Multiplikationsgruppen von Quasigruppen

von
Sebastian Michael Köhler

DIPLOMARBEIT

in Mathematik

vorgelegt der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
März 2007

Angefertigt am
Lehrstuhl D für Mathematik
bei
Professor Dr. G. Hiß

Inhaltsverzeichnis

Programmverzeichnis

Vorwort

And the earth becomes my throne
I adapt to the unknown
Under wandering stars I've grown
By myself but not alone
I ask no one

And my ties are severed clean
The less I have the more I gain
Off the beaten path I reign
Rover, wanderer, nomad, vagabond
Call me what you will

But I'll take my time anywhere
I'm free to speak my mind anywhere
And I'll never mind anywhere
Anywhere I roam
Where I lay my head is home.

Aus *Wherever I May Roam*
von James Hetfield und Lars Ulrich.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit endlichen Quasigruppen, d. h. mit endlichen Mengen Q, auf denen eine binäre Verknüpfung derart definiert ist, dass jedes Element von Q sowohl in jeder Zeile als auch in jeder Spalte der Verknüpfungstafel genau einmal erscheint. Insbesondere ist also jede endliche Gruppe eine solche Quasigruppe. Da die Theorie der endlichen Gruppen viel weiter fortgeschritten ist als diejenige der Quasigruppen, erscheint es nur statthaft, Verbindungen zwischen diesen beiden algebraischen Strukturen zu untersuchen, um aus der Kenntnis gewisser Gruppen ein möglichst umfassendes Bild der Struktur von Quasigruppen zu erhalten. Nun gibt es natürlich diverse Möglichkeiten, derlei Verbindungen zu konstruieren, sodass für diese Arbeit eine Auswahl getroffen werden musste. Da in jeder Zeile und Spalte der Verknüpfungstafel einer Quasigruppe Q jedes Element genau einmal auftritt, lassen sich alle Zeilen und Spalten auch als Permutationen der S_Q, der symmetrischen Gruppe auf der Menge Q, auffassen. Die von all diesen Permutationen erzeugte Untergruppe der $S_Q \cong S_{|Q|}$ heißt die Multiplikationsgruppe von Q. Man sieht leicht, dass diese transitiv auf Q operiert und es drängt sich zuallererst die Frage auf, welche endlichen, transitiven Gruppen als Multiplikationsgruppe einer Quasigruppe auftreten. Diese Frage soll in dieser Arbeit ein wenig beleuchtet werden.

Die dazu benötigten grundlegenden Begriffe und Konzepte werden in Kapitel I bereit gestellt. Außerdem werden dort auch einige alternative Zusammenhänge zwischen der Theorie der Quasigruppen bzw. Loops (diese sind Quasigruppen mit einem neutralen Element) und der Gruppentheorie aufgezeigt.

Kapitel II beschäftigt sich mit der Struktur von Multiplikationsgruppen. Ist Q eine Quasigruppe und $\mathrm{M}(Q)$ ihre Multiplikationsgruppe, dann kann der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}Q$ mit Basis Q wegen der Operation von $\mathrm{M}(Q)$ auf Q als $\mathbb{C}\mathrm{M}(Q)$-Modul aufgefasst werden. Der erste Abschnitt dieses Kapitels zeigt die Kommutativität des Rings der $\mathbb{C}\mathrm{M}(Q)$-Endomorphismen von $\mathbb{C}Q$, woraus im zweiten Abschnitt mit darstellungstheoretischen Mitteln gefolgert wird, dass der Modul $\mathbb{C}Q$ in eine direkte Summe paarweise nicht-isomorpher einfacher $\mathbb{C}\mathrm{M}(Q)$-Moduln zerfällt.

In Kapitel III verlässt der geneigte Leser die grenzwertfreie Zone. Dort wird gezeigt, dass fast alle Multiplikationsgruppen symmetrisch oder alternierend sind. Obwohl die Idee dieses Beweises relativ einfach ist, gerät man bei der Ausgestaltung der Details in manch finstrem Wald in diverse Raufhändel mit Tendenz zur Bluttat.

Kapitel IV beschäftigt sich schließlich mit Algorithmen zur Konstruktion von Quasigruppen mit gegebenen Multiplikationsgruppen. Die Implementierung dieser Algorithmen in GAP ([GAP06]) sowie die so erzielten Ergebnisse sind im Anhang aufgelistet.

Die Ergebnisse zeigen, dass zwar durchaus viele der vielfachheitsfreien (im Sinne von Kapitel II), transitiven Gruppen Multiplikationsgruppen sind, es aber doch mehrere Ausnahmen gibt. Das kleinste Gegenbeispiel liefert die Gruppe $\langle(1,4)(2,5),(1,3,5)(2,4,6)\rangle \leqslant S_6$. Diese operiert transitiv und ist vielfachheitsfrei, die Quasigruppen der Ordnung 6 weigern sich aber dennoch beharrlich, sie als ihre Multiplikationsgruppe anzuerkennen.

Das Thema der Arbeit verdanke ich Herrn Gerhard Hiß. Ihm danke ich sowohl für die Einführung in die Algebra als auch für seine jederzeit äußerst hilfsbereite Betreuung dieser Arbeit. Nicht zuletzt danke ich ihm auch für seine Unterstützung bezüglich meines Praktikums in Boston. Zudem hatten in Thomas Breuer, Christoph Köhler, Frank Lübeck, Max Neunhöffer, Johannes Orlob und Christian Weber auch zahlreiche weitere Mitarbeiter des Lehrstuhls jederzeit ein offenes Ohr für meine Probleme, wenn der Wald vor lauter Bäumen mal wieder zu verschwinden drohte.

Ein ganz besonderer Dank geht an meine Familie, insbesondere an meine Eltern. Sie unterstützten mich jederzeit in meinem Tun und Handeln (auch in schwierigen (Schul-)Zeiten, als ich ihnen keine große Freude war) und ermöglichten mir so erst die Erkundung sowohl der Mathematik in Aachen als auch diverser Winkel und Kulturen dieses Planeten. Diese Erfahrungen, die zu machen sie mir die Gelegenheit gaben, haben wesentlich zu meiner persönlichen Entwicklung beigetragen.

Zuguterletzt ist es mir noch ein persönliches Anliegen, der Europäischen Union für das Leben in fast vollendeter Freiheit, das zu führen ich bislang das Glück hatte, zu danken. Ich möchte sie an dieser Stelle ermutigen, weiter gegen die Krusten des mittelalterlichen, kleinstaatlichen Denkens zu kämpfen und den Weg zur europäischen Einheit allen Widrigkeiten zum Trotz weiter mit aller Konsequenz zu beschreiten.

Kapitel I

Einführung

Dieses Kapitel dient der Erläuterung der für diese Arbeit grundlegenden Begriffe. In §1 werden dabei die elementaren Begriffe Quasigruppe, Multiplikationsgruppe und Konjugiertenklasse definiert, während in §2 das aus der Gruppentheorie bekannte Konzept der Isomorphie auf Quasigruppen verallgemeinert wird. Die Definitionen sind größtenteils aus [Pfl90] oder [Smi86] übernommen. Die letzten beiden Abschnitte dieses Kapitels stellen einige Verbindungen zwischen Quasigruppen und bestimmten Gruppen her. Während in §3 die Begriffe des Zentrums bzw. der Automorphismengruppe einer Gruppe auf Quasigruppen verallgemeinert wird, ist der Zugang in §4 kategorieller Natur.

§1 Quasigruppen

(1.1)Definition Eine Menge $Q \neq \emptyset$ mit einer Verknüpfung $\cdot : Q \times Q \to Q$ heißt *Quasigruppe*, wenn durch die Kenntnis zweier Elemente der Gleichung

$$x \cdot y = z$$

mit $x, y, z \in Q$ das dritte Element eindeutig bestimmt ist.

Besitzt $(Q, \cdot)$ zusätzlich ein neutrales Element, d. h. ein Element $e \in Q$, das $e \cdot q = q \cdot e = q$ für alle $q \in Q$ erfüllt, so heißt $(Q, \cdot)$ ein *Loop*.

(1.2)Bemerkung Sei $(Q, \cdot)$ eine Quasigruppe und $x \cdot y = z$ eine Gleichung in Q. Die bei gegebenem y und z eindeutige Lösung x wird mit z/y bezeichnet und $x\backslash z$ sei die eindeutige Lösung y bei gegebenem x und z. Diese neuen Verknüpfungen $/$ und $\backslash$ auf Q heißen *Division von rechts* bzw. *Division von links*. Die Struktur $(Q, \cdot, /, \backslash)$ erfüllt dann

$$\left.\begin{array}{rcl} (x/y) \cdot y & = & x \\ (x \cdot y)/y & = & x \\ x \cdot (x\backslash y) & = & y \\ x\backslash(x \cdot y) & = & y \end{array}\right\} . \tag{I.1}$$

Sei umgekehrt eine Menge Q mit drei binären Verknüpfungen $\cdot, /$ und $\backslash$ gegeben, die I.1 erfüllen, dann ist $(Q, \cdot)$ eine Quasigruppe (vgl. [Smi86, S.15]).

(1.3)Definition Sei Q eine Quasigruppe. Für $x \in Q$ sind die *Translationen*

$$R(x) : Q \to Q, q \mapsto q \cdot x \qquad \text{und} \qquad L(x) : Q \to Q, q \mapsto x \cdot q$$

Permutationen von Q und $\mathrm{M}(Q) := \langle R(x), L(x) \mid x \in Q \rangle \leqslant S_Q$ heißt die *Multiplikationsgruppe* von Q. Analog dazu heißen $\mathrm{LM}(Q) := \langle L(x) \mid x \in Q \rangle$ *linke Multiplikationsgruppe* und $\mathrm{RM}(Q) := \langle R(x) \mid x \in Q \rangle$ *rechte Multiplikationsgruppe*.

Ist Q speziell eine Gruppe, so ist $\mathrm{M}(Q)$ durch die kurze exakte Sequenz

$$1 \to Z(Q) \xrightarrow{\Delta} Q \times Q \xrightarrow{T} \mathrm{M}(Q) \to 1$$

gegeben mit $\Delta : Z(Q) \to Q \times Q, z \mapsto (z, z)$ und $T : Q \times Q \to \mathrm{M}(Q), (x, y) \mapsto L(x)^{-1} R(y)$ (vgl. [Smi90, S. 436]). Das bedeutet, dass Δ und T Gruppenhomomorphismen sind, wobei Δ injektiv, T surjektiv und zusätzlich $\ker T = \mathrm{im}\, \Delta$ ist.

Es ist klar, dass die rechte, die linke und die beidseitige Multiplikationsgruppe auf natürliche Weise transitiv auf Q operiert.

(1.4)Definition Betrachte die diagonale Operation $\hat{}$ von $\mathrm{M}(Q)$ auf $Q \times Q$, d.h.

$$\hat{g} : Q \times Q \to Q \times Q, (x, y) \mapsto (xg, yg) \qquad \text{für } g \in \mathrm{M}(Q).$$

Die Bahnen $C_1, \ldots, C_d$ unter dieser Operation heißen *Konjugiertenklassen* von Q. Also ist z. B. die Diagonale $\hat{Q}$, die Gleichheitsrelation auf Q, eine solche, da $\mathrm{M}(Q)$ transitiv auf Q operiert. Weiter lässt sich jeder Konjugiertenklasse C_i die *entgegengesetzte Konjugiertenklasse*

$$C_i^{-1} := \{(x, y) \mid (y, x) \in C_i\}$$

zuordnen.

Ist Q eine Gruppe, so wird jede Konjugiertenklasse C durch

$$C(1) := \{y \in Q \mid (1, y) \in C\}$$

eindeutig bestimmt und diese Mengen $C(1)$ stimmen mit den üblichen Konjugiertenklassen von Gruppen überein (zur Argumentation siehe [JS84, S.44] und [Smi86, S.83]).

Im Folgenden seien alle auftretenden Quasigruppen endlich.

(1.5)Definition Sei Q eine Quasigruppe und seien $C_1, \ldots, C_d$ ihre Konjugiertenklassen, dann heißen die durch die Elemente von Q indizierten $|Q| \times |Q|$-Matrizen $A^{(i)} = (a_{xy}^{(i)})$ mit $1 \leqslant i \leqslant d$ und

$$a_{xy}^{(i)} := \begin{cases} 1 & \text{falls } (x, y) \in C_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

i-te *Adjazenzmatrizen*.

§2 Isomorphie und Isotopie von Quasigruppen

In diesem Abschnitt werden die Konzepte der Isomorphie und Isotopie von Quasigruppen eingeführt und die Auswirkungen solcher Operationen auf Multiplikationsgruppen untersucht.

(1.6)Definition Es seien $(Q,\cdot)$ und $(Q',\circ)$ Quasigruppen. Ein *Homomorphismus* von $(Q,\cdot)$ nach $(Q',\circ)$ ist eine Abbildung $\varphi : Q \to Q'$, die

$$(q_1\varphi) \circ (q_2\varphi) = (q_1 \cdot q_2)\varphi$$

für alle $q_1, q_2 \in Q$ erfüllt. Ein bijektiver Homomorphismus von Quasigruppen heißt *Isomorphismus*.

(1.7)Bemerkung Es seien $(L,\cdot)$ und $(L,\circ)$ Loops mit neutralen Elementen e bzw. f. Ist $\varphi : L \to L'$ ein Homomorphismus, dann gilt $e\varphi = f$.

Beweis. Es gilt

$$e\varphi = (e \cdot e)\varphi = (e\varphi) \circ (e\varphi)$$

sowie

$$e\varphi = f \circ (e\varphi).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist also $f = e\varphi$.

□

(1.8)Definition Es seien $(Q,\cdot)$ und $(Q',\circ)$ Quasigruppen sowie $\pi, \varphi, \psi : Q \to Q'$ bijektive Abbildungen. Das Tripel (π, φ, ψ) heißt *Isotopismus*, falls

$$(q_1\pi) \circ (q_2\varphi) = (q_1 \cdot q_2)\psi$$

für alle $q_1, q_2 \in Q$ gilt. Die Quasigruppe Q' heißt dann ein *Isotop* von Q.

