{2}\dim_F L/Z(L)}$.*

Beweis.

1. Die Behauptung folgt wie im Beweis von Theorem III.(4.11): Wegen III.(4.4) ist $O(L)$ ein Polynomring in $\dim_F L$ Unbestimmten und $\mathscr{U}(L)$ ist ein freier $O(L)$-Modul vom Rang $p^{\dim_F L/Z(L)}$. Folglich ist $Q(\mathscr{U}(L))$ ein $Q(O(L))$-Vektorraum der Dimension $p^{\dim_F L/Z(L)}$ und
$$\begin{aligned} p^{\dim_F L/Z(L)} &= \dim_{Q(O(L))} Q(\mathscr{U}(L)) \\ &= \dim_{Q(Z(\mathscr{U}(L)))} Q(\mathscr{U}(L)) \cdot [Q(Z(\mathscr{U}(L))) : Q(O(L))], \end{aligned}$$
das heißt, es ist $\dim_{Q(Z(\mathscr{U}(L)))} Q(\mathscr{U}(L)) \le p^{2m}$ mit $m \le \frac{1}{2}\dim_F L/Z(L)$.
2. Sei $O(L) = Z(\mathscr{U}(L))$. Dann ist $Q(Z(\mathscr{U}(L))) = Q(O(L))$. Wir erhalten mit $[Q(Z(\mathscr{U}(L))) : Q(O(L))] = 1$, dass für das m in III.(4.11) $m = \frac{1}{2}\dim_F L/Z(L)$ gilt.

❏

(4.13) Beispiel
Es ist $Z(W(2,\underline{1})) = 0$ und $\dim_F W(2,\underline{1}) = 2p^2$. Damit kann es nur einfache Moduln der Dimension $\le p^{p^2}$ geben. Für den Fall $p = 2$, wie schon gesehen, ist die höchste Dimension eines einfachen p-Moduls 8, sie ist kleiner als $16 = 2^{2^2}$.

III.5 Die Chevalley-Eigenschaft

Wir möchten hier eine Eigenschaft des Tensor-Produkts von Moduln vorstellen und folgen [Mol81].

(5.1) Definition
Sei F ein Körper der Charakteristik $\mathrm{char}(F) = p > 0$ und A eine endlich-dimensionale F-Algebra. Das **Jacobson-Radikal** $J(A)$ von A ist definiert als das größte nilpotente Ideal von A.

Ein endlich-dimensionaler A-Modul V ist genau dann halbeinfach, wenn $J(A) \cdot V = 0$ gilt.

(5.2) Definition
Eine Hopf-Algebra H hat die **Chevalley-Eigenschaft**, falls das Tensor-Produkt von je zwei einfachen H-Moduln halbeinfach ist.

(5.3) Satz
Eine endlich-dimensionale Hopf-Algebra H hat die Chevalley-Eigenschaft genau dann, wenn das Jacobson-Radical $J(H)$ ein Hopf-Ideal ist.

Beweis. Die Antipode S einer endlich-dimensionalen Hopf-Algebra ist bijektiv [LS69, Proposition 2], damit ist sie ein Algebren-Antiisomorphismus, welche eine bijektive Beziehung zwischen Links- und Rechts-Moduln herstellt. Daraus folgt direkt, dass $J := J(H) = S(J(H))$ ist und das Jacobson-Radikal damit stabil unter der Antipoden-Operation ist.
Ist J ein Hopf-Ideal, dann gilt zusätzlich $\Delta(J) \subseteq J \otimes H + H \otimes J$. Für zwei halbeinfache beziehungsweise einfache Moduln V, W folgt dann:

$$J(V \otimes W) = \Delta(J)(V \otimes W) \subseteq (JV) \otimes W + V \otimes (JW) = 0.$$

Also ist $V \otimes W$ für einfache Moduln V, W halbeinfach und H hat die Chevalley-Eigenschaft.
Wir zeigen nun die Rückrichtung. Für H-Moduln V, W gilt nach III.(3.3) 1. :

$$\mathrm{Ann}_{H \otimes H}(V \otimes W) = \mathrm{Ann}_H(V) \otimes H + H \otimes \mathrm{Ann}_H(W).$$

Es seien nun $\pi_i : H \to \mathrm{End}(V_i)$ für $1 \leq i \leq n$ die irreduziblen Darstellungen der Hopf-Algebra H. Falls H die Chevalley-Eigenschaft hat, ist $V_i \otimes V_j$ halbeinfach für alle $1 \leq i, j \leq n$. Also ist $J(V_i \otimes V_j) = 0$, das heißt, es ist

$$\Delta(J) \subseteq \mathrm{Ann}_H(V_i) \otimes H + H \otimes \mathrm{Ann}_H(V_j)$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ und wir haben

$$\Delta(J) \subseteq \bigcap_{1 \leq i, j \leq n} [\mathrm{Ann}_H(V_i) \otimes H + H \otimes \mathrm{Ann}_H(V_j)] = J \otimes H + H \otimes J$$

wegen $J = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Ann}_H(V_i)$. Es folgt, dass J ein Hopf-Ideal ist. ❑

Sei im Folgenden L eine endlich-dimensionale Lie-p-Algebra über dem Körper F mit $\mathrm{char}(F) = p > 0$ und $\mathscr{U}_p(L)$ ihre universell p-einhüllende Algebra.
Da $\mathscr{U}_p(L)$ endlich-dimensional ist, hat $\mathscr{U}_p(L)$ und somit auch L nur endlich viele unterschiedliche Isomorphieklassen von einfachen Moduln, beziehungsweise irreduziblen p-Darstellungen. Es sei $\Lambda = \{\pi_1, \ldots, \pi_l\}$ die Menge der Repräsentaten irreduzibler p-Darstellungen. Dann ist die zugehörige Menge $\bar{\Lambda} = \{\bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_l\}$, wobei $\bar{\pi}_i$ die Erweiterung von π_i auf $\mathscr{U}_p(L)$ sei, eine vollständige Menge von Repräsentanten der irreduziblen p-Darstellungen von $\mathscr{U}_p(L)$.

(5.4) Definition
Das **p-nilpotente Radikal** S von L ist $S = \cap_{\pi \in \Lambda} \mathrm{Kern}(\pi)$.

Das Ideal S ist nilpotent. Schnell folgt, dass das Jacobson-Radikal J von $\mathscr{U}_p(L)$ durch $J = \cap_{\bar{\pi}\in\bar{\Lambda}} \mathrm{Kern}(\bar{\pi})$ gegeben ist.

(5.5) Proposition

Das p-nilpotente Radikal S ist eine nilpotente Lie-Algebra. Das Jacobson-Radikal $J := J(\mathscr{U}_p(L))$ von $\mathscr{U}_p(L)$ ist ein Hopf-Ideal genau dann, wenn J durch S erzeugt wird, das heißt, wenn $J = \mathscr{U}_p(S)^+ \cdot \mathscr{U}_p(L)$ gilt.

Beweis. Um zu zeigen, dass S nilpotent ist, bemerken wir, dass $S \subseteq J$ ist, und deswegen die Elemente von S nilpotent in der assoziativen Algebra $\mathscr{U}_p(L)$, also nilpotent in $\mathscr{U}_p(S)$ sind. Da die adjungierte Darstellung $\mathrm{ad} : S \to \mathrm{End}(S)$ die Restriktion einer Algebren-Abbildung von $\mathscr{U}_p(S)$ in $\mathrm{End}(S)$ ist, folgt, dass $\mathrm{ad}(x)$ nilpotent für alle $x \in S$ ist. Dann ist wegen des Satzes von Engel II.(1.7) S nilpotent.

Falls I irgendein Hopf-Ideal von $\mathscr{U}_p(L)$ ist, folgt wie im Beweis von Proposition III.(3.9), dass $\mathscr{U}_p(L)/I \cong \mathscr{U}_p(K)$ als Hopf-Algebren, wobei die kanonische Abbildung $q : \mathscr{U}_p(L) \to \mathscr{U}_p(L)/I$ einen p-Homomorphismus von L auf K induziert. Also ist $K \cong L/N$ für ein p-Ideal N von L. Falls J ein Hopf-Ideal von $\mathscr{U}_p(L)$ ist, dann haben wir also $N \subseteq J$. Da $\bar{\pi}(J) = 0$ für alle $\bar{\pi} \in \bar{\Lambda}$ ist, gilt $\pi(N) = 0$ für alle $\pi \in \Lambda$, also ist $N \subseteq S$. Andererseits ist

$$S = \bigcap_{\pi\in\Lambda} \mathrm{Kern}(\pi) \subseteq \bigcap_{\bar{\pi}\in\bar{\Lambda}} \mathrm{Kern}(\bar{\pi}) = J,$$

also $S \subseteq J$. Aber dann ist $S \subseteq J \cap P(\mathscr{U}_p(L)) = N$ und damit gilt $S = N$. Das heißt, S erzeugt J.

Die andere Richtung folgt aus III.(3.3), $S = \bigcap_{\pi\in\Lambda} \mathrm{Kern}(\pi)$ und II.(4.2). Sei $x \in S$, dann ist $x \in \mathrm{Ann}_L(V)$ für alle einfachen Moduln V von L und somit $x \in \mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)}(V)$ für alle einfachen Moduln V von $\mathscr{U}_p(L)$. Es folgt

$$\Delta(x) \in \mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)\otimes\mathscr{U}_p(L)}(V \otimes V) = \mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)}(V) \otimes \mathscr{U}_p(L) + \mathscr{U}_p(L) \otimes \mathrm{Ann}_{\mathscr{U}_p(L)}(V)$$

für alle einfachen Moduln V von $\mathscr{U}_p(L)$. Damit ist $\Delta(x) \in J \otimes \mathscr{U}_p(L) + \mathscr{U}_p(L) \otimes J$ und $\Delta(S) \subseteq J \otimes \mathscr{U}_p(L) + \mathscr{U}_p(L) \otimes J$. Weil J von S erzeugt wird und Δ ein Algebren-Homomorphismus ist, folgt die Behauptung. ❑

Für die p-Potenzabbildung $[p]$ von L schreiben wir $[p]^n := [p] \circ \ldots \circ [p]$ (n-mal) für $n \in \mathbb{N}$ und $[p]^0 = \mathrm{id}_L$.

(5.6) Definition

Sei F perfekt. Dann heißt L p-**unipotent**, falls für alle $x \in L$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x^{[p]^n} = 0$ ist.

(5.7) Bemerkung
Sei F perfekt und L p-unipotent. Dann ist jedes Element ad-nilpotent. Aus dem Satz von Engel II.(1.7) folgt, dass L nilpotent ist.

Eine endlich-dimensionale Lie-p-Algebra ist also genau dann p-unipotent, wenn sie eine nilpotente p-Potenzabbildung hat.

(5.8) Lemma
Sei F perfekt. Genau dann ist L p-unipotent, wenn $J(\mathscr{U}_p(L)) = \mathscr{U}_p(L)^+$ gilt.

Beweis. Ist $J(\mathscr{U}_p(L)) = \mathscr{U}_p(L)^+$, dann ist wegen $L \subseteq \mathscr{U}_p(L)^+$ jedes Element von L nilpotent in $\mathscr{U}_p(L)$. Weil die p-Potenzabbildung von L in $\mathscr{U}_p(L)$ gewöhnliches Potenzieren ist, ist L p-unipotent.
Sei nun L p-unipotent. Dann ist nach [Bou60, §4, Exercice 23)d)] das von L erzeugte zweiseitige Ideal nilpotent. Dieses zweiseitige Ideal entspricht $\mathscr{U}_p(L)^+$ und damit gilt $\mathscr{U}_p(L)^+ \subseteq J(\mathscr{U}_p(L))$. Für $x \in J(\mathscr{U}_p(L))$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$. Dann ist $\varepsilon(x)^n = \varepsilon(x^n) = 0$ in F und damit $\varepsilon(x) = 0$ und $x \in \mathscr{U}_p(L)^+$. Wir haben also die Gleichheit gezeigt. ❑

Es folgt, dass das p-nilpotente Radikal einer Lie-p-Algebra sogar p-unipotent ist.

(5.9) Definition
Falls alle p-Darstellungen von L halbeinfach sind, heißt L **toral**,

(5.10) Satz (Hochschild)
Genau dann ist L toral, wenn L abelsch mit injektiver p-Potenzabbildung ist.

Beweis. [Jac62, Theorem V.14, Remark]. ❑

(5.11) Satz
Sei F perfekt. Dann hat L die Chevalley-Eigenschaft genau dann, wenn L eine Erweiterung einer toralen Lie-Algebra K durch eine p-unipotente Lie-Algebra S ist, das heißt, es existiert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to S \to L \to K \to 0, \tag{*}$$

wobei S das p-nilpotente Radikal von L und K toral ist.
Wenn F algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt diese Erweiterung, das heißt, L ist das semidirekte Produkt von K und S.

Beweis. Wir nehmen an, dass L die Chevalley-Eigenschaft hat. Dann ist $J = J(\mathscr{U}_p(L))$ ein Hopf-Ideal. Wir bekommen mit Proposition III.(5.5) eine exakte Sequenz der obigen Form, wobei S das p-nilpotente Radikal in $\mathscr{U}_p(L)$ ist. Da S ein nilpotentes Ideal in $\mathscr{U}_p(L)$ erzeugt, erzeugt es auch ein nilpotentes Ideal in $\mathscr{U}_p(S)$ und damit ist S p-unipotent wegen Lemma III.(5.8). Der Funktor der universell p-einhüllende Algebra $\mathscr{U}_p(\ )$ macht aus der exakten Sequenz eine exakte Sequenz von Hopf-Algebren

$$F \to \mathscr{U}_p(S) \xrightarrow{f} \mathscr{U}_p(L) \xrightarrow{g} \mathscr{U}_p(K) \to F \qquad (**)$$

(Die Exaktheit von (**) ist äquivalent zur Injektivität von f und der Eigenschaft $\mathrm{Kern}(g) = \mathscr{U}_p(S)^+ \cdot \mathscr{U}_p(L)$). Wegen $J = \mathrm{Kern}(g) = \mathscr{U}_p(S)^p \cdot \mathscr{U}_p(S)$ ist $\mathscr{U}_p(K) \cong \mathscr{U}_p(L)/J$ und letztere ist halbeinfach. Damit sind alle p-Darstellungen von K halbeinfach, das heißt, K ist toral.
Für die Rückrichtung sei L eine Erweiterung einer toralen Lie-Algebra durch eine p-unipotente Lie-Algebra wie in (*) und π_1, π_2 irreduzible Darstellungen von L in V_1 beziehungsweise V_2. Da S p-unipotent ist, sind die Elemente von S nilpotent in $\mathscr{U}_p(S)$ und damit sind sie auch nilpotent in $\mathscr{U}_p(L)$. Dann ist $\pi_i(S) = 0$ nach [Bou60, Lemma 4.3.2]. Wegen der Definition des Tensor-Produkt ist dann $\pi_1 \otimes \pi_2(S) = 0$. Damit hat $V_1 \otimes V_2$ eine kanonische $K \cong L/S$-Modulstruktur, die ‚gleiche' wie die L-Modulstruktur. Insbesondere ist $V_1 \otimes V_2$ halbeinfach als L-Modul, weil K toral ist.
Ist der Körper algebraisch abgeschlossen und J ein Hopf-Ideal von $\mathscr{U}_p(L)$, dann folgt aus dem Hauptresultat von [Mol76], dass die exakte Sequenz (**) spaltet, das heißt, es existiert eine Hopf-Algebren-Abbildung $j : \mathscr{U}_p(L) \to \mathscr{U}_p(L)$ mit $p \circ j = \mathrm{id}$. Da Hopf-Algebren-Abbildungen primitive Elemente auf primitive Elemente abbilden, ist es einfach zu zeigen, dass j eine Lie-Algebra induziert, die für (*) spaltet, welches L die Struktur eines semidirekten Produktes gibt. ❑

(5.12) Lemma
Sei H eine Hopf-Algebra über einem Körper F der Charakteristik $\mathrm{char}(F) = p > 0$ und M ein endlich-dimensionaler H-Modul. Dann gilt:
F ist genau dann ein direkter Summand von $M^* \otimes M$, wenn $p \nmid \dim_F(M)$.

Beweis. Siehe [Ben75, Theorem 3.1.9]. ❑

Es gilt $\mathrm{Hom}_F(M^* \otimes M, F) \cong \mathrm{Hom}_F(M,M)$, siehe [Ben75, Proposition 3.1.8.], und $\mathrm{Hom}_F(M,M) \cong F \neq 0$. Also ist F isomorph zu einem Quotientenmodul $(M \otimes M^*)/J$ für einen Untermodul J von $M \otimes M^*$. Der Körper F ist als Moduln einfach, das heißt, F ist ein Kompositionsfaktor von $M \otimes M^*$. Teilt p die Dimension von M erhalten wir mit obigem Lemma III.(5.12), dass $M \otimes M^*$ nicht halbeinfach ist.

Kapitel IV

Klassifikation

Wir werden die Klassifikation der einfachen Lie-Algebren über einem Körper der Charakteristik $p > 5$ beschreiben sowie Ausnahmen nennen. Die Klassifikation der Lie-Algebren über einem Körper F der Charakteristik $p > 3$ ist abgeschlossen. Einen guten Überblick über die schon klassifizierten Lie-Algebren bietet [PS06]. In den ersten vier Abschnitten folgen wir hier jedoch [SF88], weil wir vor allem die Lie-p-Algebren betrachten und näher beschreiben möchten.
In diesem Kapitel sei dazu F ein Körper der Charakteristik $p > 0$.

IV.1 Die Verallgemeinerte Jacobson-Witt-Algebra

Wir werden in diesem Abschnitt die Verallgemeinerte Jacobson-Witt-Algebra beschreiben. Sie ist eine Unteralgebra einer Derivationen-Algebra.

(1.1) Bezeichnung
Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{N}_0^n$ das additive Monoid aller n-Tupel aus $\mathbb{N}_0$ und definieren für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$

1. $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i$ für alle $1 \leq i \leq n$,
2. die Fakultät $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$,
3. den Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$,
4. für $1 \leq i \leq n$ das Tupel $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in})$ (Kronecker-Delta) und $\underline{1} = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$,
5. für ein multiplikatives, kommutatives Monoid M und für ein n-Tupel $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit $X_i \in M$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Potenz $X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$, sowie $X^0 = 1$,
6. für $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ das Tupel $\tau := \tau(\underline{m}) := (p^{m_1} - 1, \ldots, p^{m_n} - 1)$,

7. für Unbestimmte $X_1,\dots,X_n$ die zu $\{X^\alpha \mid 0 \le \alpha \le \tau\}$ in dem Polynomring $F[X_1,\dots,X_n]$ duale Basis $\{x^{(\alpha)} \mid 0 \le \alpha \le \tau\}$; es ist also $x^{(\alpha)}(X^\beta) = \delta_{\alpha\beta}$.

Durch $\le$ wird eine Halbordnung auf $\mathbb{N}_0^n$ definiert.
Setze $A((n,F)) = \langle x^{(\alpha)} \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n\rangle_F$ und definiere auf dieser Menge ein Produkt durch

$$[\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^{(\alpha)}][\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^n} b_\beta x^{(\beta)}] := \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^n}[\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta \binom{\gamma}{\alpha}]x^{(\gamma)}.$$

Mit dieser Multiplikation ist $A((n,F))$ eine F-Algebra.

(1.2) Lemma
Für jedes $\underline{m} \in \mathbb{N}_0^n$ ist $A(n,\underline{m}) := \langle x^{(\alpha)} \mid \alpha \le \tau\rangle_F$ eine Unteralgebra von $A((n,F))$ der Dimension $p^{m_1+\dots+m_n}$.

Beweis. Ist $\alpha,\beta \le \tau$, so gilt $\alpha_j,\beta_j \le p^{m_j}-1$ für alle $1 \le j \le n$. Wir wollen zeigen, dass das Produkt zweier Elemente aus $A(n,\underline{m})$ wieder in $A(n,\underline{m})$ liegt und nehmen dazu an, dass $\alpha+\beta \not\le \tau$ ist. Dann existiert ein $1 \le j \le n$ mit $\alpha_j+\beta_j \ge p^{m_j}$. Zeigen wir $\binom{\alpha+\beta}{\alpha} = 0$, dann folgt die Behauptung. Betrachten wir den Polynomring $F[T_1,T_2]$, dann gilt:

$$(T_1+T_2)^{\alpha_j+\beta_j} = (T_1+T_2)^{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}}(T_1+T_2)^{p^{m_j}} \in F[T_1,T_2].$$

Wenden wir die binomische Formel an, so erhalten wir auf der linken Seite

$$\sum_{k=0}^{\alpha_j+\beta_j}\binom{\alpha_j+\beta_j}{k} T_1^k T_2^{\alpha_j+\beta_j-k},$$

und auf der rechten

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}}\binom{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}}{k} T_1^k T_2^{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}-k}(T_1^{p^{m_j}}+T_2^{p^{m_j}})\\
=&\sum_{k=0}^{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}}\binom{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}}{k} T_1^{k+p^{m_j}} T_2^{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}-k}\\
&+\sum_{k=0}^{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}}\binom{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}}{k} T_1^k T_2^{\alpha_j+\beta_j-k}\\
=&\sum_{k=p^{m_j}}^{\alpha_j+\beta_j}\binom{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}}{k-p^{m_j}} T_1^k T_2^{\alpha_j+\beta_j-k}\\
&+\sum_{k=0}^{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}}\binom{\alpha_j+\beta_j-p^{m_j}}{k} T_1^k T_2^{\alpha_j+\beta_j-k}.
\end{aligned}$$

Links ist der Koeffizient für $T_1^{\alpha_j} T_2^{\beta_j}$ gleich $\binom{\alpha_j+\beta_j}{\alpha_j}$, während er auf der rechten Seite fehlt. Wir haben damit bewiesen, dass $\binom{\alpha+\beta}{\alpha} = 0$ ist. ❑

$A(n,\underline{m})$ ist graduiert durch $A(n,\underline{m})_i = \langle x^{(\alpha)} \mid 0 \leq \alpha \leq \tau, |\alpha| = i \rangle_F$ mit $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_i$.

(1.3) Definition
Die Menge

$$W(n,\underline{m}) := \{D \in \mathrm{Der}(A(n,\underline{m})) \mid D(x^{(\alpha)}) = \sum_{i=1}^{n} x^{(\alpha-\varepsilon_i)} D(x^{(\varepsilon_i)}) \forall \alpha \leq \tau\}$$

nennt man die **Algebra der speziellen Derivationen** von $A(n,\underline{m})$ oder auch die **verallgemeinerte Jacobson-Witt-Algebra**.

Ist $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ mit $\alpha_i < 0$ für ein $1 \leq i \leq n$, dann sei $x^{(\alpha)} = 0$.

(1.4) Definition
Die durch $D_i(x^{(\alpha)}) := x^{(\alpha-\varepsilon_i)}$ definierte lineare Abbildung $D_i : A(n,\underline{m}) \to A(n,\underline{m})$ nennt man die ***i*-te partielle Ableitung**.

(1.5) Proposition
Die Algebra $W(n,\underline{m})$ ist ein freier $A(n,\underline{m})$-Modul mit Basis $(D_1,\ldots,D_n)$.

Beweis. Setze $(f.D)(g) := fD(g)$ für alle $f,g \in A(n,\underline{m})$. Es gilt

$$\begin{aligned} D_i(x^{(\alpha)}x^{(\beta)}) &= \binom{\alpha+\beta}{\alpha} x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_i)} \\ &= [\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i}{\alpha-\varepsilon_i} + \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_i}{\alpha}] x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_i)} \\ &= D_i(x^{(\alpha)})x^{(\beta)} + x^{(\alpha)}D_i(x^{(\beta)}) \end{aligned}$$

für alle $0 \leq \alpha, \beta \leq \tau$. Folglich ist $D_i \in \mathrm{Der}(A(n,\underline{m}))$. Für $0 \leq \alpha \leq \tau$ ist

$$D_i(x^{(\alpha)}) = \sum_{j=1}^{n} x^{(\alpha-\varepsilon_j)} D_i(x^{(\varepsilon_j)})$$

und damit $D_i \in W(n,\underline{m})$ für alle $1 \leq i \leq n$.
Wir können $D \in W(n,\underline{m})$ durch $D = \sum_{i=1}^n D(x^{(\varepsilon_i)})D_i$ eindeutig darstellen, also ist $W(n,\underline{m}) \subseteq \bigoplus_{i=1}^n A(n,\underline{m})D_i$. ❑

(1.6) Lemma
Seien $D,E \in$ Der$(A(n,\underline{m}))$ und $f,g \in A(n,\underline{m})$.

1. *Für den Kommutator gilt $[fD,gE] = fD(g)E - gE(f)D + gf[D,E]$.*
2. *Für die Adjungierte Darstellung gilt ad$(D)^k(gE) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D^i(g)\mathrm{ad}(D)^{k-i}(E)$.*
3. *Für $\underline{m} = \underline{1}$ ist $A(n,\underline{m})$ isomorph zu dem Ring $A(n) := F[X_1,\ldots,X_n]/(X_1^p,\ldots,X_n^p)$.*

Beweis.