Ist $(\pi, \varphi, \psi) : (Q,\cdot) \to (Q',\circ)$ ein Isotopismus und ist Q endlich mit

$$\begin{array}{c|cccccc}
\cdot & x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\
\hline
x_1 & z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1i} & \cdots & z_{1n} \\
x_2 & z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2i} & \cdots & z_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
x_j & z_{j1} & z_{j2} & \cdots & z_{ji} & \cdots & z_{jn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_n & z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{ni} & \cdots & z_{nn}
\end{array}$$

als Verknüpfungstafel, so erhält man die Verknüpfungstafel von Q' durch

$$\begin{array}{c|cccccc}
\circ & x_1\varphi & x_2\varphi & \cdots & x_i\varphi & \cdots & x_n\varphi \\
\hline
x_1\pi & z_{11}\psi & z_{12}\psi & \cdots & z_{1i}\psi & \cdots & z_{1n}\psi \\
x_2\pi & z_{21}\psi & z_{22}\psi & \cdots & z_{2i}\psi & \cdots & z_{2n}\psi \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
x_j\pi & z_{j1}\psi & z_{j2}\psi & \cdots & z_{ji}\psi & \cdots & z_{jn}\psi \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_n\pi & z_{n1}\psi & z_{n2}\psi & \cdots & z_{ni}\psi & \cdots & z_{nn}\psi
\end{array}.$$

Aus (1.6) und (1.8) folgt ebenfalls sofort, dass eine Abbildung $\varphi : Q \to Q'$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $(\varphi, \varphi, \varphi)$ ein Isotopismus ist.

Eine spezielle Klasse von Isotopismen ist die Folgende.

(1.9)Definition Seien $(Q, \cdot)$ und $(Q, \circ)$ Quasigruppen. Ein Isotopismus $(\pi, \varphi, \mathrm{id}_Q)$ von $(Q, \cdot)$ nach $(Q, \circ)$ heißt *prinzipaler Isotopismus.*

Die Kenntnis aller prinzipalen Isotope einer Quasigruppe ist bis auf Isomorphismus gleichbedeutend mit der Kenntnis aller Isotope.

(1.10)Satz Sind $(Q, \cdot)$ und $(Q', \circ)$ isotope Quasigruppen, dann ist $(Q', \circ)$ isomorph zu einem prinzipalen Isotop von $(Q, \cdot)$.

Beweis. [Pfl90, III.1.4].

□

Die folgenden Bemerkungen beleuchten den Zusammenhang zwischen Isomorphie und Isotopie von Quasigruppen auf der einen Seite und den zugehörigen Multiplikationsgruppen auf der anderen Seite.

(1.11)Bemerkung Multiplikationsgruppen isomorpher Quasigruppen sind isomorph. Die analoge Aussage gilt auch für einseitige Multiplikationsgruppen.

Beweis. Seien $(Q, \cdot)$ und $(Q', \circ)$ Quasigruppen und sei $\varphi : Q \to Q'$ ein Isomorphismus, d. h. es ist $(x \cdot y)\varphi = x\varphi \circ y\varphi$ für alle $x, y \in Q$. Es gilt also $q'_1 \circ q'_2 = ((q'_1\varphi^{-1}) \cdot (q'_2\varphi^{-1}))\varphi$ für alle $q'_1, q'_2 \in Q'$ und es folgt für $x, q' \in Q'$

$$\begin{aligned} xL_{(Q',\circ)}(q') &= q' \circ x \\ &= ((q'\varphi^{-1}) \cdot (x\varphi^{-1}))\varphi \\ &= x\varphi^{-1}L_{(Q,\cdot)}(q'\varphi^{-1})\varphi \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} xR_{(Q',\circ)}(q') &= x \circ q' \\ &= ((x\varphi^{-1}) \cdot (q'\varphi^{-1}))\varphi \\ &= x\varphi^{-1}R_{(Q,\cdot)}(q'\varphi^{-1})\varphi. \end{aligned}$$

Da φ bijektiv ist, durchläuft $q'\varphi^{-1}$ jeweils ganz Q und es ist also $\mathrm{LM}(Q', \circ) = \varphi^{-1}\mathrm{LM}(Q, \cdot)\varphi$ und analoge Aussagen gelten für rechte und beidseitige Multiplikationsgruppen.

□

Dieses Ergebnis soll nun auf isotope Loops ausgeweitet werden. Dazu ist aber noch die folgende Folgerung aus (1.10) notwendig.

(1.12)Lemma Es sei $(Q, \cdot)$ eine Quasigruppe und $(L, *)$ ein zu $(Q, \cdot)$ isotoper Loop. Dann existieren Elemente $f, g \in Q$, sodass $(L, *)$ isomorph ist zu $(Q, \circ)$, wobei

$$q \circ q' := qR(g)^{-1} \cdot q'L(f)^{-1}$$

für alle $q, q' \in Q$ definiert sei.

Beweis. (Vgl. [Pfl90, III.2.1]) Nach (1.10) existieren eine Quasigruppe $(Q, \circ)$ und bijektive Abbildungen $\pi, \varphi : Q \to Q$, so dass $(L, *) \cong (Q, \circ)$ und $(\pi, \varphi, \mathrm{id}_Q) : (Q, \cdot) \to (Q, \circ)$ ein Isotopismus ist. Für alle $q, q' \in Q$ gilt dann:

$$q \circ q' = (q\pi^{-1})\pi \circ (q'\varphi^{-1})\varphi = q\pi^{-1} \cdot q'\varphi^{-1}. \tag{I.2}$$

Da $(Q, \circ)$ isomorph zu einem Loop ist, existiert ein bzgl. „$\circ$“ neutrales Element $e \in Q$. Mit $f := e\pi^{-1}$ und $g := e\varphi^{-1}$ gilt dann für $q, q' \in Q$

$$q' = e \circ q' = e\pi^{-1} \cdot q'\varphi^{-1} = q'\varphi^{-1}L(e\pi^{-1}) = q'\varphi^{-1}L(f)$$

und

$$q = q \circ e = q\pi^{-1} \cdot e\varphi^{-1} = q\pi^{-1}R(e\varphi^{-1}) = q\pi^{-1}R(g).$$

Da $q, q' \in Q$ beliebig waren, ist also $\varphi = L(f)$ und $\pi = R(g)$. Setzt man dieses in I.2 ein, so erhält man

$$q \circ q' = qR(g)^{-1} \cdot q'L(f)^{-1}.$$

□

(1.13)Bemerkung Multiplikationsgruppen isotoper Loops sind isomorph. Die analoge Aussage gilt auch für einseitige Multiplikationsgruppen.

Beweis. Seien $(Q, \cdot)$ und $(Q', *)$ isotope Loops. Nach (1.12) existieren $f, g \in Q$, sodass das Bild $(Q, \circ)$ des Isotopismus $(R_{(Q,\cdot)}(g), L_{(Q,\cdot)}(f), \mathrm{id}_Q)$ isomorph zu $(Q', *)$ ist, d. h. $\mathrm{LM}(Q, \circ) \cong \mathrm{LM}(Q', *)$, $\mathrm{RM}(Q, \circ) \cong \mathrm{RM}(Q', *)$ und $\mathrm{M}(Q, \circ) \cong \mathrm{M}(Q', *)$ nach (1.11). Es genügt demnach, die Behauptung für $(Q, \cdot)$ und $(Q, \circ)$ zu zeigen.

Aus (1.12) folgt

$$x \circ y = xR_{(Q,\cdot)}(g)^{-1} \cdot yL_{(Q,\cdot)}(f)^{-1}$$

für alle $x, y \in Q$. Dann gilt aber auch

$$xR_{(Q,\circ)}(f) = x \circ f = xR_{(Q,\cdot)}(g)^{-1} \cdot fL_{(Q,\cdot)}(f)^{-1} = xR_{(Q,\cdot)}(g)^{-1}$$

sowie

$$yL_{(Q,\circ)}(g) = g \circ y = gR_{(Q,\cdot)}(g)^{-1} \cdot yL_{(Q,\cdot)}(f)^{-1} = yL_{(Q,\cdot)}(f)^{-1}$$

und demnach $R_{(Q,\circ)}(f) = R_{(Q,\cdot)}(g)^{-1}$ und $L_{(Q,\circ)}(g) = L_{(Q,\cdot)}(f)^{-1}$. Insgesamt folgt also

$$x \cdot y = xR_{(Q,\cdot)}(g) \circ yL_{(Q,\cdot)}(f) = xR_{(Q,\circ)}(f)^{-1} \circ yL_{(Q,\circ)}(g)^{-1}$$

für alle $x, y \in Q$. Für $x, q \in Q$ ist weiter

$$qL_{(Q,\circ)}(x) = x \circ q = xR_{(Q,\cdot)}(g)^{-1} \cdot qL_{(Q,\cdot)}(f)^{-1} = qL_{(Q,\cdot)}(f)^{-1}L_{(Q,\cdot)}(xR_{(Q,\cdot)}(g)^{-1}),$$

d. h.

$$L_{(Q,\circ)}(x) = L_{(Q,\cdot)}(f)^{-1} L_{(Q,\cdot)}(x R_{(Q,\cdot)}(g)^{-1})$$

für alle $x \in Q$. Analoge Rechnungen liefern

$$\begin{aligned} R_{(Q,\circ)}(y) &= R_{(Q,\cdot)}(g)^{-1} R_{(Q,\cdot)}(y L_{(Q,\cdot)}(f)^{-1}) \\ L_{(Q,\cdot)}(x) &= L_{(Q,\circ)}(g)^{-1} L_{(Q,\circ)}(x R_{(Q,\circ)}(f)^{-1}) \\ R_{(Q,\cdot)}(y) &= R_{(Q,\circ)}(f)^{-1} R_{(Q,\circ)}(y L_{(Q,\circ)}(g)^{-1}) \end{aligned}$$

für alle $x, y \in Q$. Dies bedeutet aber $\mathrm{LM}(Q,\cdot) = \mathrm{LM}(Q,\circ), \mathrm{RM}(Q,\cdot) = \mathrm{RM}(Q,\circ)$ und $\mathrm{M}(Q,\cdot) = \mathrm{M}(Q,\circ)$.

□

Diese letzte Aussage ist für Quasigruppen, die keine Loops sind, falsch. Seien z. B. auf $Q := \{1,2,3\}$ die folgenden beiden Verknüpfungen $\cdot$ und $\circ$ definiert:

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{c|ccc} \circ & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Dann ist $(Q,\cdot)$ sogar eine Gruppe, $(Q,\circ)$ aber kein Loop, da kein bezüglich $\circ$ neutrales Element existiert. Außerdem ist $(\pi, \varphi, \psi) \in S_3 \times S_3 \times S_3$ mit $\pi := (1,2)$ und $\varphi = \psi = \mathrm{id}_Q$ ein Isotopismus von $(Q,\cdot)$ nach $(Q,\circ)$; es ist aber $\mathrm{M}(Q,\cdot) = C_3$ die zyklische Gruppe mit drei Elementen, während $\mathrm{M}(Q,\circ) = S_3$ ist.

§3 Dialog zwischen Quasigruppen und Gruppen

Dieser Abschnitt stellt einige Verbindungen zwischen der Gruppentheorie und der Theorie der Quasigruppen her. Das erste Ergebnis beinhaltet die Automorphismengruppe einer Quasigruppe. Wie in der Gruppentheorie ist ein Automorphismus ein Isomorphismus einer Quasigruppe auf sich selbst, und die Menge aller Automorphismen einer Quasigruppe bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

(1.14)Satz Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}\, Q$ einer Quasigruppe Q ist isomorph zu Untergruppen der Automorphismengruppen $\mathrm{Aut}\, \mathrm{LM}(Q)$, $\mathrm{Aut}\, \mathrm{RM}(Q)$ und $\mathrm{Aut}\, \mathrm{M}(Q)$.

Beweis. (Vgl. [Pfl90, I.6.1]) Seien $\sigma \in \mathrm{Aut}\, Q$ und $x, y \in Q$ beliebig. Dann gilt $xR(y)\sigma = (xy)\sigma = (x\sigma)(y\sigma) = x\sigma R(y\sigma)$. Also ist $\sigma^{-1}R(y)\sigma = R(y\sigma) \in \mathrm{RM}(Q)$ für alle $y \in Q$. Damit ist die Abbildung

$$\begin{array}{rlcl} \alpha : & \mathrm{Aut}\, Q & \to & \mathrm{Aut}\, \mathrm{RM}(Q) \\ & \sigma & \mapsto & (r \mapsto \sigma^{-1} r \sigma) \end{array}$$

wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt für alle $r \in \mathrm{RM}(Q)$ und alle $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Aut}\, Q$

$$r((\sigma\sigma')\alpha) = (\sigma\sigma')^{-1} r \sigma\sigma' = \sigma'^{-1}\sigma^{-1} r \sigma\sigma' = (\sigma^{-1} r \sigma)(\sigma'\alpha) = r(\sigma\alpha)(\sigma'\alpha).$$

Ist $\sigma \in \ker\alpha$, dann gilt $qR(q') = q\sigma^{-1}R(q')\sigma$ für alle $q, q' \in Q$. Wendet man auf beiden Seiten den Automorphismus σ^{-1} an, so folgt

$$(q\sigma^{-1})(q'\sigma^{-1}) = (q\sigma^{-1})q'.$$

Wegen der Definition einer Quasigruppe folgt dann $q'\sigma^{-1} = q'$ für alle $q' \in Q$. Also ist α injektiv und es gilt $\operatorname{Aut} Q \cong \operatorname{im}\alpha \leqslant \operatorname{Aut} \operatorname{RM}(Q)$.

Die Behauptung für die anderen Multiplikationsgruppen folgt mit der gleichen Argumentation wegen $\sigma^{-1}L(y)\sigma = L(y\sigma) \in \operatorname{LM}(Q)$.

□

Nach den Automorphismen einer Quasigruppe werden nun die Autotopismen einer Quasigruppe untersucht. Ein Autotopismus einer Quasigruppe Q ist ein Isotopismus von Q auf sich selbst. Die Verknüpfung zweier Autotopismen $(\pi_1, \varphi_1, \psi_1)$ und $(\pi_2, \varphi_2, \psi_2)$ von Q sei definiert als

$$(\pi_1, \varphi_1, \psi_1)(\pi_2, \varphi_2, \psi_2) := (\pi_1\pi_2, \varphi_1\varphi_2, \psi_1\psi_2).$$

(1.15)Lemma Die Menge $\operatorname{Atp} Q$ aller Autotopismen einer Quasigruppe Q bildet eine Gruppe mit neutralem Element $(\mathrm{id}_Q, \mathrm{id}_Q, \mathrm{id}_Q)$.