1. Für $h \in A(n,\underline{m})$ gilt

$$\begin{aligned}
[fD,gE](h) &= fD(gE(h)) - gE(fD(h)) \\
&= fgD(E(h)) + fD(g)E(h) - fgE(D(h)) - gE(f)D(h) \\
&= fD(g)E(h) - gE(f)D(h) + fg[D,E](h).
\end{aligned}$$

2. Wir zeigen die Gleichung per Induktion. Für $k = 1$ folgt die Gleichung aus 1, mit $f = 1$. Sei die Gleichung für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ wahr. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ad}(D)^{k+1}(gE) = [D, \mathrm{ad}(D)^k(gE)] \\
= \; &[D, \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D^i(g)\mathrm{ad}(D)^{k-i}(E)] = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [D, D^i(g)\mathrm{ad}(D)^{k-i}(E)] \\
= \; &\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (D^{i+1}(g)\mathrm{ad}(D)^{k-i}(E) - D^i(g)\mathrm{ad}(D)^{k-i+1}(E) \\
= \; &\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} D^i(g)\mathrm{ad}(D)^{k-i+1}(E) - \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D^i(g)\mathrm{ad}(D)^{k-i+1}(E) \\
= \; &\sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} D^i(g)\mathrm{ad}(D)^{k-i+1}(E) + D^{k+1}(g)E + g\mathrm{ad}(D)^{k+1}(E) \\
= \; &\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} D^i(g)\mathrm{ad}(D)^{k-i+1}(E).
\end{aligned}$$

3. Betrachte den folgenden Homomorphismus:

$$\zeta : F[X_1,\ldots,X_n] \to A(n,\underline{1}), X_i \mapsto x^{(\varepsilon_i)} \text{ für alle } 1 \le i \le n.$$

Er ist surjektiv und sein Kern ist $(X_1^p,\ldots,X_n^p)$.

❑

(1.7) Proposition

1. *Die Algebra $A(n,\underline{m})$ ist ein $W(n,\underline{m})$-Modul. Die zugehörige Darstellung nennt man **kanonische Darstellung** von $W(n,\underline{m})$.*

2. *Die Algebra $W(n,\underline{m})$ ist eine Unter-Lie-Algebra von $\mathrm{Der}_F(A(n,\underline{m}))$.*

3. *Sie ist graduiert mit $W(n,\underline{m}) = \bigoplus_{i=-1}^{s} W(n,\underline{m})_i$ mit $W(n,\underline{m})_i = \sum_{j=1}^{n} A(n,\underline{m})_{i+1} D_j$ und $s = \sum_{i=1}^{n}(p^{m_i}-1)-1$.*

4. *Eine Basis von $W(n,\underline{m})$ über F ist $\{x^{(\alpha)}D_j \mid 1 \le j \le n, 0 \le \alpha \le \tau\}$. Insbesondere ist $\dim_F W(n,\underline{m}) = np^{m_1+\ldots+m_n}$.*

5. *Die Verallgemeinerte Jacobson-Witt-Algebra ist genau dann die volle Derivationen-Algebra, $W(n,\underline{m}) = \mathrm{Der}_F(A(n,\underline{m}))$, wenn $\underline{m} = \underline{1}$ ist.*

6. *Die Darstellung $\varphi_W : W(n,\underline{m})_0 \to \mathfrak{gl}(A(n,\underline{m})_1)$, die durch die kanonische Darstellung $\varphi : W(n,\underline{m}) \to \mathfrak{gl}(A(n,\underline{m}))$ induziert wird, ist ein Isomorphismus.*

7. *Die Darstellung von $W(n,\underline{m})_0$ auf $W(n,\underline{m})_{-1}$, die durch die adjungierte Darstellung induziert wird, ist dual zu φ_W.*

Beweis.

1. Sie ist ein Modul bezüglich der Operation $D.f := D(f)$.

2. Die Algebra $W(n,\underline{m})$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Der}(A(n,\underline{m}))$. Nach Lemma IV.(1.6) gilt
$$[x^{(\alpha)}D_i, x^{(\beta)}D_j] = (x^{(\alpha)}x^{(\beta-\varepsilon_i)})D_j - (x^{(\beta)}x^{(\alpha-\varepsilon_j)})D_i.$$
Daraus folgt die Behauptung.

3. Die Aussage ist klar.

4. Weil $A(n,\underline{m})$ graduiert und $W(n,\underline{m})$ ein $A(n,\underline{m})$-Modul ist, gilt die Aussage.

5. Wir nehmen an, dass $W(n,\underline{m}) = \mathrm{Der}(A(n,\underline{m}))$ ist. Sei $1 \le i \le n$. Da $\mathrm{Der}(A(n,\underline{m}))$ abgeschlossen bezüglich der p-ten Potenz ist ($\mathrm{Der}(A(n,\underline{m}))$ assoziative Algebra), ist $D_i^p \in W(n,\underline{m})$. Wegen $D_i^p(x^{(\varepsilon_j)}) = 0$ für alle $1 \le j \le n$ folgt aus IV.(1.5) $D_i^p = 0$ und
$$0 = D_i^p = D_i^p(x^{(\tau)}) = x^{(\tau - p\varepsilon_i)},$$
das heißt, es gilt $p > p^{m_i} - 1$. Es folgt $m_i \le 1$. Ist nun $m_i \le 1$ für alle $1 \le i \le n$ und $\alpha \le \tau$, dann gilt $x^{(\alpha)} = (\alpha!)^{-1}\prod_{i=1}^{n}(x^{(\varepsilon_i)})^{\alpha_i}$. Also ist $D \in \mathrm{Der}(A(n,\underline{m}))$ durch das Bild von $x^{(\varepsilon_i)}$ für $1 \le i \le n$ bestimmt und es gilt $D = \sum_{i=1}^{n} D(x^{(\varepsilon_i)})D_i$.

6. Wegen $\dim_F W(n,\underline{m})_0 = n^2 = \dim_F \mathfrak{gl}(A(n,\underline{m})_1)$ brauchen wir nur die Injektivität zu zeigen. Sei $D = \sum_{j=1}^n f_j D_j \in \mathrm{Kern}(\varphi_W)$. Dann ist $0 = \varphi_W(D)(x^{(\varepsilon_k)}) = f_k$ für $1 \leq k \leq n$. Insgesamt erhalten wir $D = 0$.

7. Es ist $W(n,\underline{m})_{-1} = FD_1 + \ldots + FD_n$. Da die D_i für $1 \leq i \leq n$ als Linearformen auf $A(n,\underline{m})_1$ gesehen werden können, ist die lineare Abbildung $\lambda : W(n,\underline{m})_{-1} \to A(n,\underline{m})_1^*$, $D \mapsto D|_{A(n,\underline{m})_1}$ ein Isomorphismus. Seien $1 \leq i,j,k,l \leq n$. Aus dem Beweis von 2. folgt

$$\begin{aligned}
\lambda([x^{(\varepsilon_i)}D_j, D_k])(x^{(\varepsilon_l)}) &= \begin{cases} -D_j(x^{(\varepsilon_l)}), & \text{falls } i = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -1, & \text{falls } i = k \text{ und } j = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Aus der Moduloperation des dualen Moduls folgt

$$\begin{aligned}
(x^{(\varepsilon_i)}D_j.\lambda(D_k))(x^{(\varepsilon_l)}) &= -\lambda(D_k)(x^{(\varepsilon_i)}D_j.x^{(\varepsilon_l)}) \\
&= -\lambda(D_k)(x^{(\varepsilon_i)} \cdot D_j(x^{(\varepsilon_l)})) \\
&= \begin{cases} -D_k(x^{(\varepsilon_i)}), & \text{falls } j = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -1, & \text{falls } i = k \text{ und } j = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit ist λ ein Modulisomorphismus und die Behauptung folgt.

❑

Nun möchten wir wissen, wann die Jacobson-Witt-Algebra einfach und wann sie eine Lie-p-Algebra ist.

(1.8) Theorem

1. *Für $(n,p) \neq (1,2)$ ist $W(n,\underline{m})$ einfach.*

2. *Sie ist genau dann eine Lie-p-Algebra, wenn $\underline{m} = \underline{1}$. In diesem Fall ist die p-Potenzabbildung durch $D^{[p]} = D^p$ für $D \in W(n,\underline{m})$ gegeben.*

Beweis.

1. Wir zeigen die Einfachheit mit dem Einfachheitssatz III.(1.9). Sei dazu $D = \sum_{j=1}^{n} f_j D_j \in C_{W(n,\underline{m})}(W(n,\underline{m})_{-1})$ und $1 \leq i \leq n$. Es gilt

$$0 = [D_i, D] = \sum_{j=1}^{n} D_i(f_j) D_j,$$

also ist $0 = D_i(f_j)$ für alle $1 \leq j \leq n$. Für $1 \leq j \leq n$ gilt also $f_j \in A(n,\underline{m})_0$ und somit $D \in W(n,\underline{m})_{-1}$. Die Graduierung von $W(n,\underline{m})$ ist folglich zulässig.

Vor. 1. Mit $s = \sum_{i=1}^{n}(p^{m_i} - 1) - 1$ ist $s \geq 1$, außer für $n = 1, m_1 = 1$ und $p = 2$.

Vor. 2. Diese Voraussetzung gilt automatisch wegen $r = -1$.

Vor. 3. Wegen Proposition IV.(1.7) 4. ist $A(n,\underline{m})_1$ ein einfacher $W(n,\underline{m})_0$-Modul. Folglich ist der duale Modul $A(n,\underline{m})_1^*$ einfach und wegen Proposition IV.(1.7) ist auch $W(n,\underline{m})_{-1}$ einfach.

Vor. 4. Sei $x^{(\alpha)} D_j \in W(n,\underline{m})_i$ für $i \leq s-1$. Dann ist $|\alpha| = i+1 \leq s$ und es existiert ein k mit $\alpha_k < p^{m_k} - 1$ und es gilt

$$x^{(\alpha)} D_j = [D_k, x^{(\alpha+\varepsilon_k)} D_j] \in [W(n,\underline{m})_{-1}, W(n,\underline{m})_{i+1}].$$

Vor. 5. Für $x^{(\tau)} D_j \in W(n,\underline{m})_s$ gilt

$$\begin{aligned} [x^{(\varepsilon_i)} D_i, x^{(\tau)} D_j] &= x^{(\varepsilon_i)} x^{(\tau-\varepsilon_i)} D_j - \delta_{ij} x^{(\tau)} D_i \\ &= \binom{\tau}{\varepsilon_i} x^{(\tau)} D_j - \delta_{ij} x^{(\tau)} D_i \\ &= -x^{(\tau)} D_j - \delta_{ij} x^{(\tau)} D_i. \end{aligned}$$

Also ist $x^{(\tau)} D_j \in [W(n,\underline{m})_0, W(n,\underline{m})_s]$ außer für $(n,p) = (1,2)$.

Insgesamt ist für $(n,p) \neq (1,2)$ die Lie-Algebra $W(n,\underline{m})$ einfach.

2. Sei $W(n,\underline{m})$ eine Lie-p-Algebra und $1 \leq j \leq n$. Dann ist $\mathrm{ad}(D_j)^p = \mathrm{ad}(D)$ für ein $D \in W(n,\underline{m})$ und $\mathrm{ad}(D_j)^p$ ist vom Grad $-p < -1$. Wäre $\mathrm{ad}(D) \neq 0$, dann wäre D vom Grad ≥ -1. Dieses widerspricht sich. Also ist

$$0 = \mathrm{ad}(D_j)^p (x^{(\tau)} D_j) = x^{(\tau - p\varepsilon_j)} D_j$$

Folglich ist $m_j = 1$ für alle $1 \leq j \leq n$. Es folgt $W(n,\underline{m}) = \mathrm{Der}(A(n,\underline{m}))$. Weiter gilt $Z(W(n,\underline{m})) = 0$ und damit ist die p-Potenzabbildung eindeutig (II.(3.6)).

❑

(1.9) Theorem
Für $h_i := x^{(\varepsilon_i)}D_i$ mit $1 \leq i \leq n$ gilt:

1. *Es ist $[h_i, x^{(\alpha)}D_j] = (\alpha_i - \delta_{ij})x^{(\alpha)}D_j$.*
2. *Die Algebra $T := \sum_{i=1}^n Fh_i$ ist eine abelsche Cartan-Unteralgebra von $W(n,\underline{m})_0$, die durch halbeinfache Endomorphismen auf $W(n,\underline{m})_{-1}$ operiert.*
3. *Der Zentralisator $H = C_{W(n,\underline{m})}(T)$ ist eine graduierte Cartan-Unteralgebra von $W(n,\underline{m})$.*
4. *Für $\underline{m} = \underline{1}$ ist $H = T$ und T ein Torus.*

Beweis.

1. Es gilt
$$\begin{aligned}[h_i, x^{(\alpha)}D_j] &= x^{(\varepsilon_i)}D_i(x^{(\alpha)})D_j - x^{(\alpha)}D_j(x^{(\varepsilon_i)})D_i \\ &= \binom{\alpha}{\varepsilon_i}x^{(\alpha)}D_j - \delta_{ij}x^{(\alpha)}D_i \\ &= (\alpha_i - \delta_{ij})x^{(\alpha)}D_j.\end{aligned}$$

2. Betrachte die Darstellung $\varphi_W : W(n,\underline{m})_0 \to \mathfrak{gl}(A(n,\underline{m})_1)$. Bezüglich der Basis $\{x^{(\varepsilon_k)} \mid 1 \leq i \leq n\}$ wird $\varphi_W(h_i)$ durch die Elementarmatrix E_{ii} dargestellt. Also ist T eine abelsche Cartan-Unteralgebra von $W(n,\underline{m})_0$. Aus 1. folgt direkt, dass T auf $W(n,\underline{m})_{-1}$ operiert.

3. Wir zeigen, dass $\mathrm{ad}(t)$ für alle $t \in T$ halbeinfach ist. Sei dazu $t \in T$. Es ist nach 2. $\mathrm{ad}(t)|_{W(n,\underline{m})_{-1}}$ halbeinfach. Es existieren $a_1, \ldots, a_n \in F$, so dass
$$\mathrm{ad}(t)|_{W(n,\underline{m})_{-1}} = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{ad}(t)^{p^i}|_{W(n,\underline{m})_{-1}}$$
(siehe Lemma II.(3.9)) gilt. Dann ist $D := \mathrm{ad}(t) - \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{ad}(t)^{p^i}$ eine Derivation von $W(n,\underline{m})$, die $D(W(n,\underline{m})_i) \subseteq W(n,\underline{m})_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $D(W(n,\underline{m})_{-1}) = 0$ erfüllt. Wir zeigen nun durch Induktion nach $j \geq 0$, dass $D(W(n,\underline{m})_j) = 0$ gilt. Sei $x \in W(n,\underline{m})_j$ und nehme an, dass $D(W(n,\underline{m})_{j-1}) = 0$ ist. Dann ist $D(x)W(n,\underline{m})_{-1} = D(xW(n,\underline{m})_{-1}) \subseteq D(W(n,\underline{m})_{j-1}) = 0$. Weil $W(n,\underline{m})$ zulässig graduiert ist, erhalten wir $D(x) \in W(n,\underline{m})_j \cap W(n,\underline{m})_{-1} = 0$, das heißt, es ist $D = 0$ und $\mathrm{ad}(t)$ halbeinfach.

   Aus [SF88, Theorem 3.2.4] folgt, dass
$$\bar{T} := \{x \in W(n,\underline{m}) \mid \forall\, t \in T\ \exists\, n(t) \in \mathbb{N} :\ (\mathrm{ad}(t))^{n(t)}(x) = 0\}$$
eine Cartan-Unteralgebra von $W(n,\underline{m})$ ist, die wegen obiger Überlegung $C_{W(n,\underline{m})}(T)$ ist.

4. Wegen 1. ist $\mathrm{ad}(h)^p(x^{(\alpha)}D_j) = (\alpha_i - \delta_{ij})^p x^{(\alpha)} D_j = (\alpha_i - \delta_{ij}) x^{(\alpha)} D_j$, also ist T ein Torus. Wegen 1. erhalten wir $H = T$.

❑

Die Unteralgebra T wird oft **kanonischer Torus** von $W(n,\underline{m})$ genannt. Da $H = \sum_{i=-1}^{s} H_i$ eine graduierte Cartan-Unteralgebra ist, operiert jedes H_i für $i \neq 0$ nilpotent auf $W(n,\underline{m})$. Deshalb verschwinden die Wurzeln α von H auf jedem der H_i für $i \neq 0$. Wir werden darum $W(n,\underline{m})$ in seine Wurzelräume bezüglich T zerlegen. Wir können jedes n-Tupel $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ als Linearformen auf T auffassen. Dazu definieren wir zu a eine Linearform $a(h_i) = a_i$ für $1 \leq i \leq n$. Wegen IV.(1.9) erhalten wir

$$x^{(a)} D_j \in W(n,\underline{m})_{(a-\varepsilon_j)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Für jede Wurzel $a \in T^*$ wähle ein $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, so dass $0 \leq \alpha_i \leq p-1$ und $a(h_i) \equiv \alpha_i \mod p$ für $1 \leq i \leq n$ gilt. Dann ist

$$W(n,\underline{m})_{(a)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n,\ 0 \leq \alpha + \beta p + \varepsilon_j \leq \tau} F x^{(\alpha + p\beta + \varepsilon_j)} D_j.$$

(1.10) Proposition
Sei T der kanonische Torus und $W(n,\underline{m}) = \bigoplus_{a \in \Phi} W(n,\underline{m})_{(a)}$ bezeichne die zugehörige Wurzelraumzerlegung. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. $W(n,\underline{m})_{-1} \subseteq \bigoplus_{k=1}^{n} W(n,\underline{m})_{(-\varepsilon_k)} \subseteq \bigoplus_{i \equiv -1 \mod p} W(n,\underline{m})_i$.

2. $\bigoplus_{k=1}^{n} W(n,\underline{m})_{(\varepsilon_k)} \subseteq_{i \equiv 1 \mod p} W(n,\underline{m})_i$.

Beweis.

1. Wegen $D_k \in W(n,\underline{m})_{(-\varepsilon_k)}$ brauchen wir nur die zweite Inklusion zu zeigen. Betrachte $h := \sum_{j=1}^{n} h_j$. Sei $E = \sum_{l=1}^{n} \sum_{|\alpha|=i+1} x^{(\alpha)} D_l \in W(n,\underline{m})_i$ für ein $1 \leq i \leq n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
[h,E] &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{|\alpha|=i+1} (\alpha_j - \delta_{jl}) x^{(\alpha)} D_l \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{|\alpha|=i+1} \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j - 1\Big) x^{(\alpha)} D_l \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{|\alpha|=i+1} (|\alpha| - 1) x^{(\alpha)} D_l = iE.
\end{aligned}$$

Für $G = \sum_{i=-1}^{s} G_i \in W(n,\underline{m})_{(-\varepsilon_k)}$ mit $G_i \in W(n,\underline{m})_i$ ist

$$-G = -\varepsilon_k(h)G = [h,G] = \sum_{i=-1}^{s} iG_i.$$

Also ist $G_i = 0$ für $i \not\equiv -1 \mod p$ und $G \in \bigoplus_{i\equiv -1 \mod p} W(n,\underline{m})_i$.

2. Diese Aussage beweist man analog zur ersten.

❑

(1.11) Proposition
Sei $W(n,\underline{1}) = \bigoplus_{a\in\Phi} W(n,\underline{1})_{(a)}$ die Wurzelraumzerlegung bezüglich des kanonischen Torus T, $a \in \Phi$ und $j \neq 0$. Dann ist $D^p = 0$ für jedes $D \in W(n,\underline{1})_{(a)} \cap W(n,\underline{1})_j$.

Beweis. Wegen IV.(1.9) ist T eine Cartan-Unteralgebra von $W(n,\underline{1})$. Wegen $T = W(n,\underline{1})_{(0)}$ und wegen $\mathrm{ad}(E)(G^p) = \sum_{i=0}^{p-1} G^i \mathrm{ad}(E)(G)G^{p-1-i}$ für $E,G \in W(n,\underline{1})$ haben wir

$$[W(n,\underline{1})_{(a)}^{[p]}, T] \subseteq W(n,\underline{1})_{(pa)} = W(n,\underline{1})_{(0)} = T.$$

Es folgt dann aus

$$W(n,\underline{1})_{(a)}^{[p]} \subseteq N_{W(n,\underline{1})}(T) = T,$$

dass $(W(n,\underline{1})_{(a)} \cap W(n,\underline{1})_j)^{[p]} \subseteq W(n,\underline{1})_{(a)}^{[p]} \cap W(n,\underline{1})_j^{[p]} \subseteq T \cap W(n,\underline{1})_{pj} = 0$ für $j \neq 0$ ist. ❑

Wir bemerken, dass IV.(1.11) auch für $a \in \Phi\backslash\{0\}$ und $j = 0$ gilt. In dem Fall haben wir $a \in \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$ und $W(n,\underline{1})_{(\varepsilon_i-\varepsilon_j)} \cap W(n,\underline{1})_0 = Fx^{(\varepsilon_i)}D_j$. Eine einfache Rechnung zeigt $(x^{(\varepsilon_i)}D_j)^p = 0$.

IV.2 Die Spezielle Algebra

Die Spezielle Algebra wird über den Kern der Abbildung Divergenz definiert.

(2.1) Definition
Die Abbildung $\mathrm{div} : W(n,\underline{m}) \to A(n,\underline{m})$, $\sum_{j=1}^{n} f_jD_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} D_j(f_j)$ nennen wir **Divergenz**.

Betrachte $S'(n,\underline{m}) := \{E \in W(n,\underline{m}) \mid \mathrm{div}(E) = 0\}$.

(2.2) Lemma
Die Menge $S'(n,\underline{m})$ ist eine Unter-(Lie-)Algebra von $W(n,\underline{m})$.

Beweis. Für fD_i und gD_j mit $f,g \in A(n,\underline{m})$ und $1 \leq i,j \leq n$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}([fD_i,gD_j]) &= \mathrm{div}(fD_i(g)D_j - gD_j(f)D_i) \\
&= D_j(fD_i(g)) - D_i(gD_j(f)) \\
&= fD_j(D_i(g)) - D_j(f)D_i(g) - gD_i(D_j(f)) + D_i(g)D_j(f) \\
&= fD_j(D_i(g)) - gD_i(D_j(f)) \\
&= fD_i(D_j(g)) - gD_j(D_i(f)) \\
&= fD_i(\mathrm{div}(gD_j)) - gD_j(\mathrm{div}(fD_i)).
\end{aligned}$$

Für $fD_i, gD_j \in S'(n,\underline{m})$ folgt $[fD_i,gD_j] \in S'(n,\underline{m})$. ❑

Es gilt also $S'(n,\underline{m}) = \bigoplus_{i\geq -1} S'(n,\underline{m}) \cap W(n,\underline{m})_i$, das heißt, $S'(n,\underline{m})$ ist eine graduierte Unteralgebra von $W(n,\underline{m})$. Dann ist

$$\mathrm{div}(W(n,\underline{m})) = \sum_{j=1}^{n} D_j(A(n,\underline{m})) = \langle x^{(\alpha)} \mid \alpha < \tau \rangle.$$

Damit gilt für die Dimensionen

$$\begin{aligned}
\dim_F S'(n,\underline{m}) &= \dim_F \mathrm{Kern}(\mathrm{div}) = \dim_F W(n,\underline{m}) - \dim_F \mathrm{div}(W(n,\underline{m})) \\
&= (n-1)p^{m_1+\ldots+m_n} + 1.
\end{aligned}$$

(2.3) Definition
Die Algebra $S(n,\underline{m}) := S'(n,\underline{m})^{(1)}$ nennt man die **spezielle Algebra**.

Sei D_{ij} die Abbildung

$$D_{ij} : A(n,\underline{m}) \to W(n,\underline{m}), f \mapsto D_j(f)D_i - D_i(f)D_j$$

Es ist $D_{ii} = 0$ und $D_{ij} = -D_{ji}$ für alle $1 \leq i,j \leq n$.

(2.4) Lemma
Für $1 \leq i,j,k \leq n$ gilt:

1. *Das Bild von D_{ij} unter $A(n,\underline{m})$ ist eine Teilmenge von $S'(n,\underline{m})$.*
2. *Die Abbildung D_{ij} ist F-linear vom Grad -2.*
3. *Sei $\sum_{i=1}^{n} f_iD_i$ und $\sum_{j=1}^{n} g_jD_j \in S'(n,\underline{m})$, dann gilt:*

$$[\sum_{i=1}^{n} f_iD_i, \sum_{j=1}^{n} g_jD_j] = -\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}(f_ig_j).$$

4. *Es ist* $[D_k, D_{ij}(f)] = D_{ij}(D_k(f))$ *für alle* $f \in A(n,\underline{m})$.

Beweis.

1. Für $f \in A(n,\underline{m})$ ist $\operatorname{div}(D_{ij}(f)) = [D_i, D_j](f) = 0$.

2. Die Aussage gilt per Definition.

3. Wegen Lemma IV.(1.6) gilt

$$[\sum_{i=1}^{n} f_i D_i, \sum_{j=1}^{n} g_j D_j] = \sum_{i,j=1}^{n} f_i D_i(g_j) D_j - g_j D_j(f_i) D_i.$$

Wegen $\sum_{i=1}^{n} D_i(f_i) = \sum_{j=1}^{n} D_j(g_j) = 0$ ist der letzte Term gleich

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^{n} (f_i D_i(g_j) + D_i(f_i) g_j) D_j - \sum_{i,j=1}^{n} (g_j D_j(f_i) + D_j(g_j) f_i) D_i \\ = & \sum_{i,j=1}^{n} D_i(f_i g_j) D_j - D_j(g_j f_i) D_i \\ = & -\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}(f_i g_j). \end{aligned}$$

4. Es gilt für alle $f \in A(n,\underline{m})$

$$\begin{aligned} [D_k, D_{ij}(f)] &= [D_k, D_j(f) D_i - D_i(f) D_j] \\ &= [D_k, D_j(f) D_i] - [D_k, D_i(f) D_j] \\ &= D_k(D_j(f)) D_i - D_j(f)[D_k, D_i] - D_k(D_i(f)) D_j + D_i(f)[D_k, D_j] \\ &= D_j(D_k(f)) D_i - D_i(D_k(f)) D_j \\ &= D_{ij}(D_k(f)). \end{aligned}$$

❑

(2.5) Proposition
Für $n \geq 3$ *gilt:*

1. *Die Spezielle Algebra* $S(n,\underline{m})$ *wird von* $D_{ij}(f)$ *für* $f \in A(n,\underline{m})$ *und* $1 \leq i < j \leq n$ *erzeugt.*

2. *Mit* $S(n,\underline{m}) = \bigoplus_{i=-1}^{s} S(n,\underline{m}) \cap W(n,\underline{m})_i$ *und* $s = \sum_{i=1}^{n}(p^{m_i} - 1) - 2 = |\tau| - 2$ *ist* $S(n,\underline{m})$ *graduiert.*

3. *Es gilt* $S(n,\underline{m})_{-1} = W(n,\underline{m})_1$, $S(n,\underline{m})_s = \sum_{i\neq j} F(x^{(\tau-\varepsilon_i)}D_j - x^{(\tau-\varepsilon_j)}D_i)$.

4. *Die Darstellung* $\varphi_S : W(n,\underline{m})_0 \to \mathfrak{gl}(A(n,\underline{m})_1), \varphi_S(D)(f) = D(f)$ *definiert einen Isomorphismus* $S(n,\underline{m})_0 \cong \mathfrak{sl}(n,F)$.

Beweis.

1. Aus Lemma IV.(2.4) 3. folgt $S(n,\underline{m}) \subseteq \langle D_{ij}(f) \mid f \in A(n,\underline{m}), 1 \leq i < j \leq n\rangle$ und wegen der Linearität von D_{ij} genügt es zu zeigen, dass $D_{ij}(x^{(\alpha)}) \in S(n,\underline{m})$ für alle $0 \leq \alpha \leq \tau$. Für $\alpha < \tau$ existiert ein $k \in \{1,\dots,n\}$ mit $x^{(\alpha)} = D_k(x^{(\alpha+\varepsilon_k)})$. Es gilt damit

$$D_{ij}(x^{(\alpha)}) = D_{ij}(D_k(x^{(\alpha+\varepsilon_k)})) = [D_k, D_{ij}(x^{(\alpha+\varepsilon_k)})] \in S'^{(1)}(n,\underline{m}) = S(n,\underline{m}).$$

Da $n \geq 3$ ist, existiert ein $k \notin \{i,j\}$ und es gilt

$$\begin{aligned}
[D_{kj}(x^{(\tau)}), x^{(\varepsilon_k)}D_i] &= [x^{(\tau-\varepsilon_j)}D_k - x^{(\tau-\varepsilon_k)}D_j, x^{(\varepsilon_k)}D_i] \\
&= x^{(\tau-\varepsilon_k)}D_i - x^{(\varepsilon_k)}x^{(\tau-\varepsilon_j-\varepsilon_i)}D_k + x^{(\varepsilon_k)}x^{(\tau-\varepsilon_k-\varepsilon_i)}D_j \\
&= x^{(\tau-\varepsilon_j)}D_i - \binom{\tau-\varepsilon_i}{\varepsilon_k} x^{(\tau-\varepsilon_i)}D_j \\
&= x^{(\tau-\varepsilon_j)}D_i - x^{(\tau-\varepsilon_i)}D_j = D_{ij}(x^{(\tau)}).
\end{aligned}$$

Damit ist die andere Inklusion gezeigt.

2. Die Aussage gilt aufgrund der Graduierung von $S'(n,\underline{m})$.

3. Wegen $D_{ij}(x^{(\varepsilon_j)}) = (1-\delta_{ij})D_i$ gilt $S(n,\underline{m})_{-1} = W(n,\underline{m})_{-1}$ und

$$S(n,\underline{m})_s = \langle D_{ij}(x^{(\tau)}) \mid 1 \leq i,j \leq n\rangle = \sum_{i\neq j} F(x^{(\tau-\varepsilon_j)}D_j - x^{(\tau-\varepsilon_i)}D_i).$$

4. Der Homomorphismus φ_S ist die Restriktion von φ_W (siehe IV.(1.7)). Da das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W(n,\underline{m})_0 \arrow[rr, "\varphi_W"] \arrow[dr, "\mathrm{div}"'] & & \mathfrak{gl}(A(n,\underline{m})_1) \arrow[dl, "\mathrm{Spur}"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, ist $S'(n,\underline{m})_0$ eine zu $\mathfrak{sl}(n,F)$ isomorphe Algebra und es gilt $S'(n,\underline{m})_0^{(1)} = S'(n,\underline{m})_0$, sowie $S'(n,\underline{m})_0 = S(n,\underline{m})_0$.

❑

(2.6) Lemma
Es gilt für $1 \leq i, j, k \leq n$:

1. $[h_k, D_{ij}(x^{(\alpha)})] = (\alpha_k - \delta_{ki} - \delta_{kj}) D_{ij}(x^{(\alpha)})$.

2. $D_{ij}(x^{(\alpha)}) \in W(n,\underline{m})_{(\alpha-\varepsilon_i-\varepsilon_j)} \cap W(n,\underline{m})_{|\alpha|-2}$.

Beweis.

1. Es ist

$$\begin{aligned}
[h_k, D_{ij}(x^{(\alpha)})] &= [h_k, x^{(\alpha-\varepsilon_j)} D_i] - [h_k, x^{(\alpha-\varepsilon_i)} D_j] \\
&= (\alpha_k - \delta_{kj} - \delta_{ki}) x^{(\alpha-\varepsilon_j)} D_i - (\alpha_k - \delta_{ki} - \delta_{kj}) x^{(\alpha-\varepsilon_i)} D_j \\
&= (\alpha_k - \delta_{ki} - \delta_{kj}) D_{ij}(x^{(\alpha)}).
\end{aligned}$$

2. Die Aussage folgt aus 1. und IV.(2.4) 2.

❑

Auch für die Spezielle Algebra möchten wir wissen, ob sie einfach ist und wann sie eine Lie-p-Algebra ist.

(2.7) Theorem
Für $n \geq 3$ gilt:

1. *Die Spezielle Algebra $S(n,\underline{m})$ ist einfach.*

2. *Sie ist genau dann eine Lie-p-Algebra, wenn $m_i = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$ ist. In diesem Fall ist sie eine p-Unteralgebra von $W(n,\underline{m})$.*

Beweis.

1. Es gilt $S(n,\underline{m})_{-1} = W(n,\underline{m})_1$. Da $W(n,\underline{m})$ zulässig graduiert ist, ist auch die Graduierung von $S(n,\underline{m})$ zulässig. Wir prüfen die Vorrausetzungen des Einfachheitssatzes III.(1.9).

   Vor. 1. Da $n \geq 3$ ist, ist $r, s \geq 1$.

   Vor. 2. Es gilt $r = 1$, und damit trivialerweise $C_L(L^+) \subseteq \sum_{i \geq -1} L_i$.

   Vor. 3. Wegen IV.(2.5) 4. ist $A(n,\underline{m})_1$ ein irreduzibler $S(n,\underline{m})_0$-Modul und mit IV.(1.7) 5. ist $S(n,\underline{m})_{-1} = W(n,\underline{m})_{-1}$ ein irreduzibler $S(n,\underline{m})_0$-Modul.

Vor. 4. Sei $l \leq s-1 = |\tau|-3$ und betrachte

$$S(n,\underline{m})_k = \langle D_{ij}(f) \mid f \in A(n,\underline{m})_{l+2}, 1 \leq i,j \leq n \rangle$$

und $x^{(\alpha)} \in A(n,\underline{m})_{l+2}$. Dann existiert ein k mit $a_k < p^{m_k}-1$ und wegen IV.(2.4) gilt

$$D_{ij}(x^{(\alpha)}) = [D_k, D_{ij}(x^{(\alpha+\varepsilon_k)})].$$

Damit ist $S(n,\underline{m})_l = [S(n,\underline{m})_{-1}, S(n,\underline{m})_{l+1}]$ für alle $1 \leq l \leq s-1$.

Vor. 5. Sei $i < j$. Wegen $n \geq 3$ existiert ein $k \notin \{i,j\}$ und es ist $h_k - h_i \in S(n,\underline{m})_0$. Aus IV.(2.6) 1. folgt

$$[h_k - h_i, D_{ij}(x^{(\tau)})] = ((p^{m_k}-1)-(p^{m_i}-1-1))D_{ij}(x^{(\tau)}) = D_{ij}(x^{(\tau)})$$

und somit ist $[S(n,\underline{m})_0, S(n,\underline{m})_s] = S(n,\underline{m})_s$.

2. Angenommen $S(n,\underline{m})$ ist eine Lie-p-Algebra. Wie im Beweis zur Einfachheit von $W(n,\underline{m})$ ist $\mathrm{ad}(D_j)^p|_{S(n,\underline{m})} = 0$. Dann ist auch

$$0 = (\mathrm{ad}(D_j))^p(D_{li}(x^{(\tau)})) = D_{li}(x^{(\tau - p\varepsilon_j)})$$

für $l,i \neq j$, also ist $m_j = 1$ für alle $1 \leq j \leq n$. Wir haben somit, dass $S(n,\underline{1})$ eine Unteralgebra der Lie-p-Algebra $W(n,\underline{1})$ ist und es genügt zu zeigen, dass $D_{ij}(x^{(\alpha)})^p \in S(n,\underline{1})$ für alle $0 \leq \alpha \leq \tau$ und $1 \leq i < j \leq n$ ist. Wegen IV.(2.6) und IV.(1.11) und deren nachfolgender Bemerkung gilt $D_{ij}(x^{(\alpha)})^p = 0$ außer für $|\alpha| = 2$ und $\alpha - \varepsilon_i - \varepsilon_j = 0$. Für $\alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j$ gilt $D_{ij}(x^{(\alpha)}) = h_i - h_j$ und es folgt $D_{ij}(x^{(\alpha)})^p = h_i - h_j \in S(n,\underline{1})$. Wegen $Z(S(n,\underline{1})) = 0$ ist die Graduierung eindeutig.

❑

(2.8) Theorem
Für die Dimension der Speziellen Algebra gilt

$$\dim_F S(n,\underline{m}) = (n-1)(p^{m_1+\ldots+m_n}-1).$$

Beweis. Wir betrachten zunächst $V := S(n,\underline{m}) + \sum_{j=1}^n F x^{(\tau-(p^{m_j}-1)\varepsilon_j)} D_j$. Wenn wir zeigen, dass $V = S'(n,\underline{m})$ und die Summe direkt ist, dann erhalten wir die Behauptung mit

$$\dim_F S(n,\underline{m}) = \dim_F S'(n,\underline{m}) - n = (n-1)(p^{m_1+\ldots+m_n}-1).$$

Dazu bemerken wir Folgendes:

$$(i) \text{ Es ist } x^{(\alpha)} D_k \in V \text{ für } a_k = 0.$$

Falls $\alpha_j = \tau_j$ für alle $j \neq k$ ist, liegt $x^{(\alpha)}D_k = x^{(\tau-\tau_k\varepsilon_k)}D_k \in V$. Andernfalls existiert ein $j \neq k$ mit $\alpha_j < \tau_j$. In diesem Fall gilt $x^{(\alpha)}D_k = D_{kj}(x^{(\alpha+\varepsilon_j)}) \in V$.

$$(ii) \text{ Es ist } x^{(\alpha)}D_k \equiv x^{(\alpha+\varepsilon_j-\varepsilon_k)}D_j \mod V \text{ für } a_j < \tau j.$$

Dieses folgt direkt aus der Gleichung $D_{kj}(x^{(\alpha+\varepsilon_j)}) = x^{(\alpha)}D_k - x^{(\alpha+\varepsilon_j-\varepsilon_k)}D_j$.
Sei nun $D = \sum_{k=1}^{q}\sum_{0\leq\alpha\leq\tau} a_{\alpha,k}x^{(\alpha)}D_k$ ein Element von $S'(n,\underline{m})$. Wir zeigen durch Induktion nach q, dass $D \in V$ liegt:
Wenn $D = \sum_{0\leq\alpha\leq\tau} a_\alpha x^{(\alpha)}D_1$ gilt, dann ist $0 = \operatorname{div}(D) = \sum_{0\leq\alpha\leq\tau} a_\alpha x^{(\alpha-\varepsilon_1)}$ und $a_\alpha = 0$ für alle $\alpha \geq \varepsilon_1$. Also gilt mit (i) $D = \sum_{0\leq\alpha\leq\tau,\alpha_1=0} a_\alpha x^{(\alpha)}D_1 \in V$.
Wir nehmen $q \geq 2$ an. Wegen (i) reicht es $D = \sum_{k=1}^{q}\sum_{\varepsilon_k\leq\alpha\leq\tau} a_{\alpha,k}x^{(\alpha)}D_k$ zu betrachten und (ii) impliziert für j=q, dass

$$D \equiv \sum_{k=1}^{q-1}\sum_{\varepsilon_k\leq\alpha\leq\tau,\alpha_q<\tau_q} a_{\alpha,k}x^{(\alpha+\varepsilon_q-\varepsilon_k)}D_q + \sum_{\varepsilon_q\leq\alpha\leq\tau} a_{\alpha,q}x^{(\alpha)}D_q$$

$$+\sum_{k=1}^{q-1}\sum_{\varepsilon_k\leq\alpha\leq\tau,\alpha_q=\tau_q} a_{\alpha,k}x^{(\alpha)}D_k \mod V.$$

Also ist

$$0 = \operatorname{div}(D) = \sum_{k=1}^{q-1}\sum_{\varepsilon_k\leq\alpha\leq\tau,\alpha_q<\tau_q} a_{\alpha,k}x^{(\alpha-\varepsilon_k)} + \sum_{\varepsilon_q\leq\alpha\leq\tau} a_{\alpha,q}x^{(\alpha-\varepsilon_q)}$$

$$+\sum_{k=1}^{q-1}\sum_{\varepsilon_k\leq\alpha\leq\tau,\alpha_q=\tau_q} a_{\alpha,k}x^{(\alpha-\varepsilon_k)}.$$

Da die Exponenten der Variable x_q in der letzten Summe alle τ_q sind, während die Exponenten in den zwei ersten Summen alle kleiner als τ_q sind, kann man folgern, dass

$$0 = \sum_{k=1}^{q-1}\sum_{\varepsilon_k\leq\alpha\leq\tau,\alpha_q<\tau_q} a_{\alpha,k}x^{(\alpha-\varepsilon_k)} + \sum_{\varepsilon_q\leq\alpha\leq\tau} a_{\alpha,q}x^{(\alpha-\varepsilon_q)}$$

und

$$0 = \sum_{k=1}^{q-1}\sum_{\varepsilon_k\leq\alpha\leq\tau,\alpha_q=\tau_q} a_{\alpha,k}x^{(\alpha-\varepsilon_k)}$$

gilt. Die Elemente

$$E_1 = \sum_{k=1}^{q}\sum_{\varepsilon_k\leq\alpha\leq\tau,\alpha_q<\tau_q} a_{\alpha,k}x^{(\alpha+\varepsilon_q-\varepsilon_k)}D_q + \sum_{\varepsilon_q\leq\alpha\leq\tau} a_{\alpha,q}x^{(\alpha)}D_q$$

und

$$E_2 = \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{\varepsilon_k \leq \alpha \leq \tau, \alpha_q = \tau_q} a_{\alpha,k} x^{(\alpha)} D_k$$

liegen in $S'(n,\underline{m})$. Mit Induktion ist $E_1, E_2 \in V$ und die Behauptung folgt. Um die Direktheit der Summe zu zeigen, nehmen wir

$$\sum_{\alpha,i,j} a_{\alpha,i,j} D_{ij}(x^{(\alpha)}) = \sum_{k=1}^{n} b_k x^{(\tau-(p^{m_k}-1)\varepsilon_k)} D_k$$

an. Angewandt auf $x^{(\varepsilon_l)}$ folgt

$$b_l x^{(\tau-(p^{m_l}-1)\varepsilon_l)} \in \sum_{i \neq l, 0 \leq \alpha \leq \tau} F x^{(\alpha-\varepsilon_i)}$$

und damit $b_l = 0$ für alle $1 \leq l \leq n$. ❑

IV.3 Die Hamilton-Algebra

Die Hamilton-Algebra wird über die Abbildung D_H definiert. Sei dazu $p > 2$ und $n = 2r$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$. Für $j \in \{1, \ldots, 2r\}$ sei

$$\sigma(j) := \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq r, \\ -1, & r < j \leq 2r. \end{cases}$$

und

$$j' := \begin{cases} j+r, & 1 \leq j \leq r, \\ j-r, & r < j \leq 2r. \end{cases}$$

Damit ist $(j')' = j$ und $\sigma(j') = -\sigma(j)$. Wir definieren

$$H''(2r,\underline{m}) := \{\sum_{j=1}^{2r} f_j D_j \mid \sigma(j') D_i(f_{j'}) = \sigma(i') D_j(f_{i'}), 1 \leq i,j \leq 2r\}$$

und $D_H : A(2r,\underline{m}) \to W(2r,\underline{m})$ durch

$$D_H(f) := \sum_{j=1}^{2r} \sigma(j) D_j(f) D_{j'}$$

für $f \in A(2r,\underline{m})$. Sei $H'(2r,\underline{m}) := D_H(A(2r,\underline{m}))$ und $H(2r,\underline{m}) := H'(2r,\underline{m})^{(1)}$.

(3.1) Lemma

1. *Die Abbildung D_H hat den Grad -2.*
2. *Das Bild von D_H ist eine Teilmenge von $H''(2r,\underline{m})$.*
3. *Der Kern der Abbildung D_H ist F.*
4. *Für $D=\sum_{i=1}^{2r} f_iD_i$ und $E=\sum_{j=1}^{2r} g_jD_j \in H''(2r,\underline{m})$ gilt*
$$[D,E]=D_H(\sum_{i=1}^{2r}\sigma(i)f_ig_{i'}).$$
5. *Die Algebra $H(2r,\underline{m})$ ist ein Ideal von $H''(2r,\underline{m})$.*

Beweis.

1. Die Aussage ist klar.
2. Ist $D:=\sum_{j=1}^{2r} f_jD_j \in H'(2r,\underline{m})$, so existiert ein $f\in A(2r,\underline{m})$ mit $f_{j'}=\sigma(j)D_j(f)$ für alle $1\leq j\leq 2r$ und es gilt
$$\sigma(j')D_i(f_{j'})=\sigma(j')\sigma(j)D_i(D_j(f))=\sigma(i')D_j(f_{i'}).$$
3. Für $f\in A(2r,\underline{m})$ mit $D_H(f)=0$ gilt $D_j(f)=0$ für alle $1\leq j\leq n$. Dann ist $f\in F$.
4. Sei c_j der Koeffizient von D_j des Produkts von $[D,E]$. Wegen $D,E\in H''(2r,\underline{m})$ gilt $D_i(f_j)=\sigma(j)\sigma(i')D_{j'}(f_{i'})$ und $D_i(g_j)=\sigma(j)\sigma(i')D_{j'}(g_{i'})$ für $1\leq i,j\leq 2r$. Damit erhalten wir
$$\begin{aligned}
c_j &= \sum_{i=1}^{2r} f_iD_i(g_j)-g_iD_i(f_j)\\
&= \sum_{i=1}^{2r} f_i\sigma(j)\sigma(i')D_{j'}(g_{i'})-\sum_{i=1}^{2r}\sigma(j)g_i\sigma(i')D_{j'}(f_{i'})\\
&= \sigma(j)[\sum_{i=1}^{2r}\sigma(i')f_iD_{j'}(g_{i'})+\sum_{i=1}^{2r}\sigma(i)g_iD_{j'}(f_{i'})]\\
&= \sigma(j)[\sum_{i=1}^{2r}\sigma(i')f_iD_{j'}(g_{i'})+\sum_{i=1}^{2r}\sigma(i')g_{i'}D_{j'}(f_i)]\\
&= \sigma(j)\sum_{i=1}^{2r}\sigma(i')D_{j'}(f_ig_{i'})=\sigma(j)D_{j'}(\sum_{i=1}^{2r}\sigma(i')f_ig_{i'})\\
&= \sigma(j')D_{j'}(\sum_{i=1}^{2r}\sigma(i)f_ig_{i'}).
\end{aligned}$$
Der letzte Term ist der Koeffizient von D_j in der Darstellung von $D_H(\sum_{i=1}^{2r}\sigma(i)f_ig_{i'})$.

5. $H'(2r,\underline{m})$ ist ein Ideal von $H''(2r,\underline{m})$. Also hat $H(2r,\underline{m}) = H'(2r,\underline{m})^{(1)}$ die gleiche Eigenschaft.

❑

(3.2) Definition
Die Algebra $H(2r,\underline{m})$ nennt man **Hamilton-Algebra**.

(3.3) Proposition
Für $\alpha,\beta \leq \tau$, $1 \leq i \leq 2r$ *und* $f,g \in A(2r,\underline{m})$ *gilt:*

1. $[D_H(f), D_H(g)] = D_H(D_H(f)(g))$,
2. $[D_H(x^{(\alpha)}), D_H(x^{(\beta)})] = \sum_{j=1}^{2r} \sigma(j) \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_j-\varepsilon_{j'}}{\alpha-\varepsilon_j} D_H(x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_j-\varepsilon_{j'})})$,
3. $[D_H(x^{(\alpha)}), D_H(x^{(\varepsilon_{i'})})] = \sigma(i) D_H(x^{(\alpha-\varepsilon_i)})$ *und*
4. $[D_H(x^{(\varepsilon_i+\varepsilon_{i'})}), D_H(x^{(\beta)})] = \sigma(i)(\beta_{i'} - \beta_i) D_H(x^{(\beta)})$.

Beweis.

1. Wegen IV.(3.1) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
[D_H(f), D_H(g)] &= D_H(\sum_{i=1}^{2r} \sigma(i)\sigma(i') D_{i'}(f)\sigma(i) D_i(g)) \\
&= D_H(\sum_{i=1}^{2r} \sigma(i') D_{i'}(f) D_i(g)) = D_H(D_H(f)(g))
\end{aligned}
$$

2. Mit 1. ist

$$
\begin{aligned}
[D_H(x^{(\alpha)}), D_H(x^{(\beta)})] &= D_H(D_H(x^{(\alpha)})(x^{(\beta)})) \\
&= D_H(\sum_{j=1}^{2r} \sigma(j) D_j(x^{(\alpha)}) D_{j'}(x^{(\beta)})) \\
&= D_H(\sum_{j=1}^{2r} \sigma(j) x^{(\alpha-\varepsilon_j)} x^{(\beta-\varepsilon_{j'})} \\
&= \sum_{j=1}^{2r} \sigma(j) \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_j-\varepsilon_{j'}}{\alpha-\varepsilon_j} D_H(x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_j-\varepsilon_{j'})}).
\end{aligned}
$$

3. Setzt man in 2. $\beta = \varepsilon_{i'}$, so sind alle Binomialkoeffizienten gleich 0 außer des Binomialkoeffizienten für $j = i'$. Der einzige Koeffizient ungleich 0 ist also der von $x^{(\alpha-\varepsilon_i)}$. Dieser Koeffizient ist gleich 1.

4. Setzt man in 2. $\alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_{i'}$, so sind die Binomialkoeffizienten gleich 0 außer der Binomialkoeffizienten für $j = i$ beziehungsweise $j = i'$. Folglich ist der einzige Koeffizient ungleich 0 der von $x^{(\beta)}$. Dieser Koeffizient ist die Summe aus $\sigma(i')\beta_i = -\sigma(i)\beta_i$ und $\sigma(i)\beta_{i'}$.

❏

(3.4) Proposition

1. *Die Algebra* $\mathfrak{sp}(2r) := \{A \in \mathfrak{gl}(2r) \mid SA = -A^t S\}$ *mit* $S = \begin{pmatrix} 0 & E_r \\ -E_r & 0 \end{pmatrix}$ *ist eine Unter-Lie-Algebra von* $\mathfrak{sl}(2r, F)$ *der Dimension* $2r^2 + r$*, sie heißt* ***Symplektische Algebra****.*

2. *Die Menge* F^{2r} *ist ein treuer irreduziber* $\mathfrak{sp}(2r)$*-Modul.*

3. *Die Symplektische Algebra* $\mathfrak{sp}(2r)$ *ist einfach.*

Beweis.