Beweis. Seien $(\pi_1, \varphi_1, \psi_1)$ und $(\pi_2, \varphi_2, \psi_2)$ Autotopismen von Q. Dann sind die Abbildungen $\pi_1\pi_2, \varphi_1\varphi_2$ und $\psi_1\psi_2 : Q \to Q$ als Verkettung bijektiver Abbildungen bijektiv, und es gilt für alle $q, q' \in Q$:

$$(q\pi_1\pi_2)(q'\varphi_1\varphi_2) = ((q\pi_1)(q'\varphi_1))\psi_2 = (qq')\psi_1\psi_2.$$

Also ist auch $(\pi_1\pi_2, \varphi_1\varphi_2, \psi_1\psi_2)$ ein Autotopismus von Q. Mit $(\pi, \varphi, \psi)^{-1} = (\pi^{-1}, \varphi^{-1}, \psi^{-1})$ folgt dann die Behauptung.

□

(1.16)Lemma Es seien Q, Q' Quasigruppen und $\delta := (\alpha, \beta, \gamma) : Q \to Q'$ ein Isotopismus. Ist $\eta := (\pi, \varphi, \psi)$ ein Autotopismus von Q, dann ist

$$\delta^{-1}\eta\delta = (\alpha^{-1}\pi\alpha, \beta^{-1}\varphi\beta, \gamma^{-1}\psi\gamma)$$

ein Autotopismus von Q'.

Beweis. (Vgl. [Pfl90, III.3.3]) Da die Komponenten von $\delta^{-1}\eta\delta$ jeweils bijektive Abbildungen von Q' nach Q' sind, genügt es, die Isotopieeigenschaft nachzuprüfen. Dazu seien $q_1', q_2' \in Q'$ beliebig und $q_1, q_2 \in Q$ die eindeutig existierenden Elemente mit $q_1\alpha = q_1'$ bzw. $q_2\beta = q_2'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(q_1'\alpha^{-1}\pi\alpha)(q_2'\beta^{-1}\varphi\beta) &= (q_1\pi\alpha)(q_2\varphi\beta)\\
&= ((q_1\pi)(q_2\varphi))\gamma\\
&= (q_1q_2)\psi\gamma\\
&= (q_1q_2)\gamma\gamma^{-1}\psi\gamma\\
&= ((q_1\alpha)(q_2\beta))\gamma^{-1}\psi\gamma\\
&= (q_1'q_2')\gamma^{-1}\psi\gamma.
\end{aligned}$$

□

(1.17)Satz Die Autotopismengruppen isotoper Quasigruppen sind isomorph.

Beweis. (Vgl. [Pfl90, III.3.4]) Seien Q und Q' Quasigruppen und $(\alpha, \beta, \gamma) : Q \to Q'$ ein Isotopismus. Nach (1.16) ist die Abbildung

$$\begin{array}{rlcl} \theta: & \mathrm{Atp}\ Q & \to & \mathrm{Atp}\ Q' \\ & (\pi, \varphi, \psi) & \mapsto & (\alpha^{-1}\pi\alpha, \beta^{-1}\varphi\beta, \gamma^{-1}\psi\gamma) \end{array}$$

wohldefiniert.

Für $\eta_1 := (\pi_1, \varphi_1, \psi_1), \eta_2 := (\pi_2, \varphi_2, \psi_2) \in \mathrm{Atp}\ Q$ gilt

$$\begin{array}{rcl} (\eta_1\eta_2)\theta & = & (\pi_1\pi_2, \varphi_1\varphi_2, \psi_1\psi_2)\theta \\ & = & (\alpha^{-1}\pi_1\pi_2\alpha, \beta^{-1}\varphi_1\varphi_2\beta, \gamma^{-1}\psi_1\psi_2\gamma) \\ & = & (\alpha^{-1}\pi_1\alpha, \beta^{-1}\varphi_1\beta, \gamma^{-1}\psi_1\gamma)(\alpha^{-1}\pi_2\alpha, \beta^{-1}\varphi_2\beta, \gamma^{-1}\psi_2\gamma) \\ & = & (\eta_1\theta)(\eta_2\theta). \end{array}$$

Es ist θ also ein Gruppenhomomorphismus. Ist ein Autotopismus (π, φ, ψ) im Kern von θ, dann gilt $\alpha^{-1}\pi\alpha = \beta^{-1}\varphi\beta = \gamma^{-1}\psi\gamma = \mathrm{id}_{Q'}$. Dies ist aber nur für $\pi = \varphi = \psi = \mathrm{id}_Q$ erfüllt, und θ ist damit injektiv.

Ist $(\pi', \varphi', \psi') \in \mathrm{Atp}\ Q'$, dann ist $(\alpha\pi'\alpha^{-1}, \beta\varphi'\beta^{-1}, \gamma\psi'\gamma^{-1})$ nach (1.16) ein Autotopismus von Q, der durch θ auf $(\pi'\varphi', \psi')$ abgebildet wird. Also ist θ ein Isomorphismus von Gruppen.

□

Schließlich noch ein Ergebnis über das Zentrum von Loops, das hier aber nur angegeben wird.

(1.18)Definition Ein Element q einer Quasigruppe Q heißt *linksnuklear*, falls $L(qx) = L(x)L(q)$ für alle $x \in Q$ gilt. Analog heißt q *rechtsnuklear* bzw. *mittelnuklear*, falls $R(xq) = R(x)R(q)$ bzw. $L(xq) = L(q)L(x)$ für alle $x \in Q$ gilt. Ist $q \in Q$ links-, rechts- und mittelnuklear, dann ist q *nuklear*.

(1.19)Definition Für eine Quasigruppe Q ist der *linke Nukleus* $\mathrm{LN}(Q)$ definiert als die Menge aller linksnuklearen Elemente von Q. Analog ist der *rechte Nukleus* $\mathrm{RN}(Q)$ die Menge aller rechtsnuklearen Elemente, und der *mittlere Nukleus* $\mathrm{MN}(Q)$ die Menge aller mittelnuklearen Elemente von Q. Der Schnitt $\mathrm{N}(Q) := \mathrm{LN}(Q) \cap \mathrm{MN}(Q) \cap \mathrm{RN}(Q)$ heißt der *Nukleus* von Q.

Aus der Definition folgt, dass die Nuklei die folgende Gestalt haben:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{LN}(Q) & = & \{q \in Q \mid q(xy) = (qx)y \text{ für alle } x, y \in Q\} \\ \mathrm{RN}(Q) & = & \{q \in Q \mid (xy)q = x(yq) \text{ für alle } x, y \in Q\} \\ \mathrm{MN}(Q) & = & \{q \in Q \mid (xq)y = x(qy) \text{ für alle } x, y \in Q\}. \end{array}$$

Nach [Pfl90, I.3.4] sind $\mathrm{LN}(Q)$, $\mathrm{RN}(Q)$ und $\mathrm{MN}(Q)$ Gruppen, falls sie nicht leer sind. Da das neutrale Element eines Loops immer nuklear ist, folgt daraus das folgende Ergebnis.

(1.20)Bemerkung Alle Nuklei eines Loops bilden eine Gruppe.

(1.21)Definition Das *Zentrum* $Z(Q)$ einer Quasigruppe Q ist definiert als

$$Z(Q) := \{q \in \mathrm{N}(Q) \mid L(q) = R(q)\}.$$

(1.22)Bemerkung Das Zentrum eines Loops ist eine Gruppe.

Beweis. Sind $q, q' \in Z(L)$ für einen Loop L, dann genügt es wegen (1.20) und der Tatsache, dass das neutrale Element von L in $Z(L)$ enthalten ist, zu zeigen, dass $L(qq') = R(qq')$ erfüllt ist. Für beliebiges $x \in L$ gilt:

$$\begin{array}{rcll} xL(qq') & = & (qq')x & \\ & = & q(q'x), & \text{da } q \text{ linksnuklear} \\ & = & (q'x)q & \text{wegen } L(q) = R(q) \\ & = & (xq')q & \text{wegen } L(q') = R(q') \\ & = & x(q'q), & \text{da } q \text{ rechtsnuklear} \\ & = & x(qq') & \text{wegen } L(q) = R(q) \\ & = & xR(qq'). & \end{array}$$

□

(1.23)Satz Für isotope Loops L, M gilt:

(a) $\mathrm{LN}(L) \cong \mathrm{LN}(M)$,

(b) $\mathrm{MN}(L) \cong \mathrm{MN}(M)$,

(c) $\mathrm{RN}(L) \cong \mathrm{RN}(M)$,

(d) $Z(L) \cong Z(M)$.

Beweis. [Pfl90, II.2.6].

□

§4 Kategorieller Dialog zwischen Loops und Gruppen

Dieser Abschnitt beschreibt einen kategoriellen Zusammenhang zwischen Loops und speziellen Tripeln gruppentheoretischer Daten, wie er von Aschbacher in [Asc05] beobachtet wurde.

(1.24)Definition Ein Tripel $\xi = (G, H, K)$ heißt *Loop-Folder*, falls G eine Gruppe, $H \leqslant G$ eine Untergruppe und $K \subseteq G$ eine Teilmenge von G ist, die die 1 enthält und darüber hinaus für alle $g \in G$ eine Transversale von $H^g\backslash G = \{H^g x \mid x \in G\}$ ist. Die Gruppe G heißt *einhüllende Gruppe*, H die *Gruppe der inneren Abbildungen* und K die Menge der *Translationen* von ξ. Gilt zusätzlich $G = \langle K \rangle$, dann ist ξ eine *Loop-Hülle*. Der Loop-Folder ξ heißt *treu*, falls der von der Operation von G auf den Rechtsnebenklassen $H\backslash G$ duch Rechtsmultiplikation induzierte Homomorphismus $\varphi : G \to S_{H\backslash G}$ injektiv ist.

(1.25)Definition Es seien L ein Loop mit neutralem Element 1, $K := \{R(x) \mid x \in L\}$ die Menge der Translationen von rechts, sowie $H := \mathrm{Stab}_{\mathrm{RM}(L)}(1)$. Die Gruppe H ist die Gruppe der (rechten) *inneren Abbildungen* von L, und die *Hülle* $\epsilon(L)$ von L ist definiert als $\epsilon(L) := (\mathrm{RM}(L), H, K)$.

Der Begriff der inneren Abbildung in (1.25) und (1.24) entstammt der Gruppentheorie. Nach [Pfl90, Theorem I.5.2] gilt nämlich für einen Loop L mit neutralem Element 1

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{M}(L)}(1) = \langle R(x,y), L(x,y), T(x) \mid x, y \in L\rangle$$

mit

$$\begin{aligned} R(x,y) :=& R(x)R(y)R(xy)^{-1}, \\ L(x,y) :=& L(x)L(y)L(yx)^{-1} \qquad \text{und} \\ T(x) :=& R(x)L(x)^{-1}. \end{aligned}$$

Falls L zusätzlich eine Gruppe ist, dann ist wegen der Assoziativität $R(x,y) = L(x,y) = \mathrm{id}$ für alle $x, y \in L$. Da die $T(x)$ aber genau den Konjugationsautomorphismen entsprechen, stimmt $\mathrm{Stab}_{\mathrm{M}(L)}(1)$ mit der Gruppe der inneren Automorphismen von L überein. Ist L aber keine Gruppe, dann sind die Elemente von H nicht notwendigerweise Automorphismen von L. Dieses zeigt zum Beispiel der Loop $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit der folgenden Verknüpfungstafel:

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	1
3	3	5	1	2	4
4	4	1	5	3	2
5	5	4	2	1	3

Es ist nun $R(2) = (1,2,3,5,4)$ und $R(3) = (1,3)(2,4,5)$. Also ist $(4,5) = (1,2,3,5,4)(1,3)(2,4,5)(1,2,3,5,4) = R(2)R(3)R(2) \in \mathrm{RM}(L)$ und damit $(4,5) \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{RM}(L)}(1)$. Obwohl $(4,5)$ demnach eine innere Abbildung von L ist, liegt wegen $2(4,5) \cdot 4(4,5) = 2 \cdot 5 = 1 \neq 4 = 5(4,5) = (2 \cdot 4)(4,5)$ kein Automorphismus von L vor.

(1.26)Bemerkung Die Hülle $\epsilon(L)$ eines Loops L ist eine treue Loop-Hülle.

Beweis. Nach Definition ist $\mathrm{RM}(L) = \langle K\rangle$. Außerdem ist H als Stabilisator des neutralen Elements eine Untergruppe von $\mathrm{RM}(L)$. Wegen $R(1) = \mathrm{id}_L$ ist das neutrale Element von $\mathrm{RM}(L)$ in K enthalten. Seien nun $R(x), R(y) \in K$ für ein $g \in \mathrm{RM}(L)$ in derselben Nebenklasse von $\mathrm{RM}(L)$ nach H^g, d. h. $R(x)R(y)^{-1} = g^{-1}hg$ mit einem $h \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{RM}(L)}(1)$. Mit $q := 1g \in L$ ist $qg^{-1}hg = q$, also auch $qR(x)R(y)^{-1} = q$. Das beudeutet, dass in L die Gleichung $qx = qy$ gilt. Wegen der definierenden Eigenschaft einer Quasigruppe folgt $x = y$ und insbesondere $R(x) = R(y)$. Also enthält jede Nebenklasse von $\mathrm{RM}(L)$ nach H^g für alle $g \in \mathrm{RM}(L)$ höchstens ein Element aus K. Da $\mathrm{RM}(L)$ transitiv auf L operiert, ist $\epsilon(L)$ wegen $|H^g\backslash\mathrm{RM}(L)| = |\mathrm{RM}(L) : H| = |L| = |K|$ für alle $g \in \mathrm{RM}(L)$ eine Loop-Hülle.

Falls $L = \{1\}$ ist, ist die Treue von $\epsilon(L)$ klar. Für $|L| > 1$ existiert für beliebiges $1 \neq g \in \mathrm{RM}(L)$ ein $x \in L$ mit $xg \neq x$. Außerdem existiert wegen der transitiven Operation von $\mathrm{RM}(L)$ auf L ein $g_2 \in \mathrm{RM}(L)$ mit $1g_2 = x$. Dann ist aber $g_2 g g_2^{-1} \notin H$, d. h. g liegt nicht im Kern von $\varphi : \mathrm{RM}(L) \to S_{H\backslash\mathrm{RM}(L)}, g \mapsto (Hg_1 \mapsto Hg_1 g)$. Da $1 \neq g \in \mathrm{RM}(L)$ beliebig war, ist φ injektiv und $\epsilon(L)$ treu.

□

(1.27)Definition Eine *Kategorie* C besteht aus

- einer Klasse Ob C von *Objekten*;
- einer Familie Mor C von Mengen $(\mathrm{Mor}(A,B))_{A,B\in \mathrm{Ob}\, C}$ mit $\mathrm{Mor}(A,B) \cap \mathrm{Mor}(A',B') = \emptyset$ für alle $A, A', B, B' \in \mathrm{Ob}\, C$ mit $A \neq A'$ oder $B \neq B'$; die Elemente von $\mathrm{Mor}(A,B)$ heißen *Morphismen* von A nach B und werden mit $\varphi : A \to B$ notiert;
- einer Abbildung $\mathrm{Mor}(X,Y) \times \mathrm{Mor}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}(X,Z), (f,g) \mapsto fg$ für alle $X,Y,Z \in \mathrm{Ob}\, C$, die die folgenden beiden Axiome erfüllt:
  (i) sind $f : W \to X, g : X \to Y$ und $h : Y \to Z$ mit $W,X,Y,Z \in \mathrm{Ob}\, C$, dann gilt $f(gh) = (fg)h$;
  (ii) für jedes $X \in \mathrm{Ob}\, C$ existiert ein Morphismus $\mathrm{id}_X : X \to X$, sodass $f = \mathrm{id}_X f$ für jeden Morphismus $f : X \to Y$ sowie $g = g\mathrm{id}_X$ für jeden Morphismus $g : Y \to X$ erfüllt sind.

(1.28)Beispiele

(a) Es seien $\xi := (G,H,K)$ und $\xi' := (G',H',K')$ Loop-Folders. Ein Morphismus $\pi : \xi \to \xi'$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\pi : G \to G'$, der $H\pi \leqslant H'$ und $K\pi \subseteq K'$ erfüllt. Die Klasse der Loop-Folders bildet mit diesen Morphismen eine Kategorie.

(b) Der Morphismus $\pi : \xi \to \xi'$ aus (a) ist *surjektiv*, falls sowohl $\pi : G \to G'$ als auch $\pi : K \to K'$ surjektiv sind. Die Klasse der treuen Loop-Hüllen bildet mit den surjektiven Morphismen eine Kategorie.

(c) Ein Morphismus $\pi : \xi \to \xi'$ von Loop-Folders heißt ein *Isomorphismus*, falls $\pi : G \to G'$ ein Gruppenisomorphismus ist.

Verbindungen zwischen zwei Kategorien werden durch Funktoren ausgedrückt. Diese sind Abbildungen, die die Struktur einer Kategorie erhalten.

(1.29)Definition Es seien C und D Kategorien. Ein *Funktor* $F : C \to D$ ordnet jedem $X \in \mathrm{Ob}\, C$ ein Objekt $XF \in \mathrm{Ob}\, D$ sowie jedem $f : X \to Y \in \mathrm{Mor}\, C$ einen Morphismus $fF : XF \to YF \in \mathrm{Mor}\, D$ zu, sodass

- $\mathrm{id}_X F = \mathrm{id}_{XF}$ für alle $X \in \mathrm{Ob}\, C$ und
- $(fg)F = (fF)(gF)$ für alle $f : X \to Y, g : Y \to Z \in \mathrm{Mor}\, C$

erfüllt sind.

(1.30)Bemerkung (Vgl. [Asc05, 1.3.]) Es seien L, L' Loops und $\psi : L \to L'$ ein surjektiver Loophomomorphismus. Weiter seien $\epsilon(L) = (\mathrm{RM}(L), H, K)$ und $\epsilon(L') = (\mathrm{RM}(L'), H', K')$ die Hüllen von L bzw. L'.

(a) Die Abbildung $\pi : K \to K', R(x) \mapsto R(x\psi)$ lässt sich zu einem surjektiven Morphismus $\epsilon(\psi) : \epsilon(L) \to \epsilon(L')$ von treuen Loop-Hüllen fortsetzen.

(b) Durch ϵ wird ein Funktor von der Kategorie der Loops mit den surjektiven Loophomomorphismen in die Kategorie der treuen Loop-Hüllen wie in (1.28)(b) definiert.

Beweis. Sei $\Lambda := \{\psi^{-1}(\{y\}) \mid y \in L'\}$ die Menge der Fasern von ψ und sei S der Stabilisator der Partition Λ von L in S_L. Die Gruppe S operiert auf dem Loop L' via $(x\psi)s = (xs)\psi$ für alle $x \in L$ und alle $s \in S$. Diese Operation ist wohldefiniert, denn im Fall $x\psi = x'\psi$ liegen x und x' in einer gemeinsamen Faser von ψ. Wegen $s \in S$ liegen dann aber auch xs und $x's$ in einer gemeinsamen Faser, sodass $(xs)\psi = (x's)\psi$ gilt. Sei $\hat{\psi} : S \to S_{L'}$ der von dieser Operation induzierte Homomorphismus.

Seien nun $x_1, x_2 \in L$ mit $x_1\psi = x_2\psi$ und sei $R(x) \in K$ beliebig. Dann gilt

$$(x_1R(x))\psi = (x_1x)\psi = (x_1\psi)(x\psi) = (x_2\psi)(x\psi) = (x_2x)\psi = (x_2R(x))\psi,$$

d. h. es ist $K \subseteq S$, insbesondere $\mathrm{RM}(L) \leqslant S$. Außerdem gilt $R(x)\hat{\psi} = R(x)\pi$ für alle $R(x) \in K$ wegen

$$(y\psi)(R(x)\hat{\psi}) = (y(R(x))\psi = (yx)\psi = (y\psi)(x\psi) = (y\psi)R(x\psi) = (y\psi)(R(x)\pi)$$

für alle $y \in L$, es ist also $\hat{\psi}$ eine Fortsetzung von π auf S. Wegen $\mathrm{RM}(L) \leqslant S$ und $\langle K' \rangle = \mathrm{RM}(L')$ erhält man eine Fortsetzung $\epsilon(\psi) := \hat{\hat{\psi}} : \mathrm{RM}(L) \to \mathrm{RM}(L')$ von π. Diese ist surjektiv, da π surjektiv ist.

Schließlich sei $h \in H$ beliebig. Wegen (1.7) folgt

$$1(h\epsilon(\psi)) = (1\psi)(h\hat{\hat{\psi}}) = (1h)\psi = 1\psi = 1.$$

Da $h \in H$ beliebig war, folgt $H\epsilon(\psi) \leqslant H'$ und es ist $\epsilon(\psi)$ demnach ein surjektiver Morphismus von treuen Loop-Hüllen.

□

Diese Konstruktion soll im Folgenden in gewissem Maße umgekehrt werden. Es soll also ein Funktor l von der Kategorie der Loop-Hüllen und der surjektiven Morphismen von Loop-Hüllen in die Kategorie der Loops und der surjektiven Loophomomorphismen definiert werden, sodass die Hintereinanderausführung von l und ϵ in beliebiger Reihenfolge bis auf Isomorphie die Identität ergibt.

(1.31)Bemerkung Es sei $\xi = (G, H, K)$ ein Loop-Folder. Die Menge $H\backslash G$ bildet mit der Verknüpfung $Hg_1 * Hg_2 := Hk_1k_2$ für $g_1, g_2 \in G$ einen Loop $l(\xi)$. Hier sind $k_1, k_2 \in K$ die eindeutig bestimmten Elemente mit $Hg_1 = Hk_1$ bzw. $Hg_2 = Hk_2$.

Beweis. Es seien $g \in G$ und $k \in K$ mit $Hg = Hk$. Dann $H1 * Hg = H1k = Hk = Hg$ sowie $Hg * H1 = Hk1 = Hk = Hg$. Also ist $H1$ ein neutrales Element von $l(\xi)$.

Zu gegebenem $y \in G$ seien $x, x' \in G$ mit $Hx * Hy = Hx' * Hy$. Es seien weiter $Hx = Hk$, $Hx' = Hk'$ und $Hy = Hk_2$ mit $k, k', k_2 \in K$. Dann ist also $Hkk_2 = Hk'k_2$. Dies ist aber gleichbedeutend mit $Hx = Hk = Hk' = Hx'$.

Schließlich sei $x \in K$ gegeben, und es seien $y, y' \in G$ mit $Hx * Hy = Hx * Hy'$, also $Hkk_2 = Hkk_2'$, wobei $k, k_2, k_2' \in K$ mit $Hx = Hk$, $Hy = Hk_2$ und $Hy' = Hk_2'$ seien. Daraus folgt $(H^k)k_2 = (H^k)k_2'$. Daraus folgt $k_2 = k_2'$, da K eine Transversale von $H^k\backslash G$ ist, insbesondere gilt $Hy = Hy'$.

□

(1.32)Bemerkung

(a) Es seien $\xi := (G, H, K)$ und $\xi' := (G', H', K')$ Loop-Folders und $\pi : \xi \to \xi'$ ein Morphismus von Loop-Folders. Die Restriktion $l(\pi) := l(\xi) \to l(\xi')$ mit $(Ha)l(\pi) := H'(a\pi)$ für $a \in G$ ist ein Loophomomorphismus.

(b) Durch l wird ein Funktor von der Kategorie der Loop-Folders wie in (1.28)(a) in die Kategorie der Loops mit den Loophomomorphismen definiert.

Beweis. Sind $a, b \in G$ mit $Ha = Hb$, dann existiert ein $h \in H$ mit $a = hb$. Wendet man auf beiden Seiten π an, erhält man $a\pi = (h\pi)(b\pi)$. Da π ein Morphismus von Loop-Folders ist, existiert ein $h' \in H'$ mit $h\pi = h'$, also $a\pi = h'(b\pi)$ mit einem $h' \in H'$. Damit ist die Abbildung

$$l(\pi) : H\backslash G \to H'\backslash G', Ha \mapsto H'(a\pi)$$

wohldefiniert.

Für $x, y \in K$ gilt dann, da $\pi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus ist,

$$\begin{aligned} (Hx)l(\pi) * (Hy)l(\pi) &= H'(x\pi) * H'(y\pi) \\ &= H'(x\pi)(y\pi) \\ &= H'((xy)\pi) \\ &= (Hxy)l(\pi) \\ &= (Hx * Hy))l(\pi). \end{aligned}$$

Also ist $l(\pi)$ ein Loophomomorphismus, da K eine Transversale von $H\backslash G$ ist.

□

(1.33)Lemma Sei $\xi := (G, H, K)$ ein Loop-Folder und φ_ξ der von der Operation von G auf $H\backslash G$ induzierte Gruppenhomomorphismus

$$\varphi_\xi : G \to S_{H\backslash G}, g \mapsto (Hg_2 \mapsto Hg_2 g).$$

Ferner seien $\hat{K} := K\varphi_\xi$, $\hat{H} := H\varphi_\xi$ sowie $\hat{G} := G\varphi_\xi$. Dann gilt:

(a) Die Einschränkung $\varphi_\xi|_K$ ist injektiv;

(b) $\langle\hat{K}\rangle \cdot \hat{H} = \hat{G}$;

(c) $|G : H| = |\hat{G} : \hat{H}|$;

(d) $\hat{\xi} := (\langle\hat{K}\rangle, \langle\hat{K}\rangle \cap \hat{H}, \hat{K})$ ist eine Loop-Hülle;

(e) Falls ξ eine Loop-Hülle ist, dann ist $\varphi_\xi : G \to \hat{G}$ ein surjektiver Morphismus von Loop-Hüllen.

Beweis. (a) Seien $k, k' \in K$ mit $k\varphi_\xi = k'\varphi_\xi$. Dann ist $H^{g_2}k = H^{g_2}k'$ für alle $g_2 \in G$. Daraus folgt die Behauptung, da K für alle $g_2 \in G$ eine Transversale von $H^{g_2}\backslash G$ ist.

(b) Sei $\hat{g} \in \hat{G}$. Wegen der Definition von $\hat{G}$ existiert ein $g \in G$ mit $g\varphi_\xi = \hat{g}$. Es existiert also ein $k \in K$ mit $Hg = Hk$, und damit auch ein $h \in H$ mit $g = hk$. Wendet man nun auf beiden Seiten φ_ξ an, so erhält man eine Darstellung $\hat{g} = \hat{h}\hat{k}$ mit $\hat{h} := h\varphi_\xi \in \hat{H}$ und $\hat{k} := k\varphi_\xi \in \langle\hat{K}\rangle$.