1. Es ist klar, dass $\mathfrak{sp}(2r)$ ein Untervektorraum ist. Teile $A \in \mathfrak{sp}(2r)$ in $r \times r$-Blöcke auf
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$
dann ist
$$0 = SA + A^t S = \begin{pmatrix} A_3 - A_3^t & A_4 + A_1^t \\ A_4 + A_1^t & -A_2 + A_2^t \end{pmatrix}$$
das heißt, es ist $A_1 = -A_4^t$. Es gilt folglich
$$\operatorname{Spur} A = \operatorname{Spur} A_1 + \operatorname{Spur} A_4 = \operatorname{Spur} A_1 - \operatorname{Spur} A_1 = 0$$
und daher ist $\mathfrak{sp}(2r) \subseteq \mathfrak{sl}(2r, F)$. Eine Basis bilden die Matrizen
$$\begin{array}{rlll} A_3 = A_3^t\colon & E_{r+i,j} + E_{r+j,i}\,, \quad 1 \le i < j \le r & \text{und} & E_{r+i,i}\,, \quad 1 \le i \le r\,; \\ A_2 = A_2^t\colon & E_{i,r+j} + E_{j,r+i}\,, \quad 1 \le i < j \le r & \text{und} & E_{i,r+i}\,, \quad 1 \le i \le r\,; \\ -A_1 = A_4^t\colon & E_{i,j} - E_{r+j,r+i}\,, \quad 1 \le i, j \le r\,. & & \end{array}$$
Das heißt, es sind insgesamt $\frac{r(r-1)}{2} + r + \frac{r(r-1)}{2} + r + r^2 = 2r^2 + r$ Basiselemente. Seien nun $A, B \in \mathfrak{sp}(2r)$, dann ist
$$\begin{aligned} S[A,B] &= S(AB - BA) = SAB - SBA = -A^t SB + B^t SA = A^t B^t S - B^t A^t S \\ &= (A^t B^t - B^t A^t)S = (BA - AB)^t S = -(BA - AB)^t S = -[A,B]^t S. \end{aligned}$$

2. Die Menge F^{2r} ist $\mathfrak{sp}(2r)$-Modul via $A.x = A \cdot x^t$ für $A \in \mathfrak{sp}(2r)$ und $x \in F^{2r}$. Dann ist

$$\mathrm{Ann}_{\mathfrak{sp}(2r)} F^{2r} = \{A \in \mathfrak{sp}(2r) \mid A.x = 0 \; \forall\, x \in F^{2r}\} = 0,$$

also operiert der Modul treu. Ist nun $0 \neq U \leq F^{2r}$ ein Untermodul und $u \in U$, so ist $A.u \in U$ für alle $A \in \mathfrak{sp}(2r)$. Wir können annehmen, dass ein $u = (u_1, \ldots, u_{2r}) \in U$ mit $u_k = 1$ für ein $1 \leq k \leq 2r$ existiert. Angenommen es ist $1 \leq k \leq r$. Dann erhalten wir die Elemente e_i mit $1 \leq i \leq 2r$ wie folgt:

   (a) $E_{r+k,k}.u = e_{r+k}$,

   (b) $(E_{j,r+k} + E_{k,r+j}).e_{r+k} = e_j$ für $1 \leq j \neq k \leq r$,

   (c) $E_{k,r+k}.e_{r+k} = e_k$,

   (d) $E_{r+j,j}.e_j = e_{r+j}$ für $1 \leq j \leq r$.

   Analog erhält man alle e_i, $1 \leq i \leq 2r$, falls $r+1 \leq k \leq 2r$.

3. Man kann man $\mathfrak{sp}(2r)$ als direkte Summe $\mathfrak{sp}(2r) = \bigoplus_{i=1}^{2r} F^{2r} \cap \mathfrak{sp}(2r)$ der Spalten ihrer Matrizen schreiben. Ist $0 \neq I$ ein Ideal in $\mathfrak{sp}(2r)$, dann ist

$$I = I \cap \mathfrak{sp}(2r) = \bigoplus_{i=1}^{2r} (F^{2r} \cap I) \cap \mathfrak{sp}(2r) = \bigoplus_{i=1}^{2r} F^{2r} \cap \mathfrak{sp}(2r) = \mathfrak{sp}(2r),$$

   weil F^{2r} irreduzibel ist.

❑

(3.5) Proposition

1. Die Hamilton-Algebra $H(2r, \underline{m})$ wird als Algebra von allen $D_H(x^{(\alpha)})$ für $0 \leq \alpha < \tau$ erzeugt.

2. Sie ist eine graduierte Unteralgebra von $W(2r, \underline{m})$ der Länge $s = |\tau| - 3$.

3. Ihre Elemente vom Grad -1 sind genau die Elemente der Verallgemeinerten Jacobson-Witt-Algebra vom Grad -1, das heißt, es ist $H(2r, \underline{m})_{-1} = W(2r, \underline{m})_{-1}$.

4. Die Darstellung $\varphi_H : H(2r, \underline{m})_0 \to \mathfrak{gl}(A(2r, \underline{m})_1)$, die durch die kanonische Darstellung induziert wird, definiert einen Isomorphismus $H(2r, \underline{m})_0 \to \mathfrak{sp}(2r)$.

Beweis.

1. Aus Proposition IV.(3.3) 3. folgt $D_H(x^{(\alpha)}) \in H(2r,\underline{m})$ für $0 \leq \alpha < \tau$. Seien $0 \leq \alpha, \beta \leq \tau$ gegeben. Wegen Lemma IV.(3.3) 2. gilt

$$[D_H(x^{(\alpha)}), D_H(x^{(\beta)})] =$$

$$\sum_{j=1}^{r} \sigma(j)[\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_j-\varepsilon_{j'}}{\alpha-\varepsilon_j} - \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_j-\varepsilon_{j'}}{\alpha-\varepsilon_{j'}}]D_H(x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_j-\varepsilon_{j'})}).$$

   Es ist $\binom{\tau}{\gamma} = (-1)^{|\gamma|}$ für $0 \leq \gamma \leq \tau$. Wenn nun $\alpha+\beta-\varepsilon_j-\varepsilon_{j'} = \tau$ ist, dann ist $0 \leq \alpha-\varepsilon_{j'}, \alpha-\varepsilon_j \leq \tau$ und wir erhalten

$$\binom{\tau}{\alpha-\varepsilon_j} - \binom{\tau}{\alpha-\varepsilon_{j'}} = (-1)^{|\alpha-\varepsilon_j|} - (-1)^{|\alpha-\varepsilon_{j'}|} = 0.$$

2. Die Abbildung D_H ist linear und vom Grad -2. Mit 1. und Lemma IV.(3.3) 2. folgern wir mit

$$H(2r,\underline{m}) = \bigoplus_{i=1}^{\sum(p^{m_i}-1)-1} D_H(A(2r,\underline{m}))_i = \bigoplus_{i=-1}^{\sum(p^{m_i}-1)-3} H(2r,\underline{m}) \cap W(2r,\underline{m})_i$$

   die Behauptung.

3. Es gilt $D_H(x^{(\varepsilon_{i'})}) = \sigma(i')D_i$ für $1 \leq i \leq 2r$. Mit $\varepsilon_{i'} < \tau$ und 1. folgt die Behauptung.

4. Wegen $p > 2$ gilt $H(2r,\underline{m})_0 = \langle D_H(x^{(\varepsilon_i+\varepsilon_j)}) \mid 1 \leq i \leq j \leq 2r\rangle$. Mit Lemma IV.(3.1) 3. erhalten wir

$$\dim_F H(2r,\underline{m})_0 = \frac{2r(2r+1)}{2} = 2r^2 + r = \dim_F \mathfrak{sp}(2r).$$

   Für $1 \leq i \leq j \leq 2r$ gilt

$$\varphi_H(D_H(x^{(\varepsilon_i+\varepsilon_j)})) = \varphi_H(\sigma(i)x^{(\varepsilon_j)}D_{i'} + \sigma(j)x^{(\varepsilon_i)}D_{j'}).$$

   Die Matrix, die diesen Endomorphismus bezüglich der Basis $\{x^{(\varepsilon_1)}, \ldots, x^{(\varepsilon_n)}\}$ repräsentiert ist durch $\sigma(j)E_{ij'} + \sigma(i)E_{ji'}$ gegeben. Diese Matrix gehört zu $\mathfrak{sp}(2r)$.

❑

(3.6) Theorem

1. *Die Algebra $H(2r,\underline{m})$ ist einfach und es gilt $\dim_F H(2r,\underline{m}) = p^{m_1+\dots+m_{2r}} - 2$.*
2. *Sie ist genau dann eine Lie-p-Algebra, wenn $m_i = 1$ für alle $1 \le i \le 2r$ gilt. In diesem Fall ist sie eine p-Unteralgebra von der Verallgemeinerten Jacobson-Witt-Algebra $W(2r,\underline{m})$.*

Beweis.

1. Aus Lemma IV.(3.1) 3. und Proposition IV.(3.5) 1. folgt die Formel für die Dimension. Wegen $H(2r,\underline{m})_{-1} = W(2r,\underline{m})_{-1}$ ist $H(2r,\underline{m})$ zulässig graduiert und wir können den Einfachheitssatz III.(1.9) anwenden.

   Vor. 1. Die Aussage gilt wegen $p > 2$.

   Vor. 2. Die Aussage ist trivialerweise erfüllt.

   Vor. 3. Wegen IV.(3.5) 4. und der Eigenschaften von $\mathfrak{sp}(2r)$ ist $A(2r,\underline{m})_1$ ein irreduzibler $H(2r,\underline{m})_0$-Modul. Die Irreduzibilität von $H(2r,\underline{m})_{-1}$ folgt jetzt aus Proposition IV.(3.5) 3. und Proposition IV.(1.7) 7.

   Vor. 4. Aus Lemma IV.(3.3) 4. folgt $[H(2r,\underline{m})_{-1}, H(2r,\underline{m})_{i+1}] = H(2r,\underline{m})_i$ für $1 \le i < s$.

   Vor. 5. Mit Lemma IV.(3.3) 3. gilt $[D_H(x^{(\varepsilon_i+\varepsilon_{i'})}), D_H(x^{(\tau-\varepsilon_i)})] = \sigma(i) D_H(x^{(\tau-\varepsilon_i)})$ und damit $[H(2r,\underline{m})_0, H(2r,\underline{m})_s] = H(2r,\underline{m})_s$ für $1 \le i \le 2r$.

   Insgesamt ist die Hamilton-Algebra einfach.

2. Angenommen $H(2r,\underline{m})$ ist eine Lie-p-Algebra. Dann gilt $\mathrm{ad}(D_j)^p|_{H(2r,\underline{m})} = 0$ und mit IV.(3.3) 3. ist

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{ad}(D_j)^p(D_H(x^{(\tau-\varepsilon_{j'})})) = \mathrm{ad}(\sigma(j')D_H(x^{(\varepsilon_{j'})}))^p(D_H(x^{(\tau-\varepsilon_{j'})})) \\ &= D_H(x^{(\tau-p\varepsilon_j-\varepsilon_{j'})}). \end{aligned}$$

   Damit ist $m_j = 1$ für alle $1 \le j \le n$.

   Sei $\underline{m} = \underline{1}$. Dann ist $W(2r,\underline{m})$ ist eine Lie-p-Algebra und es gilt:

$$D_H(f) = \sum_{j=1}^{r} D_j(f)D_{j'} - D_{j'}(f)D_j = \sum_{j=1}^{r} D_{j'j}(f).$$

   Man kann mit einer kleinen Rechnung zeigen, dass $D_{i'i}(x^{(\alpha)})$ und $D_{j'j}(x^{(\alpha)})$ für $0 \le \alpha \le \tau$ kommutieren. Also ist $D_H(x^{(\alpha)})^p = \sum_{j=1}^r D_{j'j}(x^{(\alpha)})^p$. Der Beweis von Satz IV.(2.7) zeigt, dass $D_H(x^{(\alpha)})^p = 0$ außer für $\alpha = \varepsilon_j + \varepsilon_{j'}$ mit einem $j \in \{1,\dots,r\}$ ist. In diesem Fall gilt $D_H(x^{(\alpha)}) = h_{j'} - h_j$ und folglich ist $D_H(x^{(\alpha)})^p = D_H(x^{(\alpha)})$. Somit ist $H(2r,\underline{m})$ eine p-Unteralgebra von $W(2r,\underline{m})$.

❑

IV.4 Die Kontakt-Algebra

Sei $p > 2$ und $n := 2r+1$ eine ungerade ganze Zahl ($r \in \mathbb{N}_0$). Die Kontakt-Algebra wird über die lineare Abbildung $D_K : A(n,\underline{m}) \to W(n,\underline{m})$ definiert, wobei $D_K(f) := \sum_{j=1}^{n} f_j D_j$ durch

$$f_j = x^{(\varepsilon_j)} D_n(f) + \sigma(j') D_{j'}(f) \text{ für } 2 \le j \le 2r,$$

$$f_n = 2f - \sum_{j=1}^{2r} \sigma(j) x^{(\varepsilon_j)} f_{j'}$$

definiert wird. Sei außerdem

$$d_i := D_i + \sigma(i) x^{(\varepsilon_{i'})} D_n \text{ für } 1 \le i \le 2r$$

und

$$d_n := 2D_n.$$

(4.1) Lemma

1. *Für $1 \le i,j \le 2r$ gilt $[d_i,d_j] = \delta_{ij'}\sigma(j) d_n$ und $[d_n,d_j] = 0$ für $1 \le j \le n$.*

2. *Das Bild der Abbildung D_K kann man folgendermaßen durch die d_j ausdrücken:*

$$D_K(f) = \sum_{j=1}^{2r} \sigma(j) d_j(f) d_{j'} + f d_n.$$

Beweis.

1. Wir berechnen den Kommutator

$$\begin{aligned} [d_i,d_j] &= [D_i + \sigma(i)x^{(\varepsilon_{i'})}D_n, D_j + \sigma(j)x^{(\varepsilon_{j'})}D_n] \\ &= [D_i, \sigma(j)x^{(\varepsilon_{j'})}D_n] + [\sigma(i)x^{(\varepsilon_{i'})}D_n, D_j] \\ &= \delta_{ij'}\sigma(j)D_n - \delta_{ji'}\sigma(i)D_n \\ &= 2\delta_{ij'}\sigma(j)D_n = \delta_{ij'}\sigma(j)d_n. \end{aligned}$$

   Die zweite Gleichung ist trivial.

2. Sei $E(f) = \sum_{j=1}^{2r} \sigma(j) d_j(f) d_{j'} + f d_n \in W(n,\underline{m})$. Dann gilt für $1 \le i \le 2r$

$$E(f)(x^{(\varepsilon_i)}) = \sigma(i')d_{i'}(f) = \sigma(i')D_{i'}(f) + x^{(\varepsilon_i)}D_n(f) = D_K(f)(x^{(\varepsilon_i)}),$$

sowie

$$\begin{aligned}
E(f)(x^{(\varepsilon_n)}) &= \sum_{j=1}^{2r} \sigma(j)d_j(f)\sigma(j')x^{(\varepsilon_j)} + 2f \\
&= \sum_{j=1}^{2r} \sigma(j')x^{(\varepsilon_j)}E(f)(x^{(\varepsilon_{j'})}) + 2f \\
&= \sum_{j=1}^{2r} \sigma(j')x^{(\varepsilon_j)}D_K(f)(x^{(\varepsilon_{j'})}) + 2f \\
&= D_K(f)(x^{(\varepsilon_n)}).
\end{aligned}$$

❑

Für $f,g \in A(n,\underline{m})$ definiere $\langle f,g\rangle := D_K(f)(g) - gd_n(f)$.

(4.2) Proposition
Mit obiger Definition gilt $D_K(\langle f,g\rangle) = [D_K(f),D_K(g)]$ für alle $f,g \in A(n,\underline{m})$.

Beweis. Wir setzen $D_K(f) = \sum_{j=1}^n f_j d_j$ und $D_K(g) = \sum_{j=1}^n g_j d_j$. Weiter sei $[D_K(f),D_K(g)] = \sum_{j=1}^n h_j d_j$. Wir bemerken, dass

$$f_l = \sigma(l')d_{l'}(f), \;\; g_l = \sigma(l')d_{l'}(g), \;\; \text{für } 1 \le i \le 2r \text{ und } f_n = f, \;\; g_n = g \qquad (*)$$

und

$$\langle f,g\rangle = \sum_{j=1}^{2r} \sigma(j)f_j g_{j'} + fd_n(g) - gd_n(f) \qquad (**)$$

gelten. Da

$$\begin{aligned}
[D_k(f),D_k(g)] &= \sum_{i,j=1}^{n} [f_i d_i, g_j d_j] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} f_i d_i(g_j)d_j - g_j d_j(f_i)d_i + f_i g_j[d_i,d_j] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} f_i d_i(g_j)d_j - g_j d_j(f_i)d_i \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{2r} \sigma(j)\delta_{ij'} f_i g_j d_n
\end{aligned}$$

ist, erhalten wir

$$h_l = \sum_{i=1}^{n} f_i d_i(g_l) - g_i d_i(f_l) \text{ für } 1 \le l \le 2r$$

und

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} f_i d_i(g) - g_i d_i(f) - \sum_{i=1}^{2r} \sigma(i) f_i g_{i'}.$$

Wegen $(*)$ und $(**)$ gilt für $l \leq 2r$

$$\begin{aligned}
h_l &= \sum_{i=1}^{2r} f_i d_i(\sigma(l')d_{l'}(g)) - g_i d_i(\sigma(l')d_{l'}(f)) + f d_n(g_l) - g d_n(f_l) \\
&= \sigma(l') \sum_{i=1}^{2r} (f_i d_{l'}(d_i(g)) + f_i[d_i, d_{l'}](g) - g_i d_{l'}(d_i(f)) - g_i[d_i, d_{l'}](g)) \\
&\quad + f d_n(g_l) - g d_n(f_l) \\
&= \sigma(l') \sum_{i=1}^{2r} \sigma(i) f_i d_{l'}(g_{i'}) + f_l d_n(g) \\
&\quad - \sigma(l') \sum_{i=1}^{2r} \sigma(i) g_i d_{l'}(f_{i'}) - g_l d_n(f) + f d_n(g_l) - g d_n(f_l) \\
&= \sigma(l') d_{l'}(\sum_{i=1}^{2r} \sigma(i) f_i g_{i'}) + \sigma(l') d_{l'}(f d_n(g) - g d_n(f)) \\
&= \sigma(l') d_{l'}(\langle f, g \rangle).
\end{aligned}$$

Benutzen wir $(*)$ und $(**)$ für n erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
h_n &= \sum_{i=1}^{2r} \sigma(i)(f_i g_{i'} - g_i f_{i'}) + f d_n(g) - g d_n(f) - \sum_{i=1}^{2r} \sigma(i) f_i g_{i'} \\
&= -\sum_{i=1}^{2r} \sigma(i) g_i f_{i'} + f d_n(g) - g d_n(f) = \langle f, g \rangle.
\end{aligned}$$

❑

Aus der Proposition IV.(4.2) und der Injektivität folgt, dass $A(n, \underline{m})$ unter der Multiplikation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Lie-Algebra ist. Wir nennen diese Lie-Algebra $K'(2r+1, \underline{m})$.

(4.3) Definition
Die Algebra $K(2r+1, \underline{m}) := K'(2r+1, \underline{m})^{(1)}$ nennt man **Kontakt-Algebra**.

Wir definieren

$$D_H : A(n, \underline{m}) \to W(n, \underline{m}),\ D_H(f) := \sum_{j=1}^{2r} \sigma(j) D_j(f) D_{j'},$$

$$\{f,g\} := D_H(f)(g) \text{ für } f,g \in A(n,\underline{m}).$$

Dann erhalten wir

$$D_K(x^{(\alpha)}) = D_H(x^{(\alpha)}) + x^{(\alpha-\varepsilon_n)} \sum_{j=1}^{2r} x^{(\varepsilon_j)} D_j + (2 - \sum_{j=1}^{2r} \alpha_j) x^{(\alpha)} D_n.$$

Sei weiter $\|\alpha\| := |\alpha| + \alpha_n - 2$.

(4.4) Proposition

1. *Es gilt* $\langle x^{(\alpha)}, x^{(\beta)} \rangle = \{x^{(\alpha)}, x^{(\beta)}\} + [\|\beta\| \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_n}{\beta} - \|\alpha\| \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_n}{\alpha}] x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_n)}$.

2. *Die Vektorräume* $K'(2r+1,\underline{m})_i := \langle x^{(\alpha)} \mid \|\alpha\| = i \rangle$ *definieren eine Graduierung auf* $K'(2r,\underline{m})$.

Beweis.

1. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\langle x^{(\alpha)}, x^{(\beta)} \rangle &= D_K(x^{(\alpha)})(x^{(\beta)}) - 2x^{(\beta)} x^{(\alpha-\varepsilon_n)} \\
&= D_H(x^{(\alpha)})(x^{(\beta)}) - x^{(\alpha-\varepsilon_n)} \sum_{j=1}^{2r} x^{(\varepsilon_j)} D_j(x^{(\beta)}) \\
&\quad + (2 - \sum_{j=1}^{2r} \alpha_j) x^{(\alpha)} D_n(x^{(\beta)}) - 2x^{(\beta)} x^{(\alpha-\varepsilon_n)} \\
&= \{x^{(\alpha)}, x^{(\beta)}\} + (\sum_{j=1}^{2r} \beta_j - 2) x^{(\alpha-\varepsilon_n)} x^{(\beta)} - (\sum_{j=1}^{2r} \alpha_j - 2) x^{(\alpha)} x^{(\beta-\varepsilon_n)} \\
&= \{x^{(\alpha)}, x^{(\beta)}\} + [(\|\beta\| - 2\beta_n) \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_n}{\beta} \\
&\quad - (\|\alpha\| - 2\alpha_n) \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_n}{\alpha}] x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_n)}.
\end{aligned}$$

   Wegen $\beta_n \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_n}{\beta} = \alpha_n \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_n}{\alpha}$ gilt

$$\langle x^{(\alpha)}, x^{(\beta)} \rangle = \{x^{(\alpha)}, x^{(\beta)}\} + [\|\beta\| \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_n}{\beta} - \|\alpha\| \binom{\alpha+\beta-\varepsilon_n}{\alpha}] x^{(\alpha+\beta-\varepsilon_n)}.$$

   Die Behauptung folgt.

2. Die Aussage folgt aus 1.

❑

Damit ist auch $K(2r+1,\underline{m})$ graduiert. Wegen $K'(2r+1,\underline{m}) = \bigoplus_{i=-2}^{s} K'(2r+1,\underline{m})_i$ mit $s = \sum_{i=1}^{n}(p^{m_i}-1)+p^{m_n}-3 = \|\tau\|+3$ gilt $K(2r+1,\underline{m})_i = 0$ für $i < -2$.

(4.5) Korollar
Für $1 \leq \alpha \leq \tau$ und $1 \leq j \leq 2r$ gilt:

1. $\langle 1, x^{(\alpha)}\rangle = 2x^{(\alpha-\varepsilon_n)}$,
2. $\langle x^{(\varepsilon_j)}, x^{(\alpha)}\rangle = \sigma(j)x^{(\alpha-\varepsilon_{j'})} + (\alpha_j+1)x^{(\alpha+\varepsilon_j-\varepsilon_n)}$,
3. $\langle x^{(\varepsilon_n)}, x^{(\alpha)}\rangle = \|\alpha\|x^{(\alpha)}$,
4. $\langle x^{(\varepsilon_j+\varepsilon_{j'})}, x^{(\alpha)}\rangle = \sigma(j)(\alpha_{j'}-\alpha_j)x^{(\alpha)}$.

Beweis.

1. Es gilt $\langle 1, x^{(\alpha)}\rangle = D_K(1)(x^{(\alpha)}) = \sum_{j=1}^{2r}\sigma(j)d_j(1)d_{j'}(x^{(\alpha)}) + 1d_n(x^{(\alpha)}) = 2x^{(\alpha-\varepsilon_n)}$.
2. Mit IV.(4.4) und $\|\varepsilon_j\| = -1$ gilt:
$$\begin{aligned}\langle x^{(\varepsilon_j)}, x^{(\alpha)}\rangle &= \{x^{(\varepsilon_j)}, x^{(\alpha)}\} + [\|\alpha\|\binom{\alpha+\varepsilon_j-\varepsilon_n}{\alpha} + \binom{\alpha+\varepsilon_j-\varepsilon_n}{\varepsilon_j}]x^{(\alpha+\varepsilon_j-\varepsilon_n)}\\ &= \sigma(j)D_{j'}(x^{(\alpha)}) + (\alpha_j+1)x^{(\alpha+\varepsilon_j-\varepsilon_n)}\\ &= \sigma(j)x^{(\alpha-\varepsilon_{j'})} + (\alpha_j+1)x^{(\alpha+\varepsilon_j-\varepsilon_n)}.\end{aligned}$$
3. Mit IV.(4.4) und $\|\varepsilon_n\| = 0$ gilt:
$$\langle x^{(\varepsilon_n)}, x^{(\alpha)}\rangle = \{x^{(\varepsilon_n)}, x^{(\alpha)}\} + \|\alpha\|x^{(\alpha)} = \|\alpha\|x^{(\alpha)}.$$
4. Mit IV.(4.4)und $\|\varepsilon_j+\varepsilon_{j'}\| = 0$ gilt:
$$\begin{aligned}\langle x^{(\varepsilon_j+\varepsilon_{j'})}, x^{(\alpha)}\rangle &= \{x^{(\varepsilon_j+\varepsilon_{j'})}, x^{(\alpha)}\} + \|\alpha\|\binom{\alpha+\varepsilon_j+\varepsilon_{j'}-\varepsilon_n}{\alpha}x^{(\alpha+\varepsilon_j+\varepsilon_{j'}-\varepsilon_n)}\\ &= \sigma(j)x^{(\varepsilon_{j'})}D_{j'}(x^{(\alpha)}) + \sigma(j')x^{(\varepsilon_j)}D_j(x^{(\alpha)})\\ &= \sigma(j)(\alpha_{j'}-\alpha_j)x^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

❑

(4.6) Lemma

1. *Es gilt $F = K'(2r+1,\underline{m})_{-2} = C_{K'(2r+1,\underline{m})}(K'(2r+1,\underline{m})_{-1})$.*
2. *Die Menge $\sum_{\alpha<\tau} Fx^{(\alpha)}$ ist eine Teilmenge von $[K'(2r+1,\underline{m})_{-1}, K'(2r+1,\underline{m})]$.*

3. *Für $n+3 \equiv 0 \mod p$ ist $K'(2r+1,\underline{m})$ eine Teilmenge von $\sum_{\alpha<\tau} Fx^{(\alpha)}$.*

Beweis.