(c) Ist $g \in \ker\varphi_\xi$, dann gilt $Hg_2 = Hg_2g$ für alle $g_2 \in G$. Insbesondere mit $g_2 = 1$ folgt dann $g \in H$, d. h. es gilt $\ker\varphi_\xi = \ker\varphi_\xi|_H$. Mit dem Homomorphiesatz erhält man

$$|\hat{G} : \hat{H}| = \frac{|\hat{G}|}{|\hat{H}|} = \frac{\frac{|G|}{|\ker\varphi_\xi|}}{\frac{|H|}{|\ker\varphi_\xi|_H|}} = \frac{|G|}{|H|} = |G : H|.$$

(d) Es ist zu zeigen, dass $\hat{K}$ für alle $\hat{g} \in \hat{G}$ eine Transversale von $(\langle\hat{K}\rangle \cap \hat{H})^{\hat{g}}\backslash\langle\hat{K}\rangle$ ist. Alle anderen Eigenschaften einer Loop-Hülle sind nach Konstruktion von $\hat{\xi}$ klar. Wir zeigen zunächst, dass jede der zu betrachtenden Nebenklassen einen Vertreter aus $\hat{K}$ enthält. Sind $\hat{g_1}, \hat{g_2} \in \langle\hat{K}\rangle$ beliebig, so existieren Elemente $g_1, g_2 \in \langle K\rangle \leqslant G$ mit $g_1\varphi_\xi = \hat{g_1}$ bzw. $g_2\varphi_\xi = \hat{g_2}$. Da ξ ein Loop-Folder ist, existiert also ein $k \in K$ mit $H^{g_1}g_2 = H^{g_1}k$, d. h. es gilt $g_1g_2 = hg_1k$ mit einem $h \in H$. Wegen $g_1, g_2, k \in \langle K\rangle$ ist sogar $h \in H \cap \langle K\rangle$. Wendet man nun auf beiden Seiten φ_ξ an, so folgt $\hat{g_1}\hat{g_2} = \hat{h}\hat{g_1}\hat{k}$ mit einem $\hat{h} := h\varphi_\xi \in \hat{H} \cap \langle\hat{K}\rangle$ und einem $\hat{k} := k\varphi_\xi \in \hat{K}$. Mit diesem $\hat{k}$ gilt dann $(\langle\hat{K}\rangle \cap \hat{H})^{\hat{g_1}}\hat{g_2} = (\langle\hat{K}\rangle \cap \hat{H})^{\hat{g_1}}\hat{k}$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $|\hat{K}| = |\langle\hat{K}\rangle : (\langle\hat{K}\rangle \cap \hat{H})|$ gilt:

$$\begin{array}{rcll} |\langle\hat{K}\rangle : (\langle\hat{K}\rangle \cap \hat{H})| & = & \frac{|\langle\hat{K}\rangle|}{|\langle\hat{K}\rangle\cap\hat{H}|} & \\ & = & \frac{|\langle\hat{K}\rangle|\cdot|\langle\hat{K}\rangle\cdot\hat{H}|}{|\langle\hat{K}\rangle|\cdot|\hat{H}|} & \\ & = & \frac{|\hat{G}|}{|\hat{H}|} & \text{wegen (b)} \\ & = & |\hat{G} : \hat{H}| & \\ & = & |G : H| & \text{wegen (c)} \\ & = & |K|, & \text{da } K \text{ eine Transversale von } H\backslash G \text{ ist} \\ & = & |\hat{K}| & \text{wegen (a).} \end{array}$$

(e) Da ξ eine Loop-Hülle ist, gilt $\langle K\rangle = G$ und damit

$$(\langle\hat{K}\rangle, \langle\hat{K}\rangle \cap \hat{H}, \hat{K}) = (\hat{G}, \hat{G} \cap \hat{H}, \hat{K}) = (\hat{G}, \hat{H}, \hat{K}).$$

Nach Definition der Hüte ist $\varphi_\xi : G \to \hat{G}$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, der $H\varphi_\xi = \hat{H}$ und $K\varphi_\xi = \hat{K}$ erfüllt.

□

(1.34)Lemma Für einen Loop L mit neutralem Element 1 gilt:

(a) $l(\epsilon(L)) = (H\backslash\mathrm{RM}(L), *)$ mit $H := \mathrm{Stab}_{\mathrm{RM}(L)}(1)$ und „$*$“ wie in (1.31);

(b) $HR(x) * HR(y) = HR(xy)$ für alle $x, y \in L$;

(c) die Abbildung $\varphi_L : L \to l(\epsilon(L)), x \mapsto HR(x)$ ist ein Loopisomorphismus;

(d) ist $\psi : L \to L'$ ein surjektiver Loophomomorphismus, dann gilt $l(\epsilon(\psi)) = \varphi_L^{-1}\psi\varphi_{L'}$ mit φ_L bzw. $\varphi_{L'}$ wie in (c);

(e) ist $\xi = (G, H, K)$ ein Loop-Folder, dann gilt $\epsilon(l(\xi)) = \hat{\xi}$ und $l(\xi) \cong l(\hat{\xi})$ mit $\hat{\xi}$ wie in (1.33); außerdem gilt $\epsilon(l(\pi)) = \varphi_\xi^{-1}\pi\varphi_{\xi'}$ für jeden surjektiven Morphismus $\pi : \xi \to \xi'$ von treuen Loop-Hüllen.

Beweis. (vgl. [Asc05, 1.7.]) (a) Folgt direkt aus den Definitionen von l und ϵ.

(b) Es ist $R(xy) \in HR(x)R(y)$ zu zeigen. Dieses folgt aus $1R(x)R(y) = xy = 1R(xy)$ und damit $R(xy)R(y)^{-1}R(x)^{-1} \in H$.

(c) Die Homomorphieeigenschaft von φ_L folgt aus (b), da für alle $x, y \in L$ gilt:

$$(x\varphi_L) * (y\varphi_L) = HR(x) * HR(y) = HR(xy) = (xy)\varphi_L.$$

Die Bijektivität von φ_L ist klar.

(d) Sei $x \in L$ beliebig. Nach Konstruktion wird $HR(x)$ durch $\epsilon(\psi)$ und durch $l(\epsilon(\psi))$ auf $HR(x\psi)$ abgebildet. Also gilt $(HR(x))l(\epsilon(\psi)) = HR(x\psi) = x\psi\varphi_{L'} = HR(x)\varphi_L^{-1}\psi\varphi_{L'}$.

(e) Es ist $\epsilon(l(\xi)) = (G', H', K')$ mit $K' = \{R(k) \mid k \in K\}$, $G' := \langle K' \rangle$ und $H' := \mathrm{Stab}_{\langle K' \rangle}(1)$. Dabei steht $R(k)$ für die Abbildung $Hg \mapsto Hgk \in \mathrm{RM}(l(\xi))$ für alle $g \in G$. Also ist $K' = K\varphi_\xi = \hat{K}$ und $G' = \hat{G}$.

Ist schließlich $x \in \mathrm{Stab}_{\langle K' \rangle}(1)$, dann hat x eine Darstellung $x = R(k_1) \cdots R(k_n)$ mit $k_1, \ldots, k_n \in K$ und es gilt

$$(((H1 * Hk_1) * Hk_2) * \cdots) * Hk_n = (((Hk_1 * Hk_2) * Hk_3) * \cdots) * Hk_n = H1.$$

Also folgt aus der Definition der Verknüpfung „$*$“

$$H(((k_1k_2)\cdots)k_n) = H.$$

Daraus folgt $((k_1k_2)\cdots)k_n \in H \cap \langle K \rangle$, d. h. $x = R(k_1)R(k_2)\cdots R(k_n) \in \hat{H} \cap \langle \hat{K} \rangle$. Ist umgekehrt $x \in \hat{H} \cap \langle \hat{K} \rangle$, dann existieren Elemente $k_1, \ldots, k_n \in H \cap \langle K \rangle$ mit $x = R(k_1)R(k_2)\cdots R(k_n)$ und es lässt sich obige Argumentation umkehren. Damit ist $\epsilon(l(\xi)) = \hat{\xi}$ und $l(\epsilon(l(\xi))) = l(\hat{\xi})$, woraus mit (c) die Behauptung $l(\xi) \cong l(\hat{\xi})$ folgt.

Wegen $\langle K' \rangle = G'$ genügt es für den Beweis der letzten Behauptung $R(k)\epsilon(l(\pi)) = R(k)\varphi_\xi^{-1}\pi\varphi_{\xi'}$ für alle $k \in K$ zu zeigen. Aus der Definition von ϵ, l und φ_ξ bzw. $\varphi_{\xi'}$ folgt $R(k)\epsilon(l(\pi)) = R(kl(\pi)) = R(k\pi) = k\pi\varphi_{\xi'} = k\varphi_\xi\varphi_\xi^{-1}\pi\varphi_{\xi'} = R(k)\varphi_\xi^{-1}\pi\varphi_{\xi'}$.

□

(1.35)Satz Es sei $\mathcal{X}$ die Kategorie der Loops mit den surjektiven Loophomomorphismen, und $\mathcal{F}$ die Kategorie der treuen Loop-Hüllen mit den surjektiven Morphismen von Loop-Hüllen. Die Funktoren $\epsilon : \mathcal{X} \to \mathcal{F}$ und $l : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$ erfüllen $l(\epsilon(X)) \cong X$ und $\epsilon(l(\xi)) \cong \xi$ für alle Objekte X aus $\mathcal{X}$ bzw. ξ aus $\mathcal{F}$. Ferner sind die Kategorien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{F}$ äquivalent, d. h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi_L"'] & L' \arrow[d, "\varphi_{L'}"] \\ l(\epsilon(L)) \arrow[r, "l(\epsilon(\psi))"'] & l(\epsilon(L')) \end{tikzcd}$$

kommutiert für alle $L, L' \in \operatorname{Ob} \mathcal{X}$ und alle $\psi \in \operatorname{Mor}(L, L')$, und das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\xi \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_\xi"'] & \xi' \arrow[d, "\varphi_{\xi'}"] \\
\epsilon(l(\xi)) \arrow[r, "\epsilon(l(\pi))"'] & \epsilon(l(\xi'))
\end{tikzcd}$$

kommutiert für alle $\xi, \xi' \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}$ und alle $\pi \in \operatorname{Mor}(\xi, \xi')$.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus (1.34)(c). Da ξ eine treue Loop-Hülle ist, ist der Homomorphismus φ aus (1.33) injektiv und damit nach (1.33)(e) ein Isomorphismus $\xi \to \hat{\xi}$. Also ist $\epsilon(l(\xi)) \cong \xi$ wegen (1.34)(e). Daraus folgt mit (1.34)(d) und (1.34)(e) auch die Äquivalenz der beiden Kategorien.

$\square$

Kapitel II

Vielfachheitsfreiheit von $\mathrm{M}(Q)$

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, dass Multiplikationsgruppen vielfachheitsfrei sind, d. h. dass $\mathbb{C}Q$ als $\mathbb{C}\mathrm{M}(Q)$-Modul in eine direkte Summe paarweise nicht-isomorpher einfacher Moduln zerfällt. Dazu wird zunächst in §1 die Struktur des sogenannten Vertauschungsrings näher untersucht, ehe dann in §2 mit Mitteln der Darstellungstheorie das gewünschte Ergebnis erzielt wird.

§1 Der Vertauschungsring

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der Ring aller $\mathbb{C}\mathrm{M}(Q)$-Endomorphismen von $\mathbb{C}Q$ für alle endlichen Quasigruppen Q kommutativ ist. Die Idee dieses Beweises folgt dabei im Großen und Ganzen [Jac04, 2.3.8–2.3.11] für spezielle Association Schemes.

Es operiert $\mathrm{M}(Q)$ transitiv auf Q. Für $g \in \mathrm{M}(Q)$ sei $X(g)$ die Matrix bezüglich der Basis Q von $\mathbb{C}Q$ des von g bewirkten Endomorphismus von $\mathbb{C}Q$, d. h. es ist

$$(X(g))_{\omega,\omega'} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega' = \omega g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

(2.1)Definition Der Ring $V(Q) := \mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathrm{M(Q)}}\mathbb{C}Q \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}Q$ heißt der *Vertauschungsring von Q.*

$V(Q)$ besteht also aus allen Matrizen $A \in \mathbb{C}^{|Q|\times|Q|}$, die mit allen $X(g)$'s vertauschen, d. h. $AX(g) = X(g)A$ für alle $g \in \mathrm{M}(Q)$.

(2.2)Bemerkung Die Abbildung

$$\rho : Q \times Q \to \mathrm{M}(Q), (q, q') \mapsto R(q\backslash q)^{-1}R(q\backslash q')$$

erfüllt für alle $q, q' \in Q$

(a) $q\rho(q, q') = q'$,

(b) $\rho(q, q) = 1$.

Beweis. (a) Für $q, q' \in Q$ ist

$$q\rho(q,q') = qR(q\backslash q)^{-1}R(q\backslash q') = qR(q\backslash q') = q \cdot (q\backslash q') = q'.$$

(b) Klar.

□

(2.3)Lemma Sei $q_1 \in Q$ fest gewählt und sei C_i, $1 \leqslant i \leqslant d$, definiert wie in (1.4). Weiter seien $C_i(q') := \{q \in Q \mid (q', q) \in C_i\}$ für $q' \in Q$ und

$$v_i := \sum_{q \in C_i(q_1)} \rho(q_1, q) \in \mathbb{C}\mathrm{M}(Q) \tag{II.1}$$

für $1 \leqslant i \leqslant d$. Ist $qv_ig = qgv_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant d, q \in Q$ und $g \in \mathrm{M}(Q)$, dann sind die Matrizen der $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen

$$\alpha_i : \mathbb{C}Q \to \mathbb{C}Q, u \mapsto uv_i \tag{II.2}$$

bezüglich der Basis Q von $\mathbb{C}Q$ genau die Adjazenzmatrizen $A^{(i)}$ und es gilt $A^{(i)}A^{(j)} = A^{(j)}A^{(i)}$ für alle $1 \leqslant i, j \leqslant d$.

Beweis. Wir müssen α_i auf die Elemente von Q anwenden. Für q_1 gilt wegen (2.2)(a)

$$\begin{aligned} q_1 v_i &= q_1 \sum_{q \in C_i(q_1)} \rho(q_1, q) \\ &= \sum_{q \in C_i(q_1)} q_1 \rho(q_1, q) \\ &= \sum_{q \in C_i(q_1)} q. \end{aligned} \tag{II.3}$$

Die Matrix von α_i hat demnach in der q_1 entsprechenden Zeile genau dann den Eintrag 1, wenn $(q_1, q) \in C_i$ ist, und 0 sonst.

Sei nun $q_1 \neq q' \in Q$. Für $g \in \mathrm{M}(Q)$ mit $q_1 g = q'$ folgt dann mit der Voraussetzung und II.3:

$$q'v_i = q_1 g v_i = q_1 v_i g = \left(\sum_{q \in C_i(q_1)} q \right) g = \sum_{q \in C_i(q_1)} qg.$$

Also ist in der Matrix von α_i der Eintrag (q', q'') genau dann 1, wenn gilt $q'' \in C_i(q_1)g = C_i(q_1 g) = C_i(q')$, d. h. $(q', q'') \in C_i$. Damit ist der erste Teil der Aussage bewiesen.

Mit $q \in Q$ ist wegen der Voraussetzung

$$\begin{aligned} qv_iv_j &= q \left(\sum_{q' \in C_i(q_1)} \rho(q_1, q') \right) \left(\sum_{q'' \in C_j(q_1)} \rho(q_1, q'') \right) \\ &= \sum_{q'' \in C_j(q_1)} qv_i \rho(q_1, q'') \\ &= \sum_{q'' \in C_j(q_1)} q\rho(q_1, q'')v_i \\ &= qv_jv_i. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\alpha_i\alpha_j = \alpha_j\alpha_i$. Damit vertauschen aber auch ihre Abbildungsmatrizen und diese sind nach der ersten Aussage genau die Adjazenzmatrizen von Q.

$\square$

Im Folgenden sei $H := \mathrm{Stab}_{\mathrm{M}(Q)}(q_1) := \{g \in \mathrm{M}(Q) \mid q_1 g = q_1\}$ der Stabilisator eines Elementes $q_1 \in Q$.

(2.4)Bemerkung Für festes $q_1 \in Q$ besitzt jedes $g \in \mathrm{M}(Q)$ eine eindeutige Darstellung $g = h\rho(q_1, q)$ mit einem $h \in H$ und einem $q \in Q$.

Beweis. Setze $q := q_1 g \in Q$ und $h := g\rho(q_1, q)^{-1}$. Es ist zu zeigen, dass q_1 von h stabilisiert wird. Es gilt mit $z := R(q_1\backslash q)$ wegen $q_1 z = q_1 \cdot (q_1\backslash q) = q = q_1 g$:

$$\begin{aligned} q_1 h &= q_1 g\rho(q_1, q_1 g)^{-1} \\ &= q_1 g R(q_1\backslash q_1 g)^{-1} R(q_1\backslash q_1) \\ &= q_1 z z^{-1} R(q_1\backslash q_1) \\ &= q_1 \cdot (q_1\backslash q_1) = q_1, \end{aligned}$$

womit die behauptete Existenz bewiesen ist. Seien nun $q' \in Q$ und $h' \in H$ mit $g = h'\rho(q_1, q')$. Die Eindeutigkeit obiger Darstellung folgt nun wegen $q = q_1 g = q_1 h'\rho(q_1, q') = q_1\rho(q_1, q') = q'$.

$\square$

(2.5)Lemma Sei $q_1 \in Q$ wieder fest gewählt und seien $l, s \in \mathbb{C}\mathrm{M}(Q)$ mit $q_1 l = q_1 s$. Dann gilt $xl = xs$ für alle $x \in \mathbb{C}\mathrm{M}(Q)$ mit $xh = x$ für alle $h \in H$.

Beweis. Sei $g \in \mathrm{M}(Q)$. Nach (2.4) existieren eindeutige Elemente $h \in H$ und $q \in Q$ mit $g = h\rho(q_1, q)$. Daher lässt sich l darstellen als

$$l = \sum_{q\in Q}\sum_{h\in H} \sigma_{h,q} h\rho(q_1, q)$$

mit $\sigma_{h,q} \in \mathbb{C}$. Analog kann man s schreiben als

$$s = \sum_{q\in Q}\sum_{h\in H} \sigma'_{h,q} h\rho(q_1, q)$$

mit $\sigma'_{h,q} \in \mathbb{C}$. Also ist mit (2.2)(a)

$$\begin{aligned} q_1 l &= \sum_{q\in Q}\sum_{h\in H} \sigma_{h,q} q_1 h\rho(q_1, q) \\ &= \sum_{q\in Q}\sum_{h\in H} \sigma_{h,q} q_1 \rho(q_1, q) \\ &= \sum_{q\in Q}\sum_{h\in H} \sigma_{h,q} q. \end{aligned}$$

Analog gilt

$$q_1 s = \sum_{q\in Q}\sum_{h\in H} \sigma'_{h,q} q.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun

$$\sum_{h \in H} \sigma_{h,q} = \sum_{h \in H} \sigma'_{h,q}$$

für alle $q \in Q$ und es folgt wegen $xh = x$

$$xl = \sum_{q \in Q} \left(\sum_{h \in H} \sigma_{h,q} \right) x\rho(q_1, q) = \sum_{q \in Q} \left(\sum_{h \in H} \sigma'_{h,q} \right) x\rho(q_1, q) = xs.$$

□

(2.6)Lemma Sei $q_1 \in Q$ fest und $v_i, 1 \leqslant i \leqslant d$, wie in II.1. Dann gilt $q_1 v_i h = q_1 v_i$ für alle $h \in H$.

Beweis. Aus II.3 folgt

$$q_1 v_i h = \sum_{q \in C_i(q_1)} qh.$$

Nun ist $q \in C_i(q_1)$, d. h. $(q_1, q) \in C_i$, genau dann, wenn $(q_1 h, qh) \in C_i$ ist. Da q_1 von h stabilisiert wird, ist dies gleichbedeutend mit $(q_1, qh) \in C_i$ und damit $qh \in C_i(q_1)$. Also gilt

$$q_1 v_i h = \sum_{q \in C_i(q_1)} qh = \sum_{q \in C_i(q_1)} q = q_1 v_i$$

wegen II.3.

□

(2.7)Satz Der Vertauschungsring $V(Q)$ ist kommutativ und die Abbildungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ wie in II.2 bilden eine $\mathbb{C}$-Basis von $V(Q)$.

Beweis. Seien $q \in Q$ und $g \in \mathrm{M}(Q)$ und sei v_i wie in II.1. Wir zeigen zunächst $\alpha_i \in V(Q)$, d. h. $qv_i g = qgv_i$. Sei dazu $q_1 \in Q$. Dann gilt wegen (2.2)(b):

$$\begin{aligned} qR(q_1\backslash q_1)^{-1}R(q_1\backslash q_1)g &= q\rho(q_1, q_1)g \\ &= qg \\ &= qg\rho(q_1, q_1) \\ &= qgR(q_1\backslash q_1)^{-1}R(q_1\backslash q_1). \end{aligned} \tag{II.4}$$

Die linke Seite obiger Gleichung lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} qR(q_1\backslash q_1)^{-1}R(q_1\backslash q_1)g &= ((qR(q_1\backslash q_1)^{-1}) \cdot (q_1\backslash q_1))g \\ &= ((q_1\backslash q_1)L(qR(q_1\backslash q_1)^{-1}))g \\ &= q_1 L(q_1)^{-1}L(qR(q_1\backslash q_1)^{-1})g \end{aligned}$$

und die rechte zu

$$\begin{aligned} qgR(q_1\backslash q_1)^{-1}R(q_1\backslash q_1) &= (qgR(q_1\backslash q_1)^{-1}) \cdot (q_1\backslash q_1) \\ &= (q_1\backslash q_1)L(qgR(q_1\backslash q_1)^{-1}) \\ &= q_1 L(q_1)^{-1}L(qgR(q_1\backslash q_1)^{-1}). \end{aligned}$$

Einsetzen in II.4 liefert

$$q_1L(q_1)^{-1}L(qR(q_1\backslash q_1)^{-1})g = q_1L(q_1)^{-1}L(qgR(q_1\backslash q_1)^{-1}).$$

Nach (2.6) sind damit die Voraussetzungen von (2.5) mit $x = q_1v_i$ erfüllt und es gilt

$$q_1v_iL(q_1)^{-1}L(qR(q_1\backslash q_1)^{-1})g = q_1v_iL(q_1)^{-1}L(qgR(q_1\backslash q_1)^{-1}).$$

Berücksichtigt man noch II.3, so wird die linke Seite zu

$$\begin{aligned}\sum_{x\in C_i(q_1)} xL(q_1)^{-1}L(qR(q_1\backslash q_1)^{-1})g &= \sum_{x\in C_i(q_1)} (q_1\backslash x)L(qR(q_1\backslash q_1)^{-1})g \\ &= \sum_{x\in C_i(q_1)} ((qR(q_1\backslash q_1)^{-1})\cdot(q_1\backslash x))g \\ &= \sum_{x\in C_i(q_1)} qR(q_1\backslash q_1)^{-1}R(q_1\backslash x)g \\ &= \sum_{x\in C_i(q_1)} q\rho(q_1,x)g = qv_ig\end{aligned}$$

und die rechte Seite zu

$$\begin{aligned}\sum_{x\in C_i(q_1)} xL(q_1)^{-1}L(qgR(q_1\backslash q_1)^{-1}) &= \sum_{x\in C_i(q_1)} (q_1\backslash x)L(qgR(q_1\backslash q_1)^{-1}) \\ &= \sum_{x\in C_i(q_1)} (qgR(q_1\backslash q_1)^{-1})\cdot(q_1\backslash x) \\ &= \sum_{x\in C_i(q_1)} qgR(q_1\backslash q_1)^{-1}R(q_1\backslash x) \\ &= \sum_{x\in C_i(q_1)} qg\rho(q_1,x) = qgv_i.\end{aligned}$$

Folglich ist $qv_ig = qgv_i$ und somit $\alpha_i \in V(Q)$.

Andererseits sind dann aber auch die Bedingungen von (2.3) erfüllt, sodass die α_i's linear unabhängig sind (die Adjazenzmatrizen haben disjunkte Träger). Es genügt also zu zeigen, dass $V(Q)$ von den α_i's erzeugt wird. Sei dazu $\varphi \in V(Q)$ und $(a_{q,q'})_{q,q'\in Q}$ die Matrix von φ bezüglich der Basis Q, d. h. es gilt $q\varphi = \sum_{q'\in Q} a_{q,q'}q'$. Daher ist für $g \in \mathrm{M}(Q)$

$$\sum_{q'\in Q} a_{q,q'}q'g = q\varphi g = qg\varphi = \sum_{q''\in Q} a_{qg,q''}q''.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert dann $a_{q,q'} = a_{qg,q'g}$ für alle $(q,q') \in Q\times Q$ und $g \in \mathrm{M}(Q)$. Die Matrix von φ ist also „konstant auf den Konjugiertenklassen“ und somit eine Linearkombination der Adjazenzmatrizen.

□

§2 Vielfachheitsfreiheit von M(Q)

In diesem Abschnitt wird bewiesen, dass Multiplikationsgruppen vielfachheitsfrei sind. Dazu werden zunächst einige Grundlagen aus der Darstellungstheorie benötigt. Es sei in diesem Abschnitt immer G eine endliche Gruppe und A eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra.

(2.8)Definition Eine *Darstellung* von A ist ein $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus

$$X : A \to \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Dabei ist n der *Grad* der Darstellung. Zwei Darstellungen X, Y von A heißen äquivalent, falls eine Matrix $Z \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit

$$X(a) = Z^{-1}Y(a)Z$$

für alle $a \in A$ existiert.

(2.9)Bemerkung Darstellungen von A stehen in engem Zusammenhang zu A-Rechtsmoduln. Wählt man für einen A-Modul M eine $\mathbb{C}$-Basis, dann ist

$$X : A \to \mathbb{C}^{\dim_{\mathbb{C}}(M)\times \dim_{C}(M)}, a \mapsto X(a)$$

eine Darstellung von A, wobei $X(a)$ die Matrix des von $a \in A$ bewirkten Endomorphismus von M bezüglich der gewählten Basis ist. Verschiedene Basen führen natürlich zu verschiedenen Darstellungen. Da die Abbildungsmatrizen dann aber für alle $a \in A$ simultan ähnlich sind, sind solche Darstellungen äquivalent.

Ist umgekehrt X eine Darstellung von A vom Grad n, so wird $\mathbb{C}^{1\times n}$ via $va := vX(a)$ für $v \in \mathbb{C}^{1\times n}$ und $a \in A$ zu einem A-Modul.

Aus der Definition äquivalenter Darstellungen folgt sofort, dass die zugehörenden A-Moduln isomorph sind. Ist φ ein Isomorphismus zwischen zwei A-Moduln M und N mit Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (nach Wahl von $\mathbb{C}$-Basen von M und N) und X bzw. Y die zugehörigen Darstellungen, dann ist $Z(a) := P^{-1}X(a)P$ eine Darstellung, die zu N gehört, d. h. X und Y sind äquivalent.

(2.10)Definition Sei X eine Darstellung von A. Falls X äquivalent zu einer Darstellung Y mit

$$Y(a) = \begin{pmatrix} X_1(a) & 0 \\ * & X_2(a) \end{pmatrix}$$

für alle $a \in A$, und falls der Grad von X_1 und X_2 jeweils größer als 0 ist, so heißt X *reduzibel*, ansonsten heißt X *irreduzibel*. Die Notation $X \sim X_1 + X_2$ bedeute, dass X äquivalent zu einer Darstellung Y wie oben ist.

(2.11)Bemerkung Aus (2.10) folgt, dass ein A-Modul M genau dann einfach ist, wenn die von ihm bewirkte Darstellung X irreduzibel ist. Ist nämlich $U \leqslant M$ ein Untermodul von M mit $\mathbb{C}$-Basis B, so nimmt X nach Ergänzung von B zu einer Basis von M die Gestalt

$$X(a) = \begin{pmatrix} X_1(a) & 0 \\ * & X_2(a) \end{pmatrix}$$

an, wobei X_1 die zur Basis B gehörende Darstellung von U und X_2 eine Darstellung von M/U ist. Ist umgekehrt X reduzibel, also von obiger Form, dann existiert ein Untermodul $U \leqslant M$, der X_1 bewirkt.

(2.12)Definition Ein Gruppenhomomorphismus $X : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ heißt *Darstellung* vom Grad n von G. Die Darstellung $G \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*, g \mapsto 1$ heißt *triviale Darstellung* von G.

(2.13)Bemerkung Ist X eine Darstellung der Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$, dann ist $X|_G$ eine Darstellung von G. Umgekehrt wird aus einer Darstellung X von G durch lineare Fortsetzung eine Darstellung von $\mathbb{C}G$, d. h.

$$X(\sum_{g\in G} a_g g) := \sum_{g\in G} a_g X(g).$$

(2.14)Definition Sei X eine Darstellung von G. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \chi : G & \to & \mathbb{C}, \\ g & \mapsto & \mathrm{Spur}(X(g)) \end{array}$$

heißt der *Charakter* von X. Ist X irreduzibel, dann heißt auch χ *irreduzibel.* Der zur trivialen Darstellung gehörende Charakter $1_G : G \to \mathbb{C}, g \mapsto 1$ heißt *trivialer Charakter* von G.