1. Es ist klar, dass $F = K'(2r+1,\underline{m})_{-2}$ und $K'(2r+1,\underline{m})_{-1} = \sum_{j=1}^{2r} Fx^{(\varepsilon_j)}$ gilt. Mit IV.(4.5) 1. gilt $\langle 1, K'(2r+1,\underline{m})_{-1}\rangle = 0$ und mit IV.(4.5) 2. folgt
$$\mathrm{ad}(x^{(\varepsilon_j)}) = \sigma(j)D_{j'} + x^{(\varepsilon_j)}D_n.$$
Damit ist $[\mathrm{ad}(x^{(\varepsilon_j)}), \mathrm{ad}(x^{(\varepsilon_{j'})})] = 2\sigma(j)D_n$.
Ist $\langle f, K'(2r+1,\underline{m})_{-1}\rangle = 0$, so gilt $(\sigma(j)D_{j'} + x^{(\varepsilon_j)}D_n)(f) = 0$ für alle $1 \le j \le r$. Weil $\{D \in W(2r+1,\underline{m}) \mid D(f) = 0\}$ eine Unteralgebra von $W(2r+1,\underline{m})$ ist, erhalten wir $D_n(f) = 0$. Folglich gilt $D_i(f) = 0$ für alle $1 \le i \le n$, also ist $f \in F$.

2. Die Formel in IV.(4.5) 3. zeigt, dass außer für $\beta_n = p^{m_n} - 1$ das Element $x^{(\beta)}$ in $\langle K'(2r+1,\underline{m})_{-2}, K'(2r+1,\underline{m})\rangle$ liegt. Wegen $K'(2r+1,\underline{m})_{-2} = K'(2r+1,\underline{m})_{-1}^{(1)}$ erhalten wir $x^{(\beta)} \in \langle K'(2r+1,\underline{m})_{-1}, K'(2r+1,\underline{m})\rangle$ für $\beta_n < p^{m_n} - 1$. Angenommen es ist $\beta_n = p^{m_n} - 1$. Wegen $\beta < \tau$ gibt es dann ein $j \in \{1,\dots,2r\}$ mit $\beta_j < p^{m_n} - 1$. Wegen IV.(4.5) 2. angewandt auf $\alpha = \beta + \varepsilon_{j'}$ gilt
$$\sigma(j)x^{(\beta)} \equiv -(b_j+1)x^{(\beta+\varepsilon_j+\varepsilon_{j'}-\varepsilon_n)} \mod \langle K'(2r+1,\underline{m})_{-1}, K'(2r+1,\underline{m})\rangle.$$
Nun liefert der erste Teil unseres Beweises die Behauptung.

3. Wegen $\{x^{(\alpha)}, x^{(\beta)}\} \in \sum_{\gamma<\tau} Fx^{(\gamma)}$ für alle $\alpha, \beta \le \tau$ und IV.(4.4) müssen wir nur den Fall $\alpha+\beta-\varepsilon_n = \tau$ betrachten. In diesem Fall ist
$$\begin{aligned} \|\beta\|\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_n}{\beta} - \|\alpha\|\binom{\alpha+\beta-\varepsilon_n}{\alpha} &= \|\beta\|(-1)^{|\beta|} - \|\alpha\|(-1)^{|\alpha|} \\ &= (\|\beta\|+\|\alpha\|)(-1)^{|\beta|} \\ &= (-1)^{|\beta|}\|\tau\| \\ &\equiv 0 \mod p. \end{aligned}$$
Also ist $\langle x^{(\alpha)}, x^{(\beta)}\rangle \in \sum_{\alpha<\tau} Fx^{(\alpha)}$.

❑

(4.7) Theorem

1. *Die Algebra $K(2r+1,\underline{m})$ ist eine einfache Lie-Algebra.*

2. *Es gilt* $K(2r+1,\underline{m}) = \begin{cases} K'(2r+1,\underline{m}), & n+3 \not\equiv 0 \mod (p) \\ \bigoplus_{\alpha<\tau} Fx^{(\alpha)}, & n+3 \equiv 0 \mod (p). \end{cases}$

3. *Sie ist genau dann eine Lie-p-Algebra, wenn $m_i = 1$ ist für alle $1 \leq i \leq 2r$.*

Beweis.

1. Wir zeigen die Einfachheit zusammen mit 2.

2. Wir bezeichnen U mit

$$U = \begin{cases} K'(2r+1,\underline{m}), & n+3 \not\equiv 0 \mod (p) \\ \bigoplus_{\alpha<\tau} Fx^{(\alpha)}, & n+3 \equiv 0 \mod (p). \end{cases}$$

Im Beweis von IV.(4.6) wurde gezeigt, dass U eine Unteralgebra von $K'(2r+1,\underline{m})$ ist.

Wegen IV.(4.6) 1. ist U zulässig graduiert und wir können die Voraussetzungen des Einfachheitssatzes III.(1.9) für U zeigen.

Vor. 1. Ist $s := \sum_{i=1}^{n}(p^{m_i}-1) + p^{m_n} - 4$, so ist die Länge der Graduierung entweder s oder $s+1$. In der Tat ist für $n+3 \equiv 0 \mod (p)$ die Algebra $U = \bigoplus_{i=-2}^{s} K'(2r+1,\underline{m})_i$.

Vor. 2. Ist $a \in C_U(U^+) \cap K'(2r+1,\underline{m})_{-2}$, dann gilt $0 = \langle a, x^{(\varepsilon_1+\varepsilon_n)}\rangle = 2ax^{(\varepsilon_1)}$, also ist auch $a = 0$.

Vor. 3. Es gilt $U_0 = \sum_{i,j\leq 2r} Fx^{(\varepsilon_i+\varepsilon_j)} + Fx^{(\varepsilon_n)}$ und $U_{-1} = \sum_{i=1}^{2r} Fx^{(\varepsilon_i)}$. Betrachte ein U_0-Untermodul V von U_{-1} und $0 \neq v = \sum_{i=1}^{2r} a_i x^{(\varepsilon_i)} \in V$, das heißt, es ist $a_j \neq 0$ für ein j. Dann ist $\langle v, x^{(2\varepsilon_{j'})}\rangle = \sigma(j)a_j x^{(\varepsilon_{j'})}$ und damit ist $x^{(\varepsilon_{j'})} \in V$. Es gilt nun $V = U_{-1}$, da $\langle x^{(\varepsilon_{j'})}, x^{(\varepsilon_j+\varepsilon_l)}\rangle = \sigma(j')x^{(\varepsilon_l)}$ für $1 \leq l \leq 2r$ ist.

Vor. 4. Wegen $\langle x^{(\varepsilon_i)}, x^{(\alpha)}\rangle = \sigma(j)x^{(\alpha-\varepsilon_{j'})} + (\alpha_j+1)x^{(\alpha+\varepsilon_j-\varepsilon_n)}$ gilt für alle $i-1 \leq i \leq s-1$ $[U_{-1}, U_{i+1}] = U_i$.

Vor. 5. Es gilt $K'(2r+1,\underline{m})_s = \bigoplus_{i=1}^{2r} Fx^{(\tau-\varepsilon-i)}$ und $K'(2r+1,\underline{m})_{s+1} = Fx^{(\tau)}$. Wir erhalten außerdem

$$\langle x^{(\varepsilon_n)}, x^{(\tau-\varepsilon_i)}\rangle = x^{(\tau-\varepsilon_i)} \text{ für } n+3 \equiv 0 \mod (p)$$

und

$$\langle x^{(\varepsilon_n)}, x^{(\tau)}\rangle = -(n+3)x^{(\tau)}.$$

Also ist U eine einfache Unteralgebra von $K'(2r+1,\underline{m})$.

Im Fall $n+3 \not\equiv 0 \mod (p)$ gilt $K(2r+1,\underline{m}) = U^{(1)} = U$ und sonst

$$K(2r+1,\underline{m}) \subseteq U = U^{(1)} \subseteq K'(2r+1,\underline{m})^{(1)} = K(2r+1,\underline{m}).$$

3. Ist $K(2r+1,\underline{m})$ eine Lie-p-Algebra, so sind $\mathrm{ad}(x^{(\varepsilon_i)})^p$ und $\mathrm{ad}(1)^p$ innere Derivationen von $K(2r+1,\underline{m})$ und somit ist sie gleich 0. Wir erhalten

$$0=\mathrm{ad}(x^{(\varepsilon_i)})^p(x^{(\tau-(p^{m_n}-1)}-\varepsilon_n)=\sigma(j)x^{(\tau-p\varepsilon_{j'}-(p^{m_n}-1)\varepsilon_n)},$$

also ist $m_j=1$ für $1\le j\le 2r$. Es gilt

$$0=\mathrm{ad}(1)^p(x^{(\tau-\varepsilon_1)})=2x^{(\tau-\varepsilon_1-p\varepsilon_n)}$$

und damit $m_n=1$. Sei

$$E(x^{(\alpha)}):=x^{(\alpha-\varepsilon_n)}\sum_{j=1}^{2r}x^{(\varepsilon_j)}D_j+(2-\sum_{j=1}^{2r}\alpha_j)x^{(\alpha)}D_n.$$

Dann ist

$$D_K(x^{(\alpha)})=D_H(x^{(\alpha)})+E(x^{(\alpha)}).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&[D_H(x^{(\alpha)}),E(x^{(\alpha)})]\\
=\;& D_H(x^{(\alpha)})(x^{(\alpha-\varepsilon_n)})\sum_{j=1}^{2r}x^{(\varepsilon_j)}D_j+x^{(\alpha-\varepsilon_n)}[D_H(x^{(\alpha)}),\sum_{j=1}^{2r}x^{(\varepsilon_j)}D_j]\\
&+(2-\sum_{j=1}^{2r}\alpha_j)D_H(x^{(\alpha)})(x^{(\alpha)})D_n+(2-\sum_{j=1}^{2r}\alpha_j)x^{(\alpha)}[D_H(x^{(\alpha)}),D_n]\\
=\;& 0-(\sum_{j=1}^{2r}\alpha_j-2)x^{(\alpha-\varepsilon_n)}D_H(x^{(\alpha)})+0-(2-\sum_{j=1}^{2r}\alpha_j)x^{(\alpha)}D_H(x^{(\alpha-\varepsilon_n)})\\
=\;& (2-\sum_{j=1}^{2r}\alpha_j)\sum_{i=1}^{2r}\sigma(i)(x^{(\alpha-\varepsilon_n)}x^{(\alpha-\varepsilon_i)}-x^{(\alpha)}x^{(\alpha-\varepsilon_i-\varepsilon_n)})D_{i'}\\
=\;& (2-\sum_{j=1}^{2r}\alpha_j)\sum_{i=1}^{2r}\sigma(i)[\binom{2\alpha-\varepsilon_i-\varepsilon_n}{\alpha-\varepsilon_n}-\binom{2\alpha-\varepsilon_i-\varepsilon_n}{\alpha}]x^{(2\alpha-\varepsilon_i-\varepsilon_n)}D_{i'}\\
=\;& 0.
\end{aligned}$$

Wir erinnern daran, dass $D_H(x^{(\alpha)})=-\sum_{i=1}^{r}D_{ii'}(x^{(\alpha)})$ gilt, wobei

$$[D_{ii'}(x^{(\alpha)}),D_{jj'}(x^{(\alpha)})]=0$$

ist. Dann folgt

$$D_K(x^{(\alpha)})^p=D_H(x^{(\alpha)})^p+E(x^{(\alpha)})^p.$$

Im Beweis der Lie-p-Algebra-Eigenschaft von $S(n,\underline{m})$ haben wir gezeigt, dass $D_{ii'}(x^{(\alpha)})^p = \delta_{\alpha,\varepsilon_i+\varepsilon_{i'}} D_{ii'}(x^{(\alpha)})$ ist. Wegen $D_H(x^{(\alpha)})^p = -\sum_{i=1}^r D_{ii'}(x^{(\alpha)})^p$ gilt

$$D_H(x^{(\alpha)})^p = \begin{cases} D_H(x^{(\alpha)}), & \alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_{i'} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist damit $E(x^{(\alpha)}) \in W(n,\underline{1})_{(\alpha-\varepsilon_n)} \cap W(n,\underline{1})_{|\alpha|-1}$ und mit IV.(1.11) und nachfolgender Bemerkung erhalten wir $E(x^{(\alpha)})^p = \delta_{\alpha,\varepsilon_n} E(x^{(\alpha)})$, woraus

$$D_H(x^{(\alpha)})^p = \begin{cases} D_K(x^{(\alpha)}), & \alpha \in \{\varepsilon_i + \varepsilon_{i'}\} \cup \{\varepsilon_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt. Also ist $D_K(K(2r+1,\underline{1}))$ eine p-Unteralgebra von $W(2r+1,\underline{1})$ und wegen der Bijektivität von D_K folgt die Lie-p-Algebra-Eigenschaft von $K(2r+1,\underline{1})$.

❑

IV.5 Melikian-Algebren

Sei F ein Körper mit $\mathrm{char}(F) = 5$.
Man kann die Melikian-Algebra $\mathscr{M}$ als graduierte Lie-Algebra

$$\mathscr{M}(\infty) = \mathscr{M}(\infty)_{\bar{0}} \oplus \mathscr{M}(\infty)_{\bar{1}} \oplus \mathscr{M}(\infty)_{\bar{2}} = W(2,\underline{1}) \oplus A(2,\underline{1}) \oplus \widetilde{W(2,\underline{1})}$$

einführen mit $\mathscr{M}(\infty)_{\bar{0}} = W(2,\underline{1})$ als Lie-Algebra, $\mathscr{M}(\infty)_{\bar{1}} = A(2,\underline{1})$ als Vektorraum und $\mathscr{M}(\infty)_{\bar{2}} = \widetilde{W(2,\underline{1})} = \{\tilde{D} \mid D \in W(2,\underline{1})\}$ als Vektorraumkopie (siehe [Kuz91]). Diese Aufteilung ergibt eine $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-Graduierung (Definition analog zur $\mathbb{Z}$-Graduierung). Das Lie-Produkt in $\mathscr{M}(\infty)$ ist durch

$$\begin{aligned} [D,\tilde{E}] &:= \widetilde{[D,E]} + 2\,\mathrm{div}(D)\tilde{E} \\ [D,f] &:= D(f) - 2\,\mathrm{div}(D)f, \\ [f_1\tilde{D}_1 + f_2\tilde{D}_2, g_1\tilde{D}_1 + g_2\tilde{D}_2] &:= f_1g_2 - f_2g_1, \\ [f,\tilde{E}] &:= fE, \\ [f,g] &:= 2(gD_2(f) - fD_2(g))\tilde{D}_1 + 2(fD_1(g) - gD_1(f))\tilde{D}_2 \end{aligned}$$

für alle $D,E \in W(2,\underline{1}), f,g,h,f_i,g_i \in A(2,\underline{1})$ gegeben. Hierbei ist die Divergenz gegeben durch $\mathrm{div}: W(2,\underline{1}) \to A(2,\underline{1}), f_1D_1 + f_2D_2 \mapsto D_1(f_1) + D_2(f_2)$. Die Abbildung

$x_1 \mapsto x_2,\ x_2 \mapsto x_1$ induziert einen Automorphismus auf $\mathscr{M}(\infty)$. Die Algebra $\mathscr{M}(\infty)$ besitzt eine zweite Graduierung. Diese zweite Graduierung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\deg_{\mathscr{M}}(D) &:= 3\deg(D)\\ \deg_{\mathscr{M}}(\tilde{E}) &:= 3\deg(E)+2\\ \deg_{\mathscr{M}}(f) &:= 3\deg(f)-2\end{aligned}$$

für alle $D,E \in W(2,\underline{1})$ und $f \in A(2,\underline{1})$.

(5.1) Lemma
Die Algebra $\mathscr{M}(\infty)$ ist eine Lie-Algebra.

Beweis. Angenommen wir zeigen, dass $\mathrm{ad}(\tilde{D}_1)$ eine Derivation ist, dann ist wegen des oben genannten Automorphismus auch $\mathrm{ad}(\tilde{D}_2)$ eine Derivation. Also enthält $\mathrm{Der}(\mathscr{M}(\infty))$ die Algebra, die durch diese Elemente erzeugt wird: $\sum_{i<0}\mathrm{ad}(\mathscr{M}_{[i]})$. Sei $J(A,B,C) = [A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]$ die Jacobi-Identität für homogene $A,B,C \in \mathscr{M}(\infty)$, wobei wir als Graduierung $\deg := \deg_{\mathscr{M}}$ wählen. Wir zeigen durch Induktion über den Grad, dass $J = 0$ ist. Denn falls der Grad von $J(A,B,C)$ kleiner als 0 ist, ist auch einer der Grade von A,B,C negativ. Um zu zeigen, dass $J(A,B,C)$ dann gleich 0 ist, brauchen wir also nur folgendes zu überprüfen:
Setze $D = f_1D_1 + f_2D_2$ und $E = g_1D_1 + g_2D_2$. Die Divergenz div ist eine Derivation, also gilt $\mathrm{div}([D,E]) = D(\mathrm{div}(E)) - E(\mathrm{div}(D))$ und $\mathrm{div}(fD) = D(f) + f\mathrm{div}(D)$. Es ist

$$\begin{aligned}
[\tilde{D}_1,[D,E]] &= [\widetilde{D_1,[D,E]}] - 2\ \mathrm{div}([D,E])\tilde{D}_1 = [[\tilde{D}_1,D],E]+[D,[\tilde{D}_1,E]];\\[1ex]
[D,\tilde{E}] &= (f_1D_1(g_1)+f_2D_2(g_1))\tilde{D}_1 + (f_1D_1(g_2)+f_2D_2(g_2))\tilde{D}_2\\
&\quad -(g_1D_1(f_1)+g_2D_2(f_1))\tilde{D}_1 - (g_1D_1(f_2)+g_2D_2(f_2))\tilde{D}_2\\
&\quad +2(D_1(f_1)+D_2(f_2))g_1\tilde{D}_1 + 2(D_1(f_1)+D_2(f_2))g_2\tilde{D}_2,\\[1ex]
[\tilde{D}_1,[D,\tilde{E}]] &= f_1D_1(g_2)+f_2D_2(g_2)-g_1D_1(f_2)\\
&\quad -g_2D_2(f_2)+2\ g_2D_1(f_1)+2\ g_2D_2(f_2);\\[1ex]
[[\tilde{D}_1,D],\tilde{E}] &= -[[\widetilde{D,D_1}]+2\ \mathrm{div}(D)\tilde{D}_1,E]\\
&= [D(f_1)\tilde{D}_1 + D_1(f_2)\tilde{D}_2 - 2(D_1(f_1)+D_2(f_2))\tilde{D}_1, g_1\tilde{D}_1+g_2\tilde{D}_2]\\
&= (-D_1(f_1)-2D_2(f_2))g_2 - D_1(f_2)g_1,\\[1ex]
[D,[\tilde{D}_1,\tilde{E}]] &= [D,g_2] = f_1D_1(g_2)+f_2D_2(g_2)-2(D_1(f_1)+D_2(f_2))g_2;\\[1ex]
[\tilde{D}_1,[D,h]] &= [D_1,D(h)-2\ \mathrm{div}(D)h] = (2\ \mathrm{div}(D)h - D(h))D_1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[[\tilde{D}_1, D], h]] &= [D_1(f_1)\tilde{D}_1 + D_1(f_2)\tilde{D}_2 - 2\,\mathrm{div}(D)\tilde{D}_1] \\
&= -hD_1(f_1)D_1 - hD_1(f_2)D_2 + 2\,\mathrm{div}(D)hD_1, \\
[D, [\tilde{D}_1, h]] &= -[D, hD_1] = -D(h)D_1 + hD_1(f_1)D_1 + hD_1(f_2)D_2; \\
[\tilde{D}_1, [\tilde{D}, \tilde{E}]] &= [D_1, f_1g_2 - f_2g_1] = (f_2g_1 - f_1g_2)D_1, \\
[[\tilde{D}_1, \tilde{D}], \tilde{E}] &= [f_2, \tilde{E}] = f_2g_1D_1 + f_2g_2D_2, \\
[\tilde{D}, [\tilde{D}_1, \tilde{E}]] &= [\tilde{D}, g_2] = -g_2f_1D_1 - g_2f_2D_2; \\
[\tilde{D}_1, [h, \tilde{E}]] &= [\tilde{D}_1, hg_1D_1 + hg_2D_2] \\
&= D_1(hg_1)\tilde{D}_1 + D_1(hg_2)\tilde{D}_2 - 2D_1(hg_1) + D_2(hg_2)\tilde{D}_1 \\
&= (-D_1(h)g_1 - hD_1(g_1) - 2D_2(h)g_2 - 2hD_2(g_2))\tilde{D}_1 \\
&\quad +(D_1(h)g_2 + hD_1(g_2))\tilde{D}_2, \\
[[\tilde{D}_1, h], \tilde{E}] &= [-hD_1, \tilde{E}] \\
&= -hD_1(g_1)\tilde{D}_1 - hD_1(g_2)\tilde{D}_2 + g_1D_1(h)\tilde{D}_1 \\
&\quad +g_2D_2(h)\tilde{D}_1 - 2D_1(h)(g_1\tilde{D}_1 + g_2\tilde{D}_2) \\
&= (-g_1D_1(h) - hD_1(g_1) + g_2D_1(h))\tilde{D}_1 \\
&\quad +(-hD_1(g_2) - 2g_2D_1(h))\tilde{D}_2, \\
[h, [\tilde{D}_1, \tilde{E}]] &= [h, g_2] = 2(g_2D_2(h) - hD_2(g_2))\tilde{D}_1 + 2(hD_1(g_2) - g_2D_1(h))\tilde{D}_2; \\
[\tilde{D}_1, [f, g]] &= [\tilde{D}_1, 2(gD_2(f) - fD_2(g))\tilde{D}_1 + 2(fD_1(g) - gD_1(f))\tilde{D}_2] \\
&= 2fD_1(g) - 2gD_1(f), \\
[[\tilde{D}_1, f], g] &= -[fD_1, g] = -fD_1(g) + 2D_1(f)g, \\
[f, [\tilde{D}_1, g]] &= [f, -gD_1] = gD_1(f) - 2D_1(g)f.
\end{aligned}
$$

Sei nun $\deg(J(A,B,C)) \geq 0$. Wenden wir D_1, D_2 an, erhalten wir

$$[D_i, J(A,B,C)] = J([D_i,A],B,C) + J(A,[D_i,B],C) + J(A,B,[D_i,C]) = O$$

für $i = 1,2$ nach Induktionsvoraussetzung. Es ist

$$(\sum_{i\geq 0} \mathscr{M}_{[i]}) \cap \mathrm{Ann}(D_1) \cap \mathrm{Ann}(D_2) = 0.$$

Folglich gilt die Jacobi-Identität in $\mathscr{M}(\infty)$. ❑

Wir setzen für $\underline{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathscr{M}(m_1,m_2) := W(2,\underline{m}) \oplus A(2,\underline{m}) \oplus \widetilde{W(2,\underline{m})}.$$

Damit existiert für $\mathscr{M} := \mathscr{M}(m_1,m_2)$ eine Graduierung

$$\mathscr{M} = \bigoplus_{i=-3}^{s} \mathscr{M}_{[i]}$$

mit $s = 3(5^{n_1} + 5^{n_2}) - 7$ und

$$\mathscr{M}_{[-3]} = FD_1 + FD_2, \;\; \mathscr{M}_{[-2]} = F, \;\; \mathscr{M}_{[-1]} = F\tilde{D}_1 + F\tilde{D}_2,$$

$$\mathscr{M}_{[0]} = \sum_{i,j} Fx_iD_j, \;\; \mathscr{M}_{[s]} = Fx^{(\tau(\underline{m}))}\tilde{D}_1 + Fx^{(\tau(\underline{m}))}\tilde{D}_2,$$

wobei wie immer $\tau(\underline{m}) = (5^{n_1} - 1, 5^{n_2} - 1)$ sei.

(5.2) Definition
Die Algebra $\mathscr{M}(m_1,m_2)$ heißt **Melikian-Algebra** bezüglich $(m_1,m_2) \in \mathbb{N}^2$.

Für jedes $a \in F$ existieren $W(n,\underline{m})$-Moduln

$$A(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})} : \; \rho_a^A(D)f := D(f) + a\,\mathrm{div}(D)f,$$

und

$$W(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})} : \; \rho_a^W(D)E := [D,E] + a\,\mathrm{div}(D)E$$

für alle $D,E \in W(n,\underline{m})$ und $f \in A(n,\underline{m})$.

(5.3) Proposition

1. *Jeder $W(n,\underline{m})$-Untermodul von $A(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ enthält F. Der Modul $A(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ ist genau dann ein irreduzibler $W(n,\underline{m})$-Modul, wenn $a \neq 0,1$ ist. In diesem Fall ist $Fx^{(\tau)}$ der einzige irreduzible $W(n,\underline{m})_0$-Untermodul. Für $a = 0$ ist F der einzige echte $W(n,\underline{m})$-Untermodul von $A(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ und für $a = 1$ ist der einzige echte Untermodul $\sum_{\beta<\tau} Fx^{(\beta)}$.*

2. *Jeder $W(n,\underline{m})$-Untermodul von $W(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ enthält $\sum_{j=1}^{n} FD_j$. Der Modul $W(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ ist genau dann ein irreduzibler $W(n,\underline{m})$-Modul, wenn $n = 1$ und $a \neq 1,2$ oder $n \neq 1$ und $a \neq 1$ ist. In diesem Fall ist $\sum_{j=1}^{n} Fx^{(\tau)}D_j$ der einzige irreduzible $W(n,\underline{m})_0$-Untermodul. Der einzige minimale $W(n,\underline{m})$-Untermodul von $W(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ im Falle $n \neq 1$ ist $\sum_{0<\alpha<\tau} \sum_{i,j} FD_{ij}(x^{(\alpha)})$.*

3. *Die Moduln $X(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ und $X'(n,\underline{m})_{(a'\mathrm{div})}$ mit $X,X' \in A,W$ und $a,a' \in F$ sind genau dann isomorphe $W(n,\underline{m})$-Moduln, wenn $X = X'$ und $a = a'$ oder $n = 1$ und $a - \delta_{X,W} = a' - \delta_{X',W}$ ist.*

Beweis.