Isomorphe $\mathbb{C}G$-Moduln haben also identische Charaktere.

(2.15)Definition Ein A-Modul M heißt *halbeinfach*, falls für alle Untermoduln $U \leqslant M$ ein Untermodul $U' \leqslant M$ mit $M = U \oplus U'$ existiert.
Die Algebra A heißt *halbeinfach*, wenn A als A-Rechtsmodul halbeinfach ist.

Eine einfache Folgerung aus dieser Definition ist die Tatsache, dass Untermoduln und Faktormoduln halbeinfacher A-Moduln wieder halbeinfach sind.

Die folgenden Sätze besagen, dass jede Darstellung einer endlichen Gruppe vollständig in irreduzible Konstituenten zerfällt.

(2.16)Satz Ein endlich erzeugter A-Modul M ist genau dann halbeinfach, wenn er die direkte Summe einfacher A-Moduln ist.

Beweis. [Isa76, 1.10,1.11]. □

(2.17)Satz Die Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ ist für beliebige endliche Gruppe G halbeinfach.

Beweis. Direkte Folgerung aus dem Satz von Maschke (vgl. [AB95, S. 116]). □

(2.18)Satz Jeder endlich erzeugte $\mathbb{C}G$-Modul ist halbeinfach.

Beweis. [Isa76, 1.9]. □

Im Hinblick auf die Algorithmen in Kapitel IV ist es günstig, nicht mehr nur Moduln oder Darstellungen, sondern auch Charaktere zu betrachten.

(2.19)Definition und Bemerkung Eine Abbildung $\lambda : G \to \mathbb{C}$ heißt *Klassenfunktion*, wenn sie konstant auf den Konjugiertenklassen von G ist. Die Menge aller Klassenfunktionen bildet einen $\mathbb{C}$-Vektorraum mit den irreduziblen Charakteren von G als Basis (vgl. [AB95, 14, Proposition 10]).

(2.20)Bemerkung Für Klassenfunktionen λ und μ von G sei eine Abbildung durch

$$(\lambda, \mu) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda(g)\overline{\mu(g)}$$

definiert. Dann gilt:

(a) $(\cdot, \cdot)$ definiert ein Skalarprodukt auf dem Raum der Klassenfunktionen und die irreduziblen Charaktere bilden eine Orthonormalbasis (vgl. [Lan02, XVIII.5.2]).

(b) Nach [Isa76, 2.5] hat G nur endlich viele irreduzible Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_k$. Es gilt genau dann $\lambda = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_i$ für eine Klassenfunktion λ, wenn $(\lambda, \chi_i) = c_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant k$ gilt.

(2.21)Definition Es operiere G auf der Menge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Der $\mathbb{C}G$-Modul $\mathbb{C}\Omega$ heißt *Permutationsmodul* und die davon bewirkte Darstellung X von G die zur Operation gehörende *Permutationsdarstellung*, d. h. es ist

$$X(g)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega_i g = \omega_j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Charakter χ von X heißt *Permutationscharakter*. Es ist also $\chi(g) = |\{\omega \in \Omega \mid \omega g = \omega\}|$ für alle $g \in G$.

(2.22)Bemerkung Es seien G und Ω wie in (2.21). Für die Anzahl r der Bahnen von G auf Ω gilt

$$r = (\chi, 1_G),$$

wo χ der Permutationscharakter ist. Die Anzahl der Bahnen ist also gleich der Vielfachheit des trivialen Charakters in χ.

Beweis. [Isa76, 5.15].

□

(2.23)Lemma von Schur Für einen einfachen $\mathbb{C}G$-Modul V gilt $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(V) = \langle \mathrm{id}_V \rangle_{\mathbb{C}}$, d. h. ist $X : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine irreduzible Darstellung von G und ist $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $X(g)P = PX(g)$ für alle $g \in G$, dann ist $P = \lambda E_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis. [CR62, 27.3].

□

(2.24)Definition Seien $A = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ und $B \in K^{r \times s}$ für einen Körper K. Das *Kroneckerprodukt* $A \otimes B \in K^{nr \times ms}$ von A und B ist definiert als

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ & \ddots & \\ \vdots & a_{ij}B & \vdots \\ & \ddots & \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix}.$$

Nach diesen vorbereitenden Anmerkungen kann nun schließlich die Vielfachheitsfreiheit der Multiplikationsgruppen gezeigt werden. Im Beweis kommen dabei die Ideen aus [BI84, II.Theorem 1.4] zum Tragen.

(2.25)Satz Die Multiplikationsgruppe $\mathrm{M}(Q)$ einer Quasigruppe Q ist vielfachheitsfrei, d. h. der Permutationsmodul $\mathbb{C}Q$ zerfällt in paarweise nicht isomorphe einfache $\mathbb{C}\mathrm{M}(Q)$-Moduln.

Beweis. Wegen (2.9) und (2.11) genügt es zu zeigen, dass die Permutationsdarstellung X der transitiven Operation von $\mathrm{M}(Q)$ auf Q in paarweise nicht äquivalente irreduzible Darstellungen zerfällt. Wegen (2.22) ist der triviale Charakter von $\mathrm{M}(Q)$ genau einmal in dem zu X gehörenden Permutationscharakter enthalten. Seien $X_1 = 1_{\mathrm{M}(Q)}, \ldots, X_r$ die paarweise nicht äquivalenten irreduziblen Konstituenten von X. Weiter sei f_i der Grad von X_i und e_i die Vielfachheit von X_i in X, d. h. es ist $X \sim \sum_{i=1}^{r} e_i X_i$. Da $\mathrm{M}(Q)$ transitiv auf Q operiert, gilt also $e_1 = 1$. Da $\mathbb{C}\mathrm{M}(Q)$-Untermoduln con $\mathbb{C}Q$ $\mathbb{C}\mathrm{M}(Q)$-invariant sind, existiert dann eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_{|Q|}(\mathbb{C})$ mit

$$B(g) := U^{-1}X(g)U = \mathrm{diag}(X_1(g), \underbrace{X_2(g), \ldots, X_2(g)}_{e_2}, \ldots, \underbrace{X_r(g), \ldots, X_r(g)}_{e_r})$$

für alle $g \in \mathrm{M}(Q)$. Eine Matrix P kommutiert genau dann mit allen $B(g)$'s, wenn P die folgende Blockdiagonalgestalt hat:

$$P = \mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_r),$$

wobei $M_i \in \mathbb{C}^{e_i f_i \times e_i f_i}$ mit $\mathrm{diag}(\underbrace{X_i(g), \ldots, X_i(g)}_{e_i})$ kommutiert. Also hat jedes M_i eine Darstellung

$$M_i = \begin{pmatrix} M_{11}^{(i)} & \cdots & M_{1e_i}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{e_i 1}^{(i)} & \cdots & M_{e_i e_i}^{(i)} \end{pmatrix},$$

wobei für jedes i jedes $M_{jk}^{(i)} \in \mathbb{C}^{f_i \times f_i}$ mit allen $X_i(g)$'s kommutiert. Nach dem Lemma von Schur (2.23) gilt dann $M_{jk}^{(i)} = \lambda_{ijk} E_{f_i}$. Es ist also $M_i = N_i \otimes E_{f_i}$ mit einer beliebigen Matrix $N_i \in \mathbb{C}^{e_i \times e_i}$. Die Matrix P sieht damit folgendermaßen aus:

$$P = \mathrm{diag}(N_1, N_2 \otimes E_{f_1}, \ldots, N_r \otimes E_{f_r}). \tag{II.5}$$

Also besteht $U^{-1}V(Q)U$ aus Matrizen der Form II.5 und da $V(Q)$ nach (2.7) kommutativ ist, ist auch $U^{-1}V(Q)U$ kommutativ und es müssen folglich alle $N_i \in \mathbb{C}$ sein, d. h. $e_i = 1$ für alle $1 \leqslant i \leqslant r$.

□

(2.26)Bemerkung Die Aussage in (2.25) ist für einseitige Multiplikationsgruppen im Allgemeinen falsch. Betrachte dazu die Quasigruppe $Q := \{1, \ldots, 6\}$ mit der folgenden Verknüpfungstafel:

$\cdot$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	6	5	4	3
3	3	4	5	6	1	2
4	4	3	2	1	6	5
5	5	6	1	2	3	4
6	6	5	4	3	2	1

Dann ist

$$\chi : \mathrm{LM}(Q) \to \mathbb{C}, g \mapsto \begin{cases} 6, & \text{falls } g = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

der Permutationscharakter von $\mathrm{LM}(Q) = \langle (1,3,5)(2,4,6), (1,4)(2,3)(5,6) \rangle \cong S_3$.

Die irreduziblen Charaktere von LM(Q) sind gegeben durch

	1	g	h
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Dabei sind $1, g := (1,4)(2,3)(5,6)$ und $h := (1,3,5)(2,4,6)$ Vertreter der Konjugiertenklassen von LM(Q). Also ist LM(Q) wegen $\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3$ nicht vielfachheitsfrei.

Kapitel III

Der Satz von Cameron

In diesem Kapitel geht es darum, den Satz von Cameron zu beweisen, den dieser in [Cam92] präsentierte. Er besagt, dass fast alle Multiplikationsgruppen einer Quasigruppe der Ordnung n symmetrisch oder alternierend vom Grad n sind. Der Beweis wird hier nur für linke Multiplikationsgruppen geführt. Für rechte Multiplikationsgruppen geht dies analog und der beidseitige Fall folgt sofort.

Ist Q eine Quasigruppe mit $|Q| = n$ und $\mathrm{LM}(Q) \notin \{A_n, S_n\}$, so liegt $\mathrm{LM}(Q)$ in einer „maximalen" Untergruppe von S_n. Eine Untergruppe $H \leqslant S_n$ heiße in diesem Kapitel maximal, falls $K = A_n$ gilt, wann immer $H \lneqq K \lneqq S_n$ ist. Der erste Schritt ist also, eine untere Schranke für die Anzahl von Quasigruppen der Ordnung n herzuleiten. Dies wird im ersten Paragrafen über SDRs gemacht. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich dann mit dem Fall, dass $\mathrm{LM}(Q)$ primitiv ist, und der dritte mit dem imprimitiven Fall. In beiden Fällen wird eine obere Grenze für die Anzahl der Quasigruppen, für die $\mathrm{LM}(Q)$ (im-)primitiv ist, gegeben.

§1 Quasigruppen der Ordnung n

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Anzahl verschiedener Quasigruppen zu einer gegebenen Ordnung n. Da es aber sehr schwierig ist, eine geschlossene Darstellung hierfür zu finden (sind die ersten r Zeilen der Verknüpfungstafel einer Quasigruppe bekannt, so ist die Anzahl der Erweiterungen zu einer Quasigruppe keineswegs konstant, sondern von der speziellen Wahl dieser r Zeilen abhängig), wird hier nur eine untere Schranke angegeben.

(3.1)Definition Es seien T eine Menge und $T_1, \ldots, T_m$ Teilmengen von T. Ein *SDR* (system of distinct representatives) von $T_1, \ldots, T_m$ besteht aus Repräsentanten $x_1 \in T_1, \ldots, x_m \in T_m$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.

Eine $(r \times n)$-Matrix heißt ein lateinisches Rechteck, falls in jeder Zeile die Zahlen $1, \ldots, n$ vorkommen und die Spalten keine Zahl doppelt enthalten. Ist $r = n$, so heißt diese Matrix ein lateinisches Quadrat und ist nichts anderes als die Verknüpfungstafel einer Quasigruppe. Sind nun die $T_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, die Mengen derjenigen Zahlen aus $\{1, \ldots, n\}$, die in der i-ten Spalte eines $(r \times n)$-lateinischen Rechtecks R nicht vorkommen, dann entsprechen SDRs der T_i's genau den Erweiterungen von R zu einem $((r+1) \times n)$-lateinischen Rechtecks (vgl. [Hal86, S. 54]). Die Frage ist also, wie viele SDRs solch ein R mindestens besitzt. Zur Lösung dieser Frage wird der folgende Begriff benötigt.

(3.2)Definition Es seien K ein Körper und $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Die *Permanente* von A ist definiert als

$$\operatorname{per} A := \sum_{\pi\in S_n} a_{1,1\pi}\cdots a_{n,n\pi}.$$

Diese Definition erinnert an die Determinante einer Matrix und es lässt sich genau wie bei der Determinanten zeigen, dass die Permanente multilinear ist.

Es seien $T_1, \dots, T_n$ wieder definiert wie vor (3.2) und A die $(n \times n)$-Matrix mit den Einträgen a_{ij}, wobei $a_{ij} = 1$, falls $j \in T_i$, und 0 sonst. Für $\pi \in S_n$ betrachte die Summanden

$$f_\pi := \prod_{i=1}^{n} a_{i,i\pi}$$

der Permanenten von A. Es ist f_π genau dann ungleich 0, und dann gleich 1, wenn $a_{i,i\pi} = 1$, also $i\pi \in T_i$ für alle i. Das wiederum bedeutet, dass $1\pi, \dots, n\pi$ ein SDR von $T_1, \dots, T_n$ ist. Also ist die Permanente der Matrix A gleich der Anzahl von SDRs der T_i's.

Es ist $|T_i| = n - r$ für alle i, und daher sind auch alle Zeilensummen von A gleich $n - r$. Andererseits kommt jedes Element $i \in \{1, \dots, n\}$, in genau r Spalten von R vor und ist demnach in $n - r$ der Mengen T_i enthalten. Folglich sind auch die Spaltensummen von A alle gleich $n - r$. Es genügt also, die Permanente einer Matrix mit konstanten Zeilen- und Spaltensummen abzuschätzen. Für den Spezialfall einer doppelt stochastischen Matrix, d. h. einer Matrix, deren Zeilen- und Spaltensummen alle gleich 1 sind, formulierte van der Waerden 1926 eine entsprechende Vermutung, die gut 50 Jahre später nahezu zeitgleich von Falikman und Egorychev mit verschiedenen Ansätzen bewiesen wurde.

(3.3)Satz (van der Waerdens Vermutung) Sei A eine doppelt stochastische $(n\times n)$-Matrix. Dann gilt

$$\operatorname{per} A \geqslant \frac{n!}{n^n}.$$

Beweis. [Ego81], [Fal81].