(a) Es ist klar, dass jeder $W(n,\underline{m})$-Untermodul von $A(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ den Körper F enthält. Betrachte $\varepsilon_i \leq \alpha \leq \tau$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(x^{(\tau-\alpha+\varepsilon_i)}D_i)x^{(\alpha)} &= (\binom{\tau}{\alpha-\varepsilon_i}+a\binom{\tau}{\alpha})x^{(\tau)}\\ &= (\prod_{j\neq i}\binom{p^{n_j}-1}{\alpha_j})(\binom{p^{n_i}-1}{\alpha_i-1}+a\binom{p^{n_i}-1}{\alpha_i})x^{(\tau)}\\ &= (a-1)\prod_{j=1}^{n}\binom{p^{n_j}-1}{\alpha_j}x^{(\tau)}+(\prod_{j\neq i}\binom{p^{n_j}-1}{\alpha_j})\binom{p^{n_i}-1}{\alpha_i})x^{(\tau)}.\end{aligned}$$

Es ist

$$\binom{p^{n_j}-1}{\alpha_j}\neq 0,\quad \binom{p^{n_i}}{\alpha_i}=0 \text{ für } \alpha\leq\tau.$$

Also ist der obige Ausdruck genau dann gleich 0, wenn $a=1$ ist.

Ist $a\neq 0,1$ und M_0 ein nicht-trivialer $W(n,\underline{m})_0$-Untermodul von $A(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$, dann enthält M_0 ein Polynom $f=\sum b_\beta x^{(\beta)}$ mit $b_0\neq 0$. Wähle $\alpha>0$ mit $|\alpha|$ minimal, so dass $b_\alpha\neq 0$ ist, und ein i, so dass $\alpha_i\neq 0$ ist. Nach obiger Rechnung ist $(x^{(\tau-\alpha+\varepsilon_i)}D_i)f=b_\alpha(x^{(\tau-\alpha+\varepsilon_i)}D_i)x^{(\alpha)}\in Fx^{(\tau)}\backslash\{0\}$. Also ist $Fx^{(\tau)}$ eine Teilmenge von M_0 und wegen der Irreduzibilität von M_0 folgt die Gleichheit. Es folgt sofort, dass $A(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ ein irreduzibler $W(n,\underline{m})_0$-Modul ist.

Im Fall $a=0$ zeigt man analog, dass F der einzige echte $W(n,\underline{m})$-Untermodul von $A(n,\underline{m})$ ist.

Sei also $a=1$. Dann ist $\sum_{\beta<\tau}Fx^{(\beta)}$ ein $W(n,\underline{m})$-Untermodul von $A(n,\underline{m})_{(1\ \mathrm{div})}$. Jeder echte nicht-triviale $W(n,\underline{m})$-Untermodul enthält F, also enthält er $(Fx^{(\tau)}D_i)=Fx^{(\tau-\varepsilon_i)}$ für $i=1,\ldots,n$. Wir schließen, dass $\sum_{\beta<\tau}Fx^{(\beta)}$ der einzige echte $W(n,\underline{m})$-Untermodul von $A(n,\underline{m})_{(1\ \mathrm{div})}$ ist.

(b) Hier beweisen wir einen Teil von 3. Angenommen die $W(n,\underline{m})$-Moduln $A(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ und $A(n,\underline{m})_{(a'\mathrm{div})}$ seien isomorph. Wir haben gezeigt, dass F genau dann ein $W(n,\underline{m})$-Untermodul ist, wenn $a=a'=0$ gilt. Genauso ist $\sum_{\beta<\tau}Fx^{(\beta)}$ genau dann ein $W(n,\underline{m})$-Untermodul, wenn $a=a'=1$ gilt.

In allen anderen Fällen ist $Fx^{(\tau)}$ der einzige minimale $W(n,\underline{m})_0$-Untermodul. Auf diesem Modul operiert x_1D_1 wie folgt:

$$(x_1D_1)x^{(\tau)}=(-1+a)x^{(\tau)}=(-1+a')x^{(\tau)},$$

das heißt, es ist $a=a'$.

Im Fall $n=1$ existiert ein $W(n,\underline{m})$-Modul-Isomorphismus

$$A(1,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}\to W(1,\underline{m})_{((a+1)\ \mathrm{div})},\ \ f\mapsto fD.$$

(c) Wir werden nun die Modul-Struktur von $W(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ untersuchen. Jeder $W(n,\underline{m})$-Untermodul von $W(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ enthält $\sum_{i=1}^{n} FD_i$. Mit (b) genügt es $n \neq 1$ zu betrachten.

Sei $a = 1$ und M ein minimaler $W(n,\underline{m})$-Untermodul von $W(n,\underline{m})_{(1\ \mathrm{div})}$. Dann enthält M den Modul $\sum FD_i$ und folglich gilt

$$(x^{(\tau)}D_j)D_i = -x^{(\tau-\varepsilon_i)}D_j + x^{(\tau-\varepsilon_j)}D_i = D_{ij}(x^{(\tau)}).$$

Wenn man $D_1,\ldots,D_n$ mehrere Male anwendet, erhält man

$$\sum_{0\leq\alpha\leq\tau}\sum_{i,j} FD_{ij}(x^{(\alpha)}) \subset M.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}(x^{(\alpha)}D_i)(D_{jk}(x^{(\beta)})) &= [x^{(\alpha)}D_i, x^{(\beta-\varepsilon_k)}D_j - x^{(\beta-\varepsilon_j)}D_k] \\ &\quad + x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^{(\beta-\varepsilon_k)}D_j - x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^{(\beta-\varepsilon_j)}D_k \\ &= D_{ji}(x^{(\alpha)}x^{(\beta-\varepsilon_k)}) + D_{ik}(x^{(\alpha)}x^{(\beta-\varepsilon_j)}).\end{aligned}$$

Somit ist $M = \sum_{0<\alpha\leq\tau}\sum_{i,j} FD_{ij}(x^{(\alpha)})$.

Sei $a \neq 1$ und M_0 ein nicht-trivialer irreduzibler $W(n,\underline{m})_0$-Untermodul von $W(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$. Dann enthält M_0 ein Element $0 \neq \sum_{j=1}^{n} f_j D_j \in W(n,\underline{m})_0$. Es ist für $\varepsilon_i \leq \alpha \leq \tau$

$$(x^{(\tau-\alpha+\varepsilon_i)}D_i)\cdot(x^{(\beta)}) \in Fx^{(\tau-\alpha+\beta)}D_j + Fx^{(\tau-\alpha+\beta+\varepsilon_i-\varepsilon_j)}D_i,$$

und für $\varepsilon_i \leq \alpha \leq \tau,\ i \neq j$

$$\begin{aligned}&(x^{(\tau-\alpha+\varepsilon_i)}D_i)\cdot(x^{(\alpha)}D_j) \\ =\ &(\binom{\tau}{\alpha-\varepsilon_i} + a\binom{\tau}{\alpha})x^{(\tau)}D_j - \binom{\tau+\varepsilon_i-\varepsilon_j}{\alpha}x^{(\tau+\varepsilon_i-\varepsilon_j)}D_i \\ =\ &(\binom{\tau}{\alpha-\varepsilon_i} + a\binom{\tau}{\alpha})x^{(\tau)}D_j \\ =\ &(\prod_{j\neq i}\binom{p^{n_j}-1}{\alpha_j})(\binom{p^{n_i}-1}{\alpha_i-1} + a\binom{p^{n_i}-1}{\alpha_i})x^{(\tau)}D_j \\ =\ &(a-1)\prod_{j=1}^{n}\binom{p^{n_j}-1}{\alpha_j}x^{(\tau)}D_j + (\prod_{j\neq i}\binom{p^{n_j}-1}{\alpha_j})\binom{p^{n_i}-1}{\alpha_i})x^{(\tau)}D_j \\ =\ &(a-1)\binom{\tau}{\alpha}x^{(\tau)}D_j \neq 0.\end{aligned}$$

Dann enthält M_0 ein Element $\sum_{j=1}^{n} a_j x^{(\tau)}D_j \neq 0$. Da $\sum_{j=1}^{n} Fx^{(\tau)}D_j$ ein irreduzibler $W(n,\underline{m})_0$-Modul ist, ist dieser der einzige minimale $W(n,\underline{m})_0$-Untermodul von $W(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$. Es folgt, dass $W(n,\underline{m})_{(a\ \mathrm{div})}$ irreduzibel ist.

(d) Angenommen $X(n,\underline{m})_{(a \text{ div})}$ und $X'(n,\underline{m})_{(a' \text{ div})}$ seien isomorphe $W(n,\underline{m})$-Moduln. Der Fall $n=1$ wurde in (b) gezeigt. Setze also voraus, dass $X = X' = W$ und $n \neq 1$. Aus 2. schließen wir, dass $W(n,\underline{m})_{(a \text{ div})}$ für $a = a' = 1$ reduzibel ist.

Für $a, a' \neq 1$ sind die einzigen Eigenwerte von $x_i D_i$ auf dem einzigen minimalen $W(n,\underline{m})_0$-Untermodul $\sum_{j=1}^{n} F x^{(\tau)} D_j$ die Werte $a-1$ und $a-2$. Es folgt also $\{a-1, a-2\} = \{a'-1, a'-2\}$. Das heißt, es gilt $a = a'$ wegen $p \neq 2$.

❑

Die folgenden Unterräume von $\mathscr{M}(\infty)$ sind als $W(2,\underline{m})$-Moduln der Form

$$A(2,\underline{m}) \cong A(2,\underline{m})_{(-2 \text{ div})}, \quad \widetilde{W(2,\underline{m})} \cong W(2,\underline{m})_{(2 \text{ div})}.$$

(5.4) Theorem
Die Melikian-Algebra $\mathscr{M}(m_1,m_2)$ ist einfach und für die Dimension gilt

$$dim_F \mathscr{M}(m_1,m_2) = 5^{m_1+m_2+1}.$$

Beweis. Die Graduierung $(\mathscr{M}_{[i]})$ von $\mathscr{M}(m_1,m_2)$ erfüllt die Bedingungen (g1)-(g4). Sei $J \neq 0$ ein nicht-triviales Ideal von $\mathscr{M}(m_1,m_2)$. Dann ist $\mathscr{M}_{[-3]} \cap J \neq 0$; siehe Beweis zu III.(1.8). Es ist nun einfach zu zeigen, dass auch $J \cap \mathscr{M}_{[-2]} \neq 0$ und $J \cap \mathscr{M}_{[-1]} \neq 0$ ist. Weil $\mathscr{M}_{\bar{1}} \cong A(2,\underline{m})_{(-2 \text{ div})}$, $\mathscr{M}_{\bar{0}} \cong W(2,\underline{m})$ und $\mathscr{M}_{\bar{2}} \cong A(2,\underline{m})_{(2 \text{ div})}$ nach Proposition IV.(5.3) einfache $\mathscr{M}_{\bar{0}}$-Moduln sind, ist $J = \mathscr{M}(m_1,m_2)$. ❑

(5.5) Theorem
Die Melikian-Algebra $\mathscr{M}(m_1,m_2)$ ist genau dann eine Lie-p-Algebra, wenn $(m_1,m_2) = (1,1)$ ist.

Beweis. Ist $\mathscr{M}(m_1,m_2)$ eine Lie-p-Algebra, dann folgt genau wie im Beweis zu IV.(1.8), dass $m_1 = m_2 = 1$ wegen $0 = (\mathrm{ad}(D_j))^5 (x^{(\tau)} D_j) = x^{(\tau - 5\varepsilon_j)} D_j$ gilt.
Es bleibt zu zeigen, dass $(\mathrm{ad}(m))^5 \in \mathrm{ad}(\mathscr{M}(1,1))$ für alle $m \in \mathscr{M}(1,1)$ ist. Es gilt $\mathrm{ad}(D_i)^p|_{W(n,\underline{1})} = \mathrm{ad}(D_i^p)|_{W(n,\underline{1})}$. Es ist $\mathrm{ad}(D_i)|_{\widetilde{W(n,\underline{1})}} = \widetilde{\mathrm{ad}(D_i)}$ und damit

$$\mathrm{ad}(D_i)^p|_{\widetilde{W(n,\underline{1})}} = \widetilde{\mathrm{ad}(D_i)}^p = \widetilde{\mathrm{ad}(D_i^p)} = \mathrm{ad}(D_i^p)|_{\widetilde{W(n,\underline{1})}},$$

sowie

$$\mathrm{ad}(D_i)^p|_{A(n,\underline{1})} = D_i^p = \mathrm{ad}(D_i^p)|_{A(n,\underline{1})}.$$

Es ist $\mathrm{ad}(x^{(\alpha)})^p = 0 = \mathrm{ad}(0) = \mathrm{ad}(x^{p\alpha})$, sowie $\mathrm{ad}(\tilde{D}_i)^p = 0 = \mathrm{ad}(0)$.

❑

IV.6 Klassifikationssätze

In diesem Abschnitt möchten wir einige Klassifikationssätze vorstellen.
Sei F ein Körper der Charakteristik $p > 0$.

(6.1) Definition
Die Lie-Algebren $W(n,\underline{m})$, $S(n,\underline{m})$, $H(2r,\underline{m})$ und $K(2r+1,\underline{m})$ nennt man **graduierte Lie-Algebren vom Cartan-Typ**.

Sei $X \in \{W, S', H'', K'\}, \underline{m} \in \mathbb{N}_0^m$. Definiere $X((n,F))$ genauso wie $A((n,F))$, also ohne obere Schranke τ. Dann gilt:

$$X(n,\underline{m}) = X((n,F)) \cap W(n,\underline{m}).$$

Sei die entsprechende einfache Lie-Algebra $X(n,\underline{m})^{(\infty)}$, das heißt eine der Lie-Algebren $W(n,\underline{m})$, $S(n,\underline{m})$, $H(2r,\underline{m})$ oder $K(2r+1,\underline{m})$. Da $X(n,\underline{m})$ graduiert ist, gibt es eine Filtrierung $(X(n,\underline{m})_{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $X(n,\underline{m})_{(k)} = \sum_{i\geq k} X(n,\underline{m})_i$. Sei Φ ein Automorphismus von $A((n,F))$, der diese Filtrierung beibehält, das heißt, es gilt $\Phi(X(n,\underline{m})_{(k)}) \subseteq X(n,\underline{m})_{(k)}$, und definiere

$$X(n,\underline{m},\Phi) := (\Phi^{-1} \circ X((n,F)) \circ \Phi) \cap W(n,\underline{m}).$$

(6.2) Definition
Die Lie-Algebra $X(n,\underline{m},\Phi)^{(\infty)}$ nennt man **filtrierte Lie-Algebra vom Cartan-Typ**, falls $X(n,\underline{m},\Phi)$ folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

1. $X(n,\underline{m},\Phi) \cap W(n,\underline{m})_{(2+\delta_{X,K}),X} \neq 0$,
2. $X(n,\underline{m},\Phi) + (\Phi \circ X((n,F)) \circ \Phi^{-1}) \cap W(n,\underline{m})_{(1+\delta_{X,K}),X} = \Phi \circ X((n,F)) \circ \Phi^{-1}$,

wobei $W(n,\underline{m})_{(k),X}$ die k-te Komponente der X-Filtrierung von $W(n,\underline{m})$ sei.

(6.3) Vermutung (Die Verallgemeinerte Kostrikin-Shafarevich-Vermutung)
Für $p > 5$ ist jede endlich-dimensionale einfache Lie-Algebra über F entweder klassisch oder isomorph zu einer der filtrierten Lie-Algebren vom Cartan-Typ.

(6.4) Vermutung (Die Ursprüngliche Kostrikin-Shafarevich-Vermutung)
Für $p > 5$ ist jede endlich-dimensionale einfache Lie-p-Algebra über F entweder klassisch oder isomorph zu einer der Lie-p-Algebren $W(n,\underline{1})$ mit $n \geq 1$, $S(n,\underline{1})$ mit $n \geq 3$, $H(2r,\underline{1})$ mit $r \geq 1$ oder $K(2r+1,\underline{1})$ mit $r \geq 1$.

(6.5) Theorem ([BW98])
Die Ursprüngliche Kostrikin-Shafarevich-Vermutung ist wahr für $p > 7$.

(6.6) Theorem (Strade, [PS06])
Die Verallgemeinerte Kostrikin-Shafarevich-Vermutung ist wahr für $p > 7$.

(6.7) Theorem (Klassifikationssatz, [PS06])
Sei L eine endlich-dimensionale einfache Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p > 3$. Dann ist L entweder eine klassische Lie-Algebra, eine filtrierte Lie-Algebra vom Cartan-Typ oder eine der Melikian-Algebren.

IV.7 Eine Ausnahme für $p = 3$

Hier werden wir eine Lie-p-Algebra beschreiben, wodurch wir sehen werden, dass die vorangehenden Klassifikationssätze zum Beispiel für $p = 3$ nicht gelten. Es ist eine Lie-Algebra, die Marguerite Frank gefunden hat, siehe [Fra73].
Sei also F ein Körper der Charakteristik $\mathrm{char}(F) = 3$.

(7.1) Definition
Die Algebren S und T sind Unteralgebren der Jacobson-Witt-Algebra $W(3,\underline{1})$ über F. Wie gesehen hat ein Element von $W(3,\underline{1})$ die Form

$$A = (a_1,a_2,a_3) = a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + a_3\Delta_3,$$

wobei $a_i \in F[x_1,x_2,x_3]/(x_1^3,x_2^3,x_3^3)$ sei und Δ_i den Differentialoperator $\partial/\partial x_i$ bezeichne. Die Lie-Klammer in $W(3,\underline{1})$ ist gegeben durch $[A,B] = C = (c_1,c_2,c_3)$ mit

$$c_i = \sum_{j=1}^{3}[(\Delta_j a_i)b_j - (\Delta_j b_i)a_j].$$

Die zwei Algebren S und T seien graduiert

$$S = S_{-1} \oplus S_0 \oplus S_1,$$

$$T = T_{-1} \oplus T_0 \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus T_3,$$

wobei S_i und T_i durch folgende Basen über F gegeben seien:

$$\begin{aligned}
S_{-1} &= \langle \Delta_1,\Delta_2,\Delta_3\rangle,\\
S_0 &= \langle A_1 = (x_1,x_2,x_3), A_2 = (0,x_2,-x_3), A_3 = (x_2,x_3,0), A_4 = (0,x_1,-x_2)\rangle,\\
S_1 &= \langle B_1 = (x_1x_2,x_1x_3,-x_2x_3), B_2 = (x_1^2,x_1x_2,x_2^2), B_3 = (-x_2^2,x_2x_3,x_3^2)\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{-1} &= S_{-1},\\
T_0 &= S_0 \oplus \langle A_5 = (x_3,0,0)\rangle,\\
T_1 &= S_1 \oplus \langle B_4 = (x_1x_3,0,x_3^2), B_5 = (x_2,-x_3^2,0), B_6 = (x_3^2,0,0)\rangle,\\
T_2 &= \langle C_1 = (x_2^2x_3 - x_1x_3^2, x_2x_3^2, 0), C_2 = (x_1^2x_3 - x_1x_2^2, x_1x_2x_3, x_2x_3^2),\\
&\quad\; C_3 = (x_1x_2x_3, -x_1x_3^2, x_2x_3^2)\rangle,\\
T_3 &= \langle D_1 = (x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_3^2, x_1x_2x_3^2, x_2^2x_3^2)\rangle.
\end{aligned}$$

(7.2) Theorem
Die Algebren S und T sind einfache Lie-p-Algebren mit einer natürlichen Graduierung, so dass für die Kommutatoren $S_0^{(4)} = T_0^{(4)} = 0$ gilt.

Beweis. An den Strukturkonstanten IV.2, IV.3 sieht man, dass die Graduierung zulässig ist. Die Voraussetzung 1.,2.,4.,5. des Einfachheitssatzes III.(1.9) sieht man an den Tabellen IV.2, IV.3. Die Teilmengen S_{-1} beziehungsweise T_{-1} sind S_0 beziehungsweise T_0-Moduln via $\varphi_{-1} : T_0 \to \mathfrak{gl}(T_{-1})$, $A \mapsto \mathrm{ad}(A)|T_{-1}$, beziehungsweise $\varphi_{-1} : S_0 \to \mathfrak{gl}(S_{-1})$, $A \mapsto \mathrm{ad}(A)|S_{-1}$. Ihre Irreduzibilität erkennt man an Tabelle IV.2. Also sind S und T einfache Lie-Algebren.
Es gilt $\mathrm{ad}(A_1)^3 = \mathrm{ad}(A_1), \mathrm{ad}(A_2)^3 = \mathrm{ad}(A_2)$ und $\mathrm{ad}(A)^3 = 0$ für alle anderen Basiselemente von S und T. Man kann dies mittels der Tabellen IV.2, IV.3 überpüfen. Aus II.(3.7) folgt die Lie-p-Algebra-Eigenschaft von S und T. Schließlich betrachten wir die Kommutatorreihen von S_0 und T_0:

$$\begin{array}{rclrclrcl} S_0^{(2)} &=& \langle A_1,A_3,A_4\rangle, & S_0^{(3)} &=& \langle A_1\rangle, & S_0^{(4)} &=& 0,\\ T_0^{(2)} &=& \langle A_1,A_3,A_4,A_5\rangle, & T_0^{(3)} &=& \langle A_1,A_3\rangle, & T_0^{(4)} &=& 0. \end{array}$$

❏

Cartan-Zerlegung: Sei H der Unterraum $H = \langle A_1,A_2\rangle$. Er ist eine abelsche Unteralgebra von S und T. Wir definieren für $w \in H^*$:

$$\begin{array}{rcl} T_w &=& \{t \in T \mid \mathrm{ad}(A)(t) = w(A)t \text{ für alle } A \in H\},\\ S_w &=& \{s \in S \mid \mathrm{ad}(A)(s) = w(A)s \text{ für alle } A \in H\}. \end{array}$$

Sei $\{w_1,w_2\}$ die zu $\{A_1,A_2\}$ duale Basis in H^*, das heißt, es gilt $w_i(A_j) = \delta_{ij}$ für $i = 1,2$. Dann gilt

$$\begin{array}{rclrcl} H = T_{w=0} &=& \langle A_1,A_2\rangle, && & \\ T_{w_1} &=& \langle B_2,B_5\rangle, & T_{-w_1} &=& \langle \Delta_1,C_3\rangle,\\ T_{w_2} &=& \langle A_3,D_1\rangle, & T_{-w_2} &=& \langle A_4,A_5\rangle,\\ T_{w_1+w_2} &=& \langle B_1,B_6\rangle, & T_{-w_1-w_2} &=& \langle \Delta_2,C_2\rangle,\\ T_{w_1-w_2} &=& \langle B_3,B_4\rangle, & T_{-w_1+w_2} &=& \langle \Delta_3,C_1\rangle; \end{array}$$

$$\begin{array}{rclrcl} H = S_{w=0} &=& \langle A_1,A_2\rangle, && & \\ S_{w_1} &=& \langle B_2\rangle, & T_{-w_1} &=& \langle \Delta_1\rangle,\\ T_{w_2} &=& \langle A_3\rangle, & T_{-w_2} &=& \langle A_4\rangle,\\ T_{w_1+w_2} &=& \langle B_1\rangle, & T_{-w_1-w_2} &=& \langle \Delta_2\rangle,\\ T_{w_1-w_2} &=& \langle B_3\rangle, & T_{-w_1+w_2} &=& \langle \Delta_3\rangle. \end{array}$$

Also sind $T = H \oplus (\bigoplus_w T_w)$ beziehungsweise $S = H \oplus (\bigoplus_w S_w)$ Wurzelraumzerlegungen mit Wurzeln $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ für $\lambda_i = -1, 0, 1$.
Die einzige bekannte einfache Algebra der Dimension 18 ist die Jacobson-Witt-Algebra $W(2,\underline{1})$. Wie in [Dem70] gezeigt wurde, ist jede Cartan-Unteralgebra von $W(2,\underline{1})$ konjugiert zu genau einer der Algebren

$$H_1 = \langle (x_1,0),(0,x_2)\rangle, H_2 = \langle (x_1+1,0),(0,x_2)\rangle, H_3 = \langle (x_1+1,0),(0,x_2+1)\rangle.$$

(7.3) Definition
Sei H eine Cartan-Unteralgebra einer Lie-Algebra L und bezeichne mit $n(L,H)$ die Anzahl der (ungeordneten) Paare von Wurzeln $\{\alpha,-\alpha\}$ mit $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = H$.

Die Zahl $n(L,H)$ hängt dann nur von der Konjugiertenklasse von H ab.

(7.4) Lemma
Ist H eine Cartan-Unteralgebra von $W(2,\underline{1})$, so ist $n(W(2,\underline{1}),H) \geq 2$.

Beweis. Wenn wir für $H = \langle \theta_1 = (y_1,0), \theta_2 = (0,y_2)\rangle$ mit $y_1 = x_1$ oder x_1+1 und $y_2 = x_2$ oder x_2+1 wählen, können wir das Lemma für alle drei H_k auf einmal zeigen. Sei

$$U_w = \{u \in W(2,\underline{1}) \mid \mathrm{ad}(\theta)(u) = w(\theta)u \text{ für alle } \theta \in H\}.$$

Sei nun wieder $\{w_1,w_2\}$ die zu $\{\theta_1,\theta_2\}$ duale Basis in H_k^*, das heißt, es gilt $w_i(A_j) = \delta_{ij}$ für $i = 1,2$, $k = 1,2,3$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rclrcl} U_{w_1} &=& \langle (y_1^2,0),(0,y_1y_2)\rangle, & U_{-w_1} &=& \langle (1,0),(0,y_1^2y_2)\rangle, \\ U_{w_2} &=& \langle (y_1y_2,0),(0,y_2^2)\rangle, & U_{-w_2} &=& \langle (y_1y_2^2,0),(0,1)\rangle. \end{array}$$

Es folgt direkt, dass $[U_{w_1},U_{-w_1}] = [U_{w_2},U_{-w_2}] = H$ für alle erlaubten Substitutionen, sowie für y_1 und y_2 gilt. Also ist $n(W(2,\underline{1}),H) \geq 2$. ❑

(7.5) Theorem
Die Algebra T ist nicht isomorph zu $W(2,\underline{1})$.

Beweis. Für $\alpha = w_1, w_2, w_1+w_2$ sind die Unterräume $[T_\alpha, T_{-\alpha}]$ die Räume $\langle A_1, A_2\rangle$, $\langle A_1\rangle$ beziehungsweise $\langle A_1 - A_2\rangle$, während $[T_{w_1-w_2}, T_{-w_1+w_2}] = H$ gilt. Also ist $n(T,H) = 1$ und wegen Lemma IV.(7.4) kann T nicht isomorph zu $W(2,\underline{1})$ sein. ❑

Wir berechnen die Strukturkonstanten:

$[\cdot,\cdot]$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Δ_1	0	0	0	$-\Delta_1$	0	0	$-\Delta_2$	0
Δ_2	0	0	0	$-\Delta_2$	$-\Delta_2$	$-\Delta_1$	$-\Delta_3$	0
Δ_3	0	0	0	$-\Delta_3$	Δ_3	$-\Delta_2$	0	$-\Delta_1$
A_1	Δ_1	Δ_2	Δ_3	0	0	0	0	0
A_2	0	Δ_2	$-\Delta_3$	0	0	$-A_3$	A_4	A_5
A_3	0	Δ_1	Δ_2	0	A_3	0	A_1	0
A_4	Δ_2	Δ_3	0	0	$-A_4$	$-A_1$	0	A_3
A_5	0	0	Δ_1	0	$-A_5$	0	$-A_3$	0
B_1	A_3	$A_1 - A_2$	A_4	B_1	B_1	$-B_3$	B_2	$-B_5$
B_2	$-A_1 - A_2$	A_4	0	B_2	0	B_1	0	$B_3 - B_4$
B_3	0	A_3	A_2	B_3	$-B_3$	0	B_1	$-B_6$
B_4	A_5	0	$A_1 - A_2$	B_4	$-B_4$	B_5	$-B_1$	0
B_5	0	A_5	A_3	B_5	0	$-B_6$	$B_3 + B_4$	0
B_6	0	0	$-A_5$	B_6	B_6	0	B_5	0
C_1	$-B_6$	$-B_5$	$B_4 - B_3$	$-C_1$	C_1	0	C_3	0
C_2	$B_3 - B_4$	B_1	B_2	$-C_2$	$-C_2$	$-C_3$	0	C_1
C_3	B_5	B_4	B_1	$-C_3$	0	C_1	C_2	0
D_1	C_1	$-C_3$	$-C_2$	0	D_1	0	0	0

$[\cdot,\cdot]$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
Δ_1	$-A_3$	$A_1 + A_2$	0	$-A_5$	0	0
Δ_2	$A_2 - A_1$	$-A_4$	$-A_3$	0	$-A_5$	0
Δ_3	$-A_4$	0	$-A_2$	$A_2 - A_1$	$-A_3$	A_5
A_1	$-B_1$	$-B_2$	$-B_3$	$-B_4$	$-B_5$	$-B_6$
A_2	$-B_1$	0	B_3	B_4	0	$-B_6$
A_3	B_3	$-B_1$	0	$-B_5$	B_6	0
A_4	$-B_2$	0	$-B_1$	B_1	$-B_3 - B_4$	$-B_5$
A_5	B_5	$B_4 - B_3$	B_6	0	0	0
B_1	0	0	0	C_3	$-C_1$	0
B_2	0	0	0	C_2	C_3	C_1
B_3	0	0	0	C_1	0	0
B_4	$-C_3$	$-C_2$	$-C_1$	0	0	0
B_5	C_1	$-C_3$	0	0	0	0
B_6	0	$-C_1$	0	0	0	0
C_1	0	D_1	0	0	0	0
C_2	0	0	D_1	$-D_1$	0	0
C_3	$-D_1$	0	0	0	0	0
D_1	0	0	0	0	0	0

Tabelle IV.2: Strukturkonstanten von T und S

$[\cdot,\cdot]$	C_1	C_2	C_3	D_1
Δ_1	B_6	$B_4 - B_3$	$-B_5$	$-C_1$
Δ_2	B_5	$-B_1$	$-B_4$	C_3
Δ_3	$B_3 - B_4$	$-B_2$	$-B_1$	C_2
A_1	C_1	C_2	C_3	0
A_2	$-C_1$	C_2	0	$-D_1$
A_3	0	C_3	$-C_1$	0
A_4	$-C_3$	0	$-C_2$	0
A_5	0	$-C_1$	0	0
B_1	0	0	D_1	0
B_2	$-D_1$	0	0	0
B_3	0	$-D_1$	0	0
B_4	0	D_1	0	0
B_5	0	0	0	0
B_6	0	0	0	0
C_1	0	0	0	0
C_2	0	0	0	0
C_3	0	0	0	0
D_1	0	0	0	0

Tabelle IV.3: Fortsetzung der Strukturkonstanten von T und S

Kapitel V

Implementierung in GAP und Beispiele

V.1 Implementierung in GAP

GAP ist ein Computeralgebrasystem für Rechnungen in diskreter Algebra, siehe [GAP07]. Hier haben wir mithilfe von GAP die irreduziblen Lie-p-Moduln einiger Lie-p-Algebren kleiner Dimensionen (≤ 26) und Charakteristiken berechnet. Der hierfür verwendete Algorithmus beruht auf Lemma III.(3.13). Es wurde zuerst die GAP-MeatAxe benutzt. Da manche Moduln von sehr großer Dimension sind und das Tensorieren der Moduln und Bestimmen der Kompositionsfaktoren mit der MeatAxe sehr viel Zeit in Anspruch nehmen, haben wir zum GAP-Paket „Chop“ [NN07] gewechselt. Dieses Paket verwaltet den Speicher effizienter und verkleinert so die Rechendauer.

MeatAxe Die MeatAxe ist eine Sammlung von Programmen, um Rechnungen mit Matrix-Darstellungen über endlichen Körpern durchzuführen. Für mehr Informationen der diesen Rechnungen zugrunde liegenden Algorithmen siehe beispielsweise [HEO05, Abschnitte 7.4 und 7.5]. Wir möchten hier kurz den Hauptalgorithmus der MeatAxe zur Überprüfung der Einfachheit eines Moduls beschreiben. Man nennt diesen Algorithmus auch den **MeatAxe-Algorithmus**.
Es sei A eine endlich-dimensionale assoziative Algebra über einem endlichen Körper F und $\{x_1,\dots,x_n\}$ eine F-Basis von A. Eine **Matrix-Darstellung** von A der Dimension d ist ein Algebren-Homomorphismus $\mathscr{X}$ von A in die Algebra der $d\times d$-Matrizen über F. Eine solche Darstellung ist durch eine Liste $\Lambda := [\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ von $d\times d$-Matrizen über F mit $\alpha_i = \mathscr{X}(x_i)$ für $1\leq i\leq n$ gegeben. Hiermit wird gleichzeitig eine Operation der Algebra A auf dem (Rechts-)Modul $M = K^d$ definiert. Genauer wird diese Operation gegeben mittels $v.x = v\sum_{i=1}^n a_i\mathscr{X}(x_i)$ für $x=\sum_{i=1}^n a_ix_i\in A$ und $v\in V$. Wir nennen die Matrizen der Liste die **Operationsmatrizen** des Moduls und die von ihnen

erzeugte Algebra heißt die **Matrix-Algebra** des Moduls.
Ist $\Lambda^t := [\alpha_1^t, \dots, \alpha_n^t]$ die Liste der transponierten Operationsmatrizen des A-Moduls M, so ist der zugehörige Modul der zu M **duale Modul** M^*.
Ist L ein Untermodul der Dimension c von M, so ist das **orthogonale Komplement** $L^\perp := \{v \in K^d \mid w \cdot v^t = 0 \; \forall \, w \in L\}$ ein Untermodul der Dimension $d - c$ von M^*.
Wir speichern die Information des Moduls M in einem Datensatz $\mathscr{M}$. Dieser ein Datensatz beinhaltet die folgenden Komponenten: den Grundkörper F, die Dimension des Moduls d und die Liste Λ der Länge n der Operationsmatrizen des Moduls. Wir können zusätzlich auch die Liste Λ^t aufnehmen.
Sei nun M eine A-Modul der Dimension d.

(1.1) Algorithmus (Der MeatAxe-Algorithmus)
Dieser Algorithmus wird im Folgenden im Pseudocode gegeben:

```
1   while true do
2         θ := zufälliges Element der Matrix-Algebra des Moduls M;
3         χ := Charakteristisches Polynom von θ;
4         for π irreduzibler Faktor von χ do
5               ξ := π(θ);
6               N := Kern(ξ);
7               Sei v ∈ N\{0};
8               𝒲 := von v erzeugter Untermodul von M;
9               if dim(W) < d then
10                    ℳ.𝒲 := 𝒲;
11                    return false;
12              elseif deg(π) = dim(N) then
13                    Berechne ℳ.Λ^t := Λ^t, falls noch nicht geschehen;
14                    N_t := Kern(ξ^t);
15                    Sei w ∈ N_t\{0};
16                    𝒲 := von w erzeugter Untermodul von M*;
17                    if dim(W) < d then
18                          Sei w ∈ 𝒲^⊥;
19                          𝒲 := von w erzeugter Untermodul von M;
20                          ℳ.𝒲 := 𝒲;
21                          return false;
22                    ℳ.θ := θ; ℳ.π := π; ℳ.v := v;
23                    return true;
```

Beweis. Zu zeigen: Falls der Algorithmus eine Antwort liefert, ist sie richtig. Das heißt, der Algorithmus liefert „true“, falls der Modul einfach ist, andernfalls liefert er „false“. In Zeile 11 haben wir einen echten nicht-trivialen Untermodul gefunden. In

Zeile 21 fanden wir zunächst einen echten nicht-trivialen Untermodul des dualen Moduls M^*. Das orthogonale Komplement ist somit ein echter nicht-trivialer Untermodul von $(M^*)^* = M$. Somit liefert der Algorithmus nur „false", falls der Modul nicht einfach ist.
Wir nehmen nun an, dass „true" ausgegeben wird. Dieses ist nur dann der Fall, wenn $\deg(\pi) = \dim(N)$ mit $N = \mathrm{Kern}(\xi)$ und $\xi = \pi(\theta)$ ist. Wir nehmen also an, dass $\deg(\pi) = \mathrm{Kern}(N)$ gilt und L ein echter nicht-trivialer Untermodul von L ist.
Da N der Kern von $\xi = \pi(\theta)$ und π irreduzibel ist, muss das Minimalpolynom der Einschränkung $\theta|_N$ von θ auf N gleich dem Polynom π sein. Wegen

$$v.\theta.\xi = v\theta\pi(\theta) = v\pi(\theta)\theta = v.\xi.\theta = 0 \text{ für alle } v \in N$$

und wegen $\dim(N) = \deg(\pi)$ folgt, dass $\theta|_N$ irreduzibel auf N operiert. Betrachte die Unteralgebra B von A, die von θ erzeugt wird. Die Mengen N und L sind also B-Moduln und N ist als B-Modul einfach. Der Untervektorraum $L \cap N$ ist ein B-Untermodul von N. Da N einfach ist, müssen wir also nur zwei Fälle unterscheiden: $L \cap N = 0$ und $L \cap N = N$.
Im Fall $L \cap N = N$ gilt $N \subseteq L$ und der Vektor in Zeile 7 liegt in L. Deswegen wird in Zeile 11 ein nicht-trivialer echter Untermodul gefunden und „false" ausgegeben.
Im Fall $L \cap N = 0$ springen wir also in Zeile 13 des Algorithmus, wo Λ^t und ξ^t berechnet werden. Sei $e_1, \ldots, e_d$ eine Basis von M, so dass $e_1, \ldots, e_c$ eine Basis von L ist. Sei weiter P die $d \times d$-Matrix mit Zeilen $e_1, \ldots, e_d$. Schreiben wir ξ und ξ^t bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_d$, so erhalten wir

$$P\xi P^{-1} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q\xi^t Q^{-1} = \begin{pmatrix} \zeta_1^t & \zeta_2^t \\ 0 & \zeta_3^t \end{pmatrix}$$

mit $Q = (P^{-1})^t$ und $\zeta_1 \in K^{c \times c}$, $\zeta_2 \in K^{(d-c) \times c}$, sowie $\zeta_3 \in K^{(d-c) \times (d-c)}$.
Wegen $L \cap N = 0$ hat die Matrix ζ_1 vollen Rang und es gilt folglich für die Dimensionen $\dim(\mathrm{Kern}(\zeta_3)) = \dim(\mathrm{Kern}(\xi^t))$. Die Matrizen α_i^t, $1 \leq i \leq n$, sind bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_d$ von der Form

$$Q\alpha_i^t Q^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1}^t & \alpha_{i2}^t \\ 0 & \alpha_{i3}^t \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_{i1} \in K^{c \times c}$, $\alpha_{i2} \in K^{(d-c) \times c}$, sowie $\alpha_{i3} \in K^{(d-c) \times (d-c)}$ für $1 \leq i \leq n$, da L ein nicht-trivialer echter Untermodul ist. Der von $\mathrm{Kern}(Q\xi^t Q^{-1})$ erzeugte Modul der Algebra, die durch die Matrizen $Q\alpha_i^t Q^{-1}$ für $1 \leq i \leq n$ definiert wird, ist somit ein echter nicht-trivialer Untermodul. Das heißt, alle Vektoren in $\mathrm{Kern}(\xi^t)$ liegen in einem echten Untermodul von M^* und wir finden einen echten nicht-trivialen Untermodul von M^* in Zeile 16. Ein Element des orthogonalen Komplementes liegt dann in einem echten nicht-trivialen Untermodul von M und in Zeile 21 wird „false" ausgegeben.
Folglich wird also genau dann „true" ausgegeben, wenn es keinen echten nicht-trivialen Untermodul von M gibt. ❑

In GAP wird ein MeatAxe-Modul mittels der Funktion $GModuleByMats(Mats, F)$ erzeugt, wobei $Mats$ eine Liste von Matrizen und F ein endlicher Körper ist. Dieser MeatAxe-Modul ist ein Datensatz mit den Komponenten $generators$, $dimension$ und $field$. Die Komponente $generators$ ist eine Liste von Matrizen, die eine Gruppenoperation auf einem endlichen Zeilenvektorraum definieren. In $dimension$ wird die Dimension dieses Zeilenvektorraums und in $field$ der Grundkörper gespeichert.

GAP-Pakete Das Paket „LieAlgDB" [dGS06] ist eine Datenbank von Lie-Algebren. Aus diesem Paket interessieren uns vor allem die Lie-Algebren, die nicht auflösbar sind. Man erhält sie mit dem Befehl $NonSolvableLieAlgebra(F, pars)$, wobei F ein endlicher Körper und $pars$ eine Liste der Länge 1 bis 4 sind. Mit diesem Befehl erhalten wir Lie-Algebren bis zur Dimension 6, die nicht auflösbar sind.
Mit dem Paket „Chop" [NN07] werden die MeatAxe-Matrizen effizienter gespeichert. Um in diesem Paket mit Moduln rechnen zu können, müssen die Erzeuger G eines Meataxe-Moduls in sogenannte „Cmats" umgewandelt werden. Dann kann ein Chop-Modul mit der Funktion $Module$ erzeugt werden. Die darstellenden Matrizen erhält man mittels der Funktion $RepresentingMatrices$. In dem Paket „Chop" ist eine Funktion $Chop$ eingebunden, welche die Kompositionsfaktoren eines Moduls berechnet. Wendet man diese Funktion auf ein Chop-Modul an, so erhält man einen Datensatz. Die für unsere Berechnung wichtigen Komponenten sind db und $mult$. Die Komponente db gibt alle Kompositionsfaktoren (bis auf Isomorphie) mit der Eigenschaft irreduzibel oder absolut irreduzibel an, $mult$ ihre Vielfachheit in einer Kompositionsreihe. Übergibt man der Funktion zusätzlich eine Liste von irreduziblen Moduln, so gibt db eine um die neu erhaltenen Kompositionsfaktoren erweiterte Liste aus. Den Sockel eines Chop-Moduls erhält man mittels $SocleOfModule$.
Das Paket „FinLie" [Eic05] wurde uns freundlicherweise zur Verfügung gestellt, obwohl es sich noch in der Entwicklungsphase befindet. Es enthält einige bekannte modulare Lie-Algebren der Charakteristik 2, sowie eine Methode zur Berechnung aller irreduziblen Darstellungen von Lie-Algebren positiver Charakteristik. Diese Methode konnte jedoch nicht verwendet werden, da einige Probleme bei der Berechnung auftraten.

Lie-Algebren Eine Reihe von Lie-Algebren sind in GAP bereits vorhanden. Die Funktion $SimpleLieAlgebra(T, l, F)$ erstellt die einfache Lie-Algebra vom Typ T und vom Rang l über dem Körper F. Als Typen lassen sich $A, B, C, D, E, F, G, W, S, H$ und K wählen. Damit erhalten wir die klassischen Lie-Algebren über einem beliebigen Körper F mit den Wurzelsystemen A_l bis G_l, wobei l eine natürliche Zahl ist. Für die Jacobson-Witt-Algebra wählt man $T = W$, $l = \underline{m}$ für ein $m \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$ und einen Körper F der Charakteristik $p > 0$; für die Spezielle Algebra $T = S$, $l = \underline{m}$ für ein $m \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$ und einen Körper F der Charakteristik $p > 0$; für die Hamilton-Algebra $T = H$, $l = \underline{m}$ für ein $m \in \mathbb{N}^{2r}$, $r \in \mathbb{N}$ und einen Körper F der Charakteristik $p > 2$; und

schließlich für die Kontakt-Algebra $T = K$, $l = \underline{m}$ für ein $m \in \mathbb{N}^{2r+1}$, $r \in \mathbb{N}$ und einen Körper F der Charakteristik $p > 2$.
Mit dem Paket „FinLie“ [Eic05] erhalten wir die verwendeten Lie-Algebren der Charakteristik 2.
Das Paket „LieAlgDB “ enthält diverse Lie-Algebren wie zum Beispiel $sl(2,p)$.
Um mit den Lie-Algebren S und T aus IV.(7.1) in GAP rechnen zu können, haben wir die Strukturkonstanten bestimmt, siehe Tabellen IV.2 und IV.3. In GAP erzeugt man eine Lie-Algebra durch ihre Strukturkonstanten mithilfe der Funktion $LieAlgebraByStructureConstants(F,SCT)$. Hierbei ist F der Grundkörper und SCT eine Tabelle von Strukturkonstanten. Ist $x_1,\dots,x_n$ die gewählte Basis der Lie-Algebra, so übergibt man dieser Tabelle nun für alle $1 \leq i,j \leq n$ jedes a_{ijk} mit $[x_i,x_j] = \sum_{k=1}^n a_{ijk}x_k$. Wegen $[x,y] = -[y,x]$ für alle Elemente x,y einer Lie-Algebra, handelt es sich hier um eine antisymmetrische Tabelle. Dieses kann in GAP als Eigenschaft der Tabelle hinzugefügt werden. Trägt man nun a_{ijk} in die Tabelle ein, so wird ebenso $a_{jik} = -a_{ijk}$ hinzugefügt und man braucht nur $1 \leq i < j \leq n$ zu betrachten. Haben wir die Tabelle fertig, so vergewissern wir uns mittels $TestJacobi(SCT)$, dass die Jacobi-Identität gilt. Nun können wir die Lie-Algebra mit dem Befehl $LieAlgebraByStructureConstants$ erzeugen.
Zusätzlich vergewisserten wir uns noch mithilfe von $IsRestrictedLieAlgebra$, ob die ausgewählten Lie-Algebren auch in GAP als Lie-p-Algebren erkannt werden.

Sei im Folgenden L eine endlich-dimensionale Lie-p-Algebra der Dimension n über einem Körper F der Charakteristik $p > 0$ und $\{x_1,\dots,x_n\}$ eine Basis von L.

Moduln In GAP werden Moduln durch die zugehörige Matrixdarstellung definiert. Die Darstellung $\mathscr{X} : L \to \mathfrak{gl}_m(F)$, $m \in \mathbb{N}$, ist durch $\{\mathscr{X}(x_1),\dots,\mathscr{X}(x_n)\}$ eindeutig bestimmt. Deswegen müssen für die Moduln lediglich diese Matrizen gespeichert werden.
In GAP sind die meisten Moduln Rechtsmoduln. Das macht bei Lie-Algebren wegen der Hopf-Algebren-Eigenschaft der universell einhüllenden Algebra keinen Unterschied im Vergleich zu Linksmoduln. Denn ist M ein Linksmodul mit der Modul-Operation $x.v$ für $x \in L$ und $v \in M$, so definiert M^S ein Rechtsmodul durch $v.x = S(x).v$ für $x \in L$, $v \in M$. Die Abbildung S definiert somit eine Bijektion zwischen Links- und Rechtsmoduln der universell einhüllenden Algebra, also der Lie-Algebra. Analog definiert S_p eine Bijektion zwischen Links- und Rechts-Moduln der universell p-einhüllenden Algebra, und folglich eine Bijektion zwischen den Links-p-Moduln und Rechts-p-Moduln.
Da wir hier jedoch nur mit dem in GAP implementierten treuen Modul $FaithfulModule$ arbeiten, der auch in GAP von links operiert, brauchen wir die Rechtsoperation nicht weiter zu beachten. Da die verwendeten Lie-Algebren alle ein triviales Zentrum

besitzen, ist der adjungierte Modul treu.
Für L erzeugen wir zunächst einen treuen Modul V mittels $FaithfulModule(L)$. Diesen wandeln wir in einen MeatAxe-Modul um. Dazu brauchen wir eine Basis von V, sowie eine Basis G der Lie-Algebra. Wir berechnen die Operationsmatrizen M der Operation von x auf V für jedes x aus G und hieraus den zu V gehörigen MeatAxe-Modul W. Wie bereits erwähnt, sind die Rechnungen mit dem Paket „Chop“ schneller. Deshalb wandeln wir die darstellenden Matrizen nun in „CMats“ um und erzeugen anschließend den zugehörigen Chop-Modul. Das heißt, der Chop-Modul ist ein Modul der assoziativen Algebra $\mathscr{U}(L)$. Dieser entspricht jedoch dem Modul V der Lie-Algebra nach Bemerkung III.(1.4).

Tensor-Produkt Haben wir zwei Moduln V,W mit zugehörigen Darstellungen $\mathscr{X} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}_r(F)$ beziehungsweise $\mathscr{Y} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}_s(F)$ der Dimension r beziehungsweise s, dann sind die Moduln durch $\{\mathscr{X}(x_1),\dots,\mathscr{X}(x_n)\}$ und $\{\mathscr{Y}(x_1),\dots,\mathscr{Y}(x_n)\}$ eindeutig bestimmt. Nach III.(3.2)(*) ist die Operation von L auf dem Tensorprodukt $V \otimes W$ via Δ gegeben, das heißt, für $a \in L$, $v \in V$ und $w \in W$ gilt

$$a.(v \otimes w) = \Delta(a)(v \otimes w) = (a \otimes 1 + 1 \otimes a)(v \otimes w) = a.v \otimes w + v \otimes a.w$$

für Δ aus II.(5.3). Das Tensor-Produkt wird somit über die Formel

$$\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}(x) = \mathscr{X}(x) * E_r + E_s * \mathscr{Y}(x)$$

berechnet, wobei $*$ das Kronecker-Produkt der Matrizen bezeichnet. Folglich wird das Tensor-Produkt der Moduln durch

$$\{\mathscr{X}(x_1) * E_r + E_s * \mathscr{Y}(x_1),\dots,\mathscr{X}(x_n) * E_r + E_s * \mathscr{Y}(x_n)\}$$

charakterisiert. Haben wir die zu $\mathscr{X}$ und $\mathscr{Y}$ gehörigen Moduln V und W mit dem Paket „Chop“ erzeugt, so erhalten wir die zugehörigen Matrixdarstellungen $[\mathscr{X}(x_1),\dots,\mathscr{X}(x_n)]$ mittels $RepresentingMatrices(V)$. Analog bekommen wir diese für W. Da das Kronecker-Produkt für Matrizen in GAP bereits mit dem Befehl $KroneckerProduct$ eingebunden ist, können wir nun die Matrizen $\mathscr{X}(x_1) * E_r + E_s * \mathscr{Y}(x_1),\dots,\mathscr{X}(x_n) * E_r + E_s * \mathscr{Y}(x_n)$ in GAP berechnen und mit diesen Matrizen den Modul $V \otimes W$ als Chop-Modul erzeugen.

Irreduzible Lie-p-Moduln Zur Berechnung der irreduziblen Lie-p-Moduln wird zunächst ein treuer Modul erzeugt (siehe Abschnitt Moduln), mit sich selbst tensoriert (siehe Abschnitt Tensor-Produkt) und seine Kompositionsfaktoren mittels der Funktion $Chop$ berechnet. Diese werden erneut untereinander tensoriert und die Kompositionsfaktoren mit der Funktion $Chop$ unter Eingabe der schon erhaltenen irreduziblen Moduln berechnet. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt, bis keine neuen Moduln hinzukommen, also sich die Länge der Liste db im Datensatz von $Chop$ nicht mehr vergrößert. Nach Lemma III.(3.13) haben wir mit dann alle irreduziblen Lie-p-Moduln erhalten.

Absolute Irreduzibilität Eine Darstellung ist absolut irreduzibel, wenn sie bei jeder Erweiterung des Grundkörpers irreduzibel bleibt. Die Funktion „Chop“ gibt diese Eigenschaft zu jeder Darstellung zusätzlich aus.

Halbeinfache Moduln Ob ein Modul halbeinfach ist, kann man am Sockel des Moduls erkennen. Dieser ist definiert als die Summe aller minimalen Untermoduln des Moduls. Ist der Sockel gleich dem Modul, so ist dieser halbeinfach. Ist V ein Chop-Modul, so kann man den Sockel mit der Funktion $SocleOfModule(V, Mods)$ bestimmen, wobei $Mods$ eine Liste von gegebenenfalls auftretenden Untermoduln ist. Wir benutzen für $Mods$ die zuvor berechnete Liste aller irreduziblen L-Moduln. In dem Datensatz von $SocleOfModule(V, Mods)$ ist eine Basis für den Sockel angegeben. Diese wird mithilfe einer Matrix angegeben. Ist diese Matrix nicht quadratisch, so hat der Sockel des Moduls eine kleinere Dimension als der Modul selbst und damit ist der Modul nicht halbeinfach. Ist die Matrix quadratisch, so hat der Sockel des Moduls die gleiche Dimension wie der Modul selbst und der Modul ist halbeinfach.

Dualer Modul und Isomorphie Wie in Beispiel III.(2.4) gesehen, kann man den dualen Modul eines Moduls berechnen. Dazu berechnet man zu jeder darstellenden Matrix $\mathscr{X}(x_i)$ des Moduls die Matrix $\mathscr{Y}(x_i) = -\mathscr{X}(x_i)^t$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann ist der duale Modul durch $\mathscr{Y}(x_1), \ldots, \mathscr{Y}(x_n)$ eindeutig bestimmt und wir können so den dualen Modul als Chop-Modul in GAP berechnen. Im Paket „Chop“ ist eine Funktion eingebunden, mit der man Moduln auf Isomorphie testen kann. Es wurde also zuerst der duale Modul eines berechneten p-Moduls bestimmt und danach auf Isomorphie mit den p-Moduln gleicher Dimension getestet.

Die irreduziblen Moduln der folgenden Lie-p-Algebren wurden berechnet:

1. Klassische Lie-Algebren: $\mathfrak{sl}(2, p)$, $p = 3, 5, 7$.

2. Jacobson-Witt-Algebren: $W(2, \underline{1})$ und $W(3, \underline{1})$ in Charakteristik 2, sowie $W(2, \underline{1})$ in Charakteristik 3.

3. Spezielle Algebra: $S(3, \underline{1})$ in Charakteristik 2.

4. Hamilton-Algebren: $H(2, \underline{1})$ in Charakteristik 3 und $H(4, \underline{1})$ in Charakteristik 2.

5. Kontakt-Algebra: $K(3, \underline{1})$ in Charakteristik 3.

6. Die Lie-p-Algebren S und T aus IV.(7.1) in Charakteristik 3.

Zu jeder Lie-Algebra wurden zwei Tabellen erstellt. Die erste Tabelle gibt die Darstellungen mit ihrer Dimension und der dualen Darstellung an. In der zweiten werden die Kompositionsfaktoren des Tensorproduktes jeder Darstellung mit ihrer dualen Darstellung genannt, sowie die Eigenschaft, ob dieses Tensorprodukt halbeinfach ist. Für die klassischen Lie-Algebren $\mathfrak{sl}(2,p)$ wurde zusätzlich eine Tabelle angefertigt, die die Darstellungen über ihre Matrizen beschreibt.

V.2 Die irreduziblen Moduln

Sei F ein Körper mit $\mathrm{char}(F) = p \neq 0$. Die Basis von $\mathfrak{sl}(2,p)$ ist gegeben durch $x = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ und $h = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{pmatrix}$. Dann sind die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,p)$:

Darstellung	Dimension	$\varphi_{i,p}(x)$	$\varphi_{i,p}(y)$	$\varphi_{i,p}(h)$
$\varphi_{1,p}$	1	0	0	0
$\varphi_{2,p}$	2	x	y	h
$\varphi_{3,3}$	3	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$
$\varphi_{3,5}$	3	$\begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{pmatrix}$
$\varphi_{4,5}$	4	$\begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2 & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -2 \end{pmatrix}$
$\varphi_{5,5}$	5	$\begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \end{pmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabelle V.1: Die irreduziblen p-Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,p)$

Darstellung	Dimension	absolut irreduzibel
$\varphi_{1,p}$	1	ja
$\varphi_{2,p}$	2	ja
$\varphi_{3,3}$	3	ja
$\varphi_{3,5}$	3	ja
$\varphi_{4,5}$	4	ja
$\varphi_{5,5}$	5	ja
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabelle V.2: Die irreduziblen p-Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,p)$

Die berechneten p-Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,p)$ sind jeweils selbstdual.

	Kompositionsfaktoren mit Vielfachheit						halbeinfach
	$\varphi_{1,p}$	$\varphi_{2,p}$	$\varphi_{3,p}$	$\varphi_{4,p}$	$\varphi_{5,p}$	$\dots$	
$\varphi_{1,p} \otimes \varphi_{1,p}$	1	0	0				ja
$\varphi_{2,p} \otimes \varphi_{2,p}$	1	0	1				ja
$\varphi_{3,3} \otimes \varphi_{3,3}$	2	2	1				nein
$\varphi_{3,5} \otimes \varphi_{3,5}$	1	0	1	0	1		ja
$\varphi_{4,5} \otimes \varphi_{4,5}$	1	2	2	0	1		ja
$\varphi_{5,5} \otimes \varphi_{5,5}$	2	2	2	2	1		nein
$\vdots$			$\vdots$				

Tabelle V.3: Überprüfung der Chevalley-Eigenschaft von $\mathfrak{sl}(2,p)$

Die Tabellen V.1, V.2 und V.3 sind so zu verstehen, dass die Menge der irreduziblen p-Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,p)$ die Menge $\{\varphi_{i,p} \mid 1 \le i \le p\}$ für $p > 2$ ist. Für $p = 2$ ist die adjungierte Darstellung nicht irreduzibel und nicht treu, weil $\mathfrak{sl}(2,2)$ nicht einfach ist.

Sei F ein Körper der Charakteristik 2. Dann hat $W(2,\underline{1})$ die Dimension 8.

Darstellung	Dimension	absolut irreduzibel
φ_1	1	ja
φ_2	3	ja
φ_3	3	ja
φ_4	8	ja

Tabelle V.4: Die p-Moduln von $W(2,\underline{1})$ in Charakteristik 2

Die Darstellungen φ_1 und φ_4 sind selbstdual. Es ist $\varphi_2^* = \varphi_3$ und umgekehrt.

	Kompositionsfaktoren mit Vielfachheit				halbeinfach
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	
$\varphi_1 \otimes \varphi_1$	1	0	0	0	ja
$\varphi_2 \otimes \varphi_3$	1	0	0	1	ja
$\varphi_4 \otimes \varphi_4$	12	6	6	2	nein

Tabelle V.5: Überprüfung der Chevalley-Eigenschaft von $W(2,\underline{1})$ in Charakteristik 2

Die Lie-Algebra $W(3,\underline{1})$ hat die Dimension 24.

Darstellung	Dimension	absolut irreduzibel
φ_1	1	ja
φ_2	7	ja
φ_3	7	ja
φ_4	14	ja
φ_5	24	ja
φ_6	24	ja
φ_7	64	ja
φ_8	64	ja

Tabelle V.6: Die p-Moduln von $W(3,\underline{1})$ in Charakteristik 2

Die Paare (φ_2,φ_3), (φ_5,φ_6) und (φ_7,φ_8) sind jeweils dual zueinander. Die übrigen berechneten Darstellungen sind selbstdual.

	Kompositionsfaktoren mit Vielfachheit								halbeinfach
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	
$\varphi_1 \otimes \varphi_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	ja
$\varphi_2 \otimes \varphi_3$	1	0	0	0	1	1	0	0	nein
$\varphi_4 \otimes \varphi_4$	16	6	6	0	2	2	0	0	nein
$\varphi_5 \otimes \varphi_6$	32	10	10	6	4	4	1	1	nein
$\varphi_7 \otimes \varphi_8$	240	72	72	48	24	24	8	8	nein

Tabelle V.7: $W(3,\underline{1})$ in einem Körper der Charakteristik 2

Sei F ein Körper der Charakteristik 3. Dann hat $W(2,\underline{1})$ die Dimension 18.

Darstellung	Dimension	absolut irreduzibel
φ_1	1	ja
φ_2	8	ja
φ_3	8	ja
φ_4	9	ja
φ_5	18	ja
φ_6	18	ja
φ_7	27	ja
φ_8	27	ja
φ_9	27	ja

Tabelle V.8: Die p-Moduln von $W(3,\underline{1})$ in Charakteristik 3

Die Paare (φ_2, φ_3), (φ_5, φ_6) und (φ_7, φ_8) sind jeweils dual zueinander. Die übrigen berechneten Darstellungen sind selbstdual.

	Kompositionsfaktoren mit Vielfachheit									halbeinfach
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	
$\varphi_1 \otimes \varphi_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	ja
$\varphi_2 \otimes \varphi_3$	1	0	0	0	1	1	0	0	1	nein
$\varphi_4 \otimes \varphi_4$	2	1	1	0	1	1	0	0	1	nein
$\varphi_5 \otimes \varphi_6$	10	5	5	2	3	3	1	1	2	nein
$\varphi_7 \otimes \varphi_8$	24	12	12	6	6	6	3	3	3	nein
$\varphi_9 \otimes \varphi_9$	24	12	12	6	6	6	3	3	3	nein

Tabelle V.9: Überprüfung der Chevalley-Eigenschaft von $W(2, \underline{1})$ in Charakteristik 3

Die Spezielle Algebra $S(3, \underline{1})$ über einem Körper der Charakteristik 2 hat die Dimension 14.

Darstellung	Dimension	absolut irreduzibel
φ_1	1	ja
φ_2	6	ja
φ_3	14	ja
φ_4	64	ja

Tabelle V.10: Die irreduziblen p-Darstellungen von $S(3, \underline{1})$ in Charakteristik 2

Die berechneten Darstellungen sind jeweils selbstdual.

	Kompositionsfaktoren mit Vielfachheit				halbeinfach
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	
$\varphi_1 \otimes \varphi_1$	1	0	0	0	ja
$\varphi_2 \otimes \varphi_2$	8	0	2	0	nein
$\varphi_3 \otimes \varphi_3$	44	16	4	0	nein
$\varphi_4 \otimes \varphi_4$	576	192	96	16	nein

Tabelle V.11: Überprüfung der Chevalley-Eigenschaft von $S(3, \underline{1})$ in Charakteristik 2

Die Hamilton-Algebra $H(4,\underline{1})$ über einem Körper der Charakteristik 2 hat die Dimension 14.

Darstellung	Dimension	absolut irreduzibel
φ_1	1	ja
φ_2	6	ja
φ_3	14	ja
φ_4	64	ja

Tabelle V.12: Die irreduziblen p-Darstellungen von $H(4,\underline{1})$ in Charakteristik 2

Die berechneten Darstellungen sind jeweils selbstdual.

	Kompositionsfaktoren mit Vielfachheit				halbeinfach
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	
$\varphi_1 \otimes \varphi_1$	1	0	0	0	ja
$\varphi_2 \otimes \varphi_2$	8	0	2	0	nein
$\varphi_3 \otimes \varphi_3$	44	16	4	0	nein
$\varphi_4 \otimes \varphi_4$	576	192	96	16	nein

Tabelle V.13: Überprüfung der Chevalley-Eigenschaft von $H(4,\underline{1})$ in Charakteristik 2

Die Hamilton-Algebra $H(2,1)$ über einem Körper der Charakteristik 3 hat die Dimension 7.

Darstellung	Dimension	absolut irreduzibel
φ_1	1	ja
φ_2	7	ja
φ_3	27	ja

Tabelle V.14: Die irreduziblen p-Darstellungen von $H(2,\underline{1})$ in Charakteristik 3

Die berechneten Darstellungen sind jeweils selbstdual.

	Kompositionsfaktoren mit Vielfachheit			halbeinfach
	φ_1	φ_2	φ_3	
$\varphi_1 \otimes \varphi_1$	1	0	0	ja
$\varphi_2 \otimes \varphi_2$	8	2	1	nein
$\varphi_3 \otimes \varphi_3$	108	54	9	nein

Tabelle V.15: Überprüfung der Chevalley-Eigenschaft von $H(2,\underline{1})$ in Charakteristik 3

Die Kontakt-Algebra $K(3,\underline{1})$ über einem Körper der Charakteristik 3 hat die Dimension 26.

Darstellung	Dimension	absolut irreduzibel
φ_1	1	ja
φ_2	25	ja
φ_3	26	ja
φ_4	26	ja
φ_5	27	ja
φ_6	54	ja
φ_7	81	ja
φ_8	81	ja
φ_9	81	ja

Tabelle V.16: Die irreduziblen p-Darstellungen von $K(3,\underline{1})$ in Charakteristik 3

Die Paare (φ_3,φ_4) und (φ_7,φ_8) sind jeweils dual zueinander. Die übrigen berechneten Darstellungen sind selbstdual.

	Kompositionsfaktoren mit Vielfachheit									halbeinfach
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	
$\varphi_1\otimes\varphi_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	ja
$\varphi_2\otimes\varphi_2$	12	0	4	4	2	2	1	1	1	nein
$\varphi_3\otimes\varphi_4$	15	4	3	3	2	2	1	1	1	nein
$\varphi_5\otimes\varphi_5$	16	4	4	4	2	2	1	1	1	nein
$\varphi_6\otimes\varphi_6$	64	16	16	16	8	8	4	4	4	nein
$\varphi_7\otimes\varphi_8$	144	36	36	36	18	18	9	9	9	nein
$\varphi_9\otimes\varphi_9$	144	36	36	36	18	18	9	9	9	nein

Tabelle V.17: $K(3,\underline{1})$ in einem Körper der Charakteristik 3

Die Lie-Algebra S aus IV.(7.1) hat die Dimension 10.

Darstellung	Dimension	absolut irreduzibel
φ_1	1	ja
φ_2	8	ja
φ_3	8	ja
φ_4	10	ja
φ_5	25	ja
φ_6	27	ja
φ_7	27	ja
φ_8	54	ja
φ_9	54	ja

Tabelle V.18: Die irreduziblen p-Darstellungen der Lie-p-Algebra S aus IV.(7.1)

Die berechneten Darstellungen sind jeweils selbstdual.

	Kompositionsfaktoren mit Vielfachheit									halbeinfach
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	
$\varphi_1 \otimes \varphi_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	ja
$\varphi_2 \otimes \varphi_2$	1	0	2	2	0	1	0	0	0	nein
$\varphi_3 \otimes \varphi_3$	1	2	0	2	0	0	1	0	0	nein
$\varphi_4 \otimes \varphi_4$	1	0	0	2	1	1	1	0	0	nein
$\varphi_5 \otimes \varphi_5$	16	10	10	10	1	2	2	2	2	nein
$\varphi_6 \otimes \varphi_6$	20	10	10	10	5	2	2	2	2	nein
$\varphi_7 \otimes \varphi_7$	20	10	10	10	5	2	2	2	2	nein
$\varphi_8 \otimes \varphi_8$	80	40	40	40	20	8	8	8	8	nein
$\varphi_9 \otimes \varphi_9$	80	40	40	40	20	8	8	8	8	nein

Tabelle V.19: Die Darstellungen der Lie-Algebra S aus IV.(7.1)

Die Lie-Algebra T aus IV.(7.1) hat die Dimension 18.

Darstellung	Dimension	absolut irreduzibel
φ_1	1	ja
φ_2	8	ja
φ_3	18	ja
φ_4	18	ja
φ_5	25	ja
φ_6	27	ja
φ_7	54	ja
φ_8	81	ja
φ_9	81	ja

Tabelle V.20: Die irreduziblen p-Darstellungen der Lie-p-Algebra T aus IV.(7.1)

Die Paare (φ_3, φ_4) und (φ_8, φ_9) sind jeweils dual zueinander. Die übrigen berechneten Darstellungen sind selbstdual.

	Kompositionsfaktoren mit Vielfachheit									halbeinfach
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	
$\varphi_1 \otimes \varphi_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	ja
$\varphi_2 \otimes \varphi_2$	1	0	1	1	0	1	0	0	0	nein
$\varphi_3 \otimes \varphi_4$	6	4	2	2	1	1	0	1	1	nein
$\varphi_5 \otimes \varphi_5$	16	10	5	5	1	2	2	1	1	nein
$\varphi_6 \otimes \varphi_6$	20	10	5	5	5	2	2	1	1	nein
$\varphi_7 \otimes \varphi_7$	80	40	20	20	20	8	8	4	4	nein
$\varphi_8 \otimes \varphi_9$	180	90	45	45	45	18	18	9	9	nein

Tabelle V.21: Die Darstellungen der Lie-Algebra T aus IV.(7.1)

V.3 Auswertung

Dem aufmerksamen Leser fällt auf, dass sich bei $S(3,\underline{1})$ und $H(4,\underline{1})$ in Charakteristik 2 die Dimensionen der p-Moduln entsprechen, siehe Tabelle V.10 und V.12. Selbst die Tensor-Produkte der p-Darstellungen mit ihren dualen Darstellungen haben gleiche Kompositionsfaktoren, siehe Tabelle V.11 und V.13.

Lie-p-Algebra	Charakteristik	Dimension	irreduzible p-Darstellungen mit p-Potenz-Dimension
$\mathfrak{sl}(2,3)$	3	3	3^1
$\mathfrak{sl}(2,5)$	5	3	5^1
$W(2,\underline{1})$	2	8	2^3
$W(3,\underline{1})$	2	24	2^6
$W(2,\underline{1})$	3	18	3^2 und dreimal 3^3
$S(3,\underline{1})$	2	14	2^6
$H(4,\underline{1})$	2	14	2^6
$H(2,\underline{1})$	3	7	3^3
$K(3,\underline{1})$	3	26	3^4
S aus IV.(7.4)	3	10	3^3 und dreimal 3^4
T aus IV.(7.4)	3	18	3^3 und zweimal 3^4

Tabelle V.22: Überprüfte Lie-p-Algebren und die maximale Dimension ihrer irreduziblen p-Darstellungen

Wie wir sehen, gibt es für alle überprüften Lie-p-Algebren eine irreduzible p-Darstellung der Dimension p^m für ein $m \in \mathbb{N}$; siehe Tabelle V.22. Da das Tensorprodukt einer solchen Darstellung mit ihrer dualen Darstellung nach III.(5.12) nie halbeinfach ist, hat keine der überprüften Lie-p-Algebren die Chevalley-Eigenschaft. Die Frage ist nun, ob es immer eine solche Darstellung mit p-Potenz-Dimension gibt. Die Antwort auf diese Frage ist für kleine Charakteristiken ($p < 7$) vermutlich noch nicht bekannt.

Desweiteren ist nach Korollar III.(4.12), falls L eine Lie-p-Algebra ist, $p^{\frac{1}{2}\dim L/Z(L)}$ eine obere Schranke für die Dimension einer irreduziblen Darstellung, also auch eine obere Schranke für die Dimension einer irreduziblen p-Darstellung. Für die überprüften Lie-p-Algebren ist die maximale Dimension einer p-Darstellung jedoch kleiner als $p^{\frac{1}{2}\dim L/Z(L)}$. Hier stellt sich nun die Frage, ob man diese Schranke verbessern kann.

Ein weiteres Problem ist der benötigte Speicherplatz. Um für weitere Lie-p-Algebren, die eine größere Dimension beziehungsweise eine größere Charakteristik haben, die irreduziblen p-Darstellungen zu berechnen, bräuchten wir viel Speicherplatz. Zum Beispiel haben wir versucht, die irreduziblen p-Darstellung der Lie-p-Algebra $H(2,\underline{1})$ in Charakteristik 5 zu berechnen. Diese Lie-p-Algebra hat die Dimension 23. Wir bekamen eine irreduzible p-Darstellung der Dimension 125. Um das Tensorprodukt dieser Darstellung mit sich selbst zu berechnen, bräuchten wir Speicherplatz für 23 (15625×15625)-Matrizen in Charakteristik 5. Für diese Rechnung wären in GAP mindestens $2,875$ GB Arbeitsspeicher erforderlich.
Insgesamt kann man aber sagen, dass die in dieser Arbeit entwickelte Methode zur Berechnung der p-Darstellungen von Lie-p-Algebren gut in die Praxis umsetzbar ist.

Literaturverzeichnis

[AF92] F.W. Anderson und K.R. Fuller. *Rings and categories of modules*. Springer-Verlag, New York, zweite Auflage, 1992. III.(3.8)

[Ben75] D.J. Benson. *Representations and Cohomology*, Band 1. Cambrigde University Press, 1975. III.(5.12)

[Bou60] N. Bourbaki. *Eléments de Mathématique XXVI: Groupes et Algèbres de Lie, Chapitre 1, Algèbres de Lie*. Number 1285 in Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, 1960. III.(5.8), III.(5.11)

[Bro95] G. Brown. Families of simple Lie algebras of characteristic two. *Comm. Algebra*, 23:941–954, 1995. I.1

[BW98] R. Block und R. Wilson. Classification of Restricted Simple Lie Algebras. *J. Algebra*, 114:115–259, 1998. I.1, IV.(6.5)

[Dem70] S.P. Demushkin. Cartan subalgebras of simple Lie p-Algebras W_n and S_n. *Siberian Math. J.*, 11(2):233–244, 1970. IV.(7.2)

[dGS06] W. de Graaf und C. Schneider. LieAlgDB, a database of lie algebras, Version 1.0. `http://www.sztaki.hu/~schneider/Research/LieAlgDB/`, Oct 2006. Refereed GAP package. V.(1.1)

[Eic05] B. Eick. FinLie, computation with finite lie algebras, Version 1.0. noch nicht erschienen, Mar 2005. GAP package. V.(1.1), V.(1.1)

[FK98] J. Feldvoss und L. Klingler. Tensor Powers and Projective Modules for Hopf Algebras. *Canadian Mathematical Society, Conference Proceedings*, 24:195–202, 1998. III.3, III.(3.11)

[Fra73] M. Frank. A new simple algebra of characteristic three. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 38(1):43–46, 1973. IV.7

[GAP07] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.10*, 2007. I.1, III.(2.5), V.1

[HEO05] D.F. Holt, B. Eick und Eamonn A. O'Brien. *Handbook of computational group theory*. Chapman and Hall/CRC, London, 2005. V.1

[Hum72] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer–Verlag, 1972. II.1, II.(1.7), II.(1.9), II.(1.11), II.(1.12), II.(1.17), II.2

[Jac62] N. Jacobson. *Lie Algebras*. Interscience, New York, 1962. III.(5.10)

[Kun79] E. Kunz. Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie. Band 46 aus *Vieweg-Studium: Aufbaukurs Mathematik*. 1979. III.(4.3), 1

[Kuz91] M.I. Kuznetsov. The Melikyan algebras as Lie algebras of type G_2. *Comm. Algebra*, 19:1281–1312, 1991. IV.5

[LS69] R.G. Larson und M.E. Sweedler. An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras. *Amer. J. Math*, 91:75–91, 1969. III.(5.3)

[Mol76] R.K. Molnar. A semidirect product decomposition for certain Hopf Algebras over an algebraically closed field. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 59:29–32, 1976. III.(5.11)

[Mol81] R.K. Molnar. Tensor products and semisimple modular representations of finite groups and restricted Lie algebras. *Rocky Mountain J. of Math.*, 11:581–591, 1981. III.5

[NN07] M. Neuenhoeffer und F. Noeske. Chop, chop - new and improved, Version 0.1. wird erscheinen in `http://www-groups.mcs.st-and.ac.uk/~neunhoef/Computer/Software/Gap/chop.html`, Apr 2007. GAP package. V.1, V.(1.1)

[Pie82] R.S. Pierce. *Associative Algebras*, Band 88. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982. 1

[PQ95] D.S. Passman und D. Quinn. Burnside's Theorem for Hopf Algebras. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 123(2):327–333, 1995. III.(3.11)

[PS06] A. Premet und H. Strade. Classification of finite dimensional simple lie algebras in prime characteristics, 2006. I.1, IV, IV.(6.6), IV.(6.7)

[Rie67] M.A. Rieffel. Burnside's Theorem for Representations of Hopf Algebras. *Journal of Algebra*, 6:123–130, 1967. III.(3.11)

[Rot79] J.J. Rotman. *An introduction to homological algebra.* Pure and Applied Mathematics, 85. New York-San Francisco-London: Academic Press. XI, 376 p., 1979. III.(3.8)

[SF88] H. Strade und R. Farnsteiner. *Modular Lie Algebras and Their Representations*. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1988. II.3, II.(3.3), II.(3.7), II.(3.11), II.4, II.(4.2), II.6, III.4, 1, 2, 2, 3, IV, 3

[Skr92] S.M. Skryabin. New series of simple Lie algebras of characteristic 3. *Ross. Akad. Nauk Mat. Sb.*, 183:3–22, 1992. I.1

[Str04] H. Strade. *Simple Lie Algebras over Fields of Positive Characteristic*, Band 1. Walter de Gruyter, 2004. II.(3.10)

[Wil80] R. Wilson. The Classification Problem for Simple Lie Algebras of Characteristic p. In Springer, Herausgeber, *Algebra Carbondale 1980*, Band 848 aus *Lecture Notes in Mathematics*, Seiten 13–23. 1980. I.1