□

Für Matrizen A mit konstanter Zeilen- und Spaltensumme $k := n - r$ gilt wegen der Multilinearität der Permanenten per $A \geqslant n!(k/n)^n$. Es gibt also mindestens ebenso viele Möglichkeiten, ein lateinisches Rechteck mit r Zeilen um eine Zeile zu erweitern. Insgesamt ergibt sich folgendes Korollar.

(3.4)Korollar Für die Anzahl $Q(n)$ von Quasigruppen der Ordnung n gilt

$$Q(n) \geqslant \prod_{k=1}^{n} n!\left(\frac{k}{n}\right)^n = \frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}}.$$

Beweis. Klar.

□

§2 Primitive Gruppen

In diesem Abschnitt wird untersucht, wieviele Quasigruppen der Ordnung n eine primitive, aber von S_n und A_n verschiedene linke Multiplikationsgruppe besitzen. Zu Beginn werden die benötigten Begriffe definiert.

(3.5)Definition Es sei G eine Gruppe, die auf einer Menge Ω transitiv operiere.

(a) $\Delta \subseteq \Omega$ heißt *Block*, falls Folgendes erfüllt ist:

  (i) $\Delta \neq \emptyset$

  (ii) Für alle $g \in G$ gilt $\Delta g = \Delta$ oder $\Delta g \cap \Delta = \emptyset$.

(b) G heißt *imprimitiv* auf Ω, falls ein Block Δ mit $|\Delta| > 1$ und $\Delta \neq \Omega$ existiert. Andernfalls heißt G *primitiv*.

Im Folgenden sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Der erste Satz besagt, dass primitive Gruppen „klein“ sind.

(3.6)Satz Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für jede primitive Gruppe G vom Grad $n \geqslant N$ mit $G \notin \{A_n, S_n\}$ gilt

$$|G| \leqslant 2^{n^{1/2+\varepsilon}}.$$

Dieser Satz wurde durch die Untersuchung kohärenter Konfigurationen von Babai [Bab81] im nicht zweifach transitiven Fall und von Pyber allgemein bewiesen. Diese Beweise benutzen dabei nicht die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen, mit deren Hilfe Cameron [Cam81] stärkere Schranken beweisen konnte.

Mit Hilfe dieser oberen Schranke kann auch die Anzahl der primitiven Gruppen abgeschätzt werden.

(3.7)Lemma Jede endliche Gruppe G besitzt ein Erzeugendensystem mit maximal $\log_2 |G|$ Elementen.

Beweis. Für zyklische Gruppen ist die Behauptung klar. Sei G eine nicht-zyklische Gruppe der Ordnung n und sei $1 \neq x_1 \in G$ beliebig. Setze $G_1 := \langle x_1 \rangle \lneqq G$. Es ist dann $|G_1| \geqslant 2$. Sind die Gruppen $G_1, \ldots, G_{i-1} = \langle x_1, \ldots, x_{i-1} \rangle \lneqq G$ konstruiert, dann wähle ein Element $x_i \in G \setminus G_{i-1}$ und setze $G_i := \langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i \rangle \leqslant G$. Dann ist $|G_i : G_{i-1}| \geqslant 2$ und es folgt mit Induktion $|G_i| \geqslant 2^i$. Dieses Verfahren bricht bei einem $n \in \mathbb{N}$ mit $G_n = G$ ab. Wegen $|G| = |G_n| \geqslant 2^n$ ist $\log_2 |G| \geqslant n$ und es ist also $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem von G mit maximal $\log_2 |G|$ Elementen.

□

(3.8)Lemma Für $n \geqslant N$ mit N wie in (3.6) existieren höchstens

$$(n!)^{n^{1/2+\varepsilon}}$$

primitive Gruppen vom Grad n, die verschieden von S_n und A_n sind.

Beweis. Sei G eine primitive Gruppe der Ordnung n, die verschieden von S_n und A_n ist. Nach (3.6) hat G maximal die Ordnung $2^{n^{1/2+\varepsilon}}$, und nach (3.7) existiert ein Erzeugendensystem von G mit maximal $n^{1/2+\varepsilon}$ Elementen. Da alle Erzeuger in S_n liegen, gibt es also für jeden Erzeuger $n!$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es somit maximal

$$(n!)^{n^{1/2+\varepsilon}}$$

Gruppen mit der gewünschten Eigenschaft.

□

Ist $H \leqslant S_n$ eine Untergruppe von S_n, dann existieren höchstens $|H|^n$ lateinische Quadrate mit $\mathrm{LM}(Q) \leqslant H$, da man für jede der n Zeilen eine der $|H|$ Permutationen aus H wählen kann. Daraus ergibt sich das folgende Ergebnis.

(3.9)Bemerkung Es sei $N \in \mathbb{N}$ wie in (3.6). Für $n \geqslant N$ gilt für die Anzahl $P(n)$ der Quasigruppen der Ordnung n, deren linke Multiplikationsgruppen primitiv, aber weder S_n noch A_n sind:

$$P(n) \leqslant (n!)^{n^{1/2+\varepsilon}} \cdot 2^{n^{3/2+\varepsilon}}.$$

Um den Grenzwert von $P(n)/Q(n)$ für $n \to \infty$ zu berechnen, werden noch die folgenden beiden Lemmata benötigt.

(3.10)Lemma Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! \geqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Beweis. Angenommen, die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(1 + 1/m)^m$ monoton wachsend gegen e konvergiert, gilt dann $(1 + 1/n)^n \leqslant e$. Multipliziert man beide Seiten mit $(n + 1)n^n/e^{n+1}$, so erhält man

$$(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \geqslant \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Es gilt also nach Annahme

$$(n+1)! = (n+1)n! \geqslant (n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \geqslant \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Da der Fall $n = 1$ klar ist, ist die Behauptung bewiesen.

□

(3.11)Lemma Für $0 < \varepsilon < \frac{e-2}{2e}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geqslant \left(\frac{2}{1-2\varepsilon}\right)^{\frac{2}{1-2\varepsilon}} =: x_0$$

gilt

$$\log n \leqslant n^{1/2-\varepsilon}.$$

Beweis. Die Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \log x$ und $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{1/2-\varepsilon}$ sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad g'(x) = \frac{1-2\varepsilon}{2x^{1/2+\varepsilon}}.$$

Sei nun $x \geqslant x_0$. Durch Potenzieren mit $(1-2\varepsilon)/2$ folgt

$$x^{1/2-\varepsilon} \geqslant \frac{2}{1-2\varepsilon}.$$

Nun werden noch beide Seiten mit $x^{1/2+\varepsilon}$ multipliziert und anschließend der Kehrwert gebildet und es folgt

$$f'(x) = \frac{1}{x} \leqslant \frac{1-2\varepsilon}{2x^{1/2+\varepsilon}} = g'(x)$$

für alle $x \geqslant x_0$.

Schließlich gilt $g(x_0) = 2/(1-2\varepsilon)$ und, unter Berücksichtigung der an ε gestellten Bedingungen,

$$f(x_0) = \frac{2}{1-2\varepsilon} \log \frac{2}{1-2\varepsilon} \leqslant \frac{2}{1-2\varepsilon} \log \frac{2}{1-\frac{e-2}{e}} = \frac{2}{1-2\varepsilon} = g(x_0).$$

Also ist $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \geqslant x_0$.

□

Damit sind alle notwendigen Vorarbeiten, um zu zeigen, dass der Fall einer Quasigruppe mit primitiver, aber weder alternierender noch symmetrischer linker Multiplikationsgruppe fast nie auftritt, erledigt.

(3.12)Satz Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0.$$

Beweis. Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ wie in (3.6) bzw. (3.11). Nach (3.4) und (3.9) gilt für $n \geqslant N$:

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \frac{P(n)}{Q(n)} &\leqslant \frac{(n!)^{n^{1/2+\varepsilon}} \cdot 2^{n^{3/2+\varepsilon}} \cdot n^{n^2}}{(n!)^{2n}} \\
&= \frac{2^{n^{3/2+\varepsilon}} n^{n^2}}{(n!)^{2n-n^{1/2+\varepsilon}}} \\
&\leqslant \frac{2^{n^{3/2+\varepsilon}} n^{n^2} e^{2n^2-n^{3/2+\varepsilon}}}{n^{2n^2-n^{3/2+\varepsilon}}} && \text{(III.1)} \\
&= \frac{2^{n^{3/2+\varepsilon}} e^{2n^2-n^{3/2+\varepsilon}}}{n^{n^2-n^{3/2+\varepsilon}}} \\
&\leqslant \frac{\exp(2n^2)}{\exp((n^2-n^{3/2+\varepsilon})\log n)} && \text{(III.2)} \\
&= \exp(2n^2 - n^2 \log n + n^{3/2+\varepsilon} \log n) \\
&\leqslant \exp(2n^2 - n^2 \log n + n^2) && \text{(III.3)} \\
&= \exp(n^2(3 - \log n)) \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,
\end{aligned}$$

wobei in III.1 und III.3 jeweils (3.10) bzw. (3.11) benutzt wurde und $e \geqslant 2$ in III.2 eingesetzt wurde.

□

§3 Imprimitive Gruppen

In diesem Abschnitt werden die gleichen Untersuchungen wie in §2 für maximale transitive, aber nicht primitive Untergruppen der S_n angestellt.

(3.13)Satz Es sei G eine Gruppe, die transitiv auf Ω operiere und $\Delta \subseteq \Omega$ ein Block. Sei ferner R ein Repräsentantensystem von $H \backslash G$, wobei $H := \mathrm{Stab}_G(\Delta)$ der Stabilisator von Δ in G sei. Dann gilt:

(a) $\Omega = \bigcup_{r \in R} \Delta r$ und $\Delta r \cap \Delta r' = \emptyset$ für $r \neq r'$,

(b) Δg ist ein Block für alle $g \in G$.

Beweis. (a) Sei $\omega \in \Omega$ und $\omega_0 \in \Delta$. Da G transitiv operiert, existiert ein $g \in G$ mit $\omega = \omega_0 g$. Ist weiter $g = hr$ mit einem $h \in H$ und einem $r \in R$, so folgt wegen $\omega = \omega_0 g \in \Delta g = \Delta hr = \Delta r$ die behauptete Darstellung von Ω.

Sind $r, r' \in R$ mit $\Delta r \cap \Delta r' \neq \emptyset$, dann ist auch $\Delta \cap \Delta r' r^{-1} \neq \emptyset$, d. h. $\Delta r' r^{-1} = \Delta$, da Δ ein Block ist. Also ist $r' r^{-1} \in H$ und folglich $r = r'$. Die Aussage in (b) ist eine direkte Folgerung aus (a).

□

Wegen (b) ist die nun folgende Definition sinnvoll.

(3.14)Definition Es operiere G transitiv auf Ω und es sei $\Delta \subseteq \Omega$ ein Block. Die Menge $\{\Delta g \mid g \in G\}$ ist eine Partition von Ω in Blöcke und heißt *Blocksystem*.

Ist nun $P := \{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ ein Blocksystem einer Permutationsgruppe G und $U \leqslant G$ eine Untergruppe, dann gilt $\Delta_i \cap \Delta_i u \in \{\emptyset, \Delta_i\}$ für alle $u \in U$ und alle $1 \leqslant i \leqslant k$, d. h. P ist auch ein Blocksystem von U. Also sind die maximalen Untergruppen von G, die imprimitiv operieren, genau die Stabilisatoren jedes erdenklichen nicht-trivialen Blocksystems (d. h. $1 < k < n$). Speziell für die symmetrische Gruppe gilt dann:

(3.15)Bemerkung Die maximalen, imprimitiven Untergruppen der S_n sind genau die Gruppen $H := \mathrm{Stab}_{S_n}(P)$, wobei P eine Partition von $\{1, \ldots, n\}$ in $k > 1$ Mengen $P_1, \ldots, P_k$ der Größe $|P_i| = m > 1$ bezeichnet.

(3.16)Bemerkung Die Stabilisatoren H aus (3.15) haben die Ordnung $(m!)^k k!$.

Beweis. Für $1 \leqslant i \leqslant n$ sei $P_i := \{p_{i1}, \ldots, p_{im}\}$. Für alle $h \in H$ definiere $\pi_h \in S_k$ durch $P_i h = P_{i\pi_h}$ sowie, für $1 \leqslant i \leqslant k$, $\varphi_{h,i} \in S_m$ durch

$$p_{ij} h = p_{i\pi_h, j\varphi_{h,i}}.$$

Dadurch wird eine Abbildung

$$\alpha : H \to S_k \times S_m^k, h \mapsto (\pi_h, \varphi_{h,1}, \ldots, \varphi_{h,k})$$

definiert. Sind $h, h' \in H$ mit $h\alpha = h'\alpha$, dann gilt

$$p_{ij} h = p_{i\pi_h, j\varphi_{h,i}} = p_{i\pi_{h'}, j\varphi_{h',i}} = p_{ij} h'$$

für alle $1 \leqslant i \leqslant k$ und alle $1 \leqslant j \leqslant m$. Folglich ist $h = h'$ und α injektiv. Sei umgekehrt $(\pi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in S_k \times S_m^k$. Dann definiere

$$\begin{array}{rlcl} h: & \{1, \ldots, n\} & \to & \{1, \ldots, n\} \\ & (i-1)m + j & \mapsto & (i\pi^{-1} - 1)m + j\varphi_{i\pi^{-1}} \end{array}$$

mit $1 \leqslant i \leqslant k$ und $1 \leqslant j \leqslant m$. Nach Konstruktion ist $h \in H$ mit $h\alpha = (\pi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k)$. Also ist α bijektiv und es folgt die Behauptung wegen $|S_k \times S_m^k| = k! \cdot (m!)^k$.

∎

Die Bahnen der Operation von S_n auf der Menge aller Partitionen von $\{1, \ldots, n\}$ mit gleich großen Teilen sind die Mengen $B_{m,k} := \{P \mid P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ Partition mit $|P_i| = m, 1 \leqslant i \leqslant k\}$ mit $km = n$. Für $k, m > 1$ gibt es also zu jeder Partition in k Mengen der Größe m genau $|S_n : H|$ maximale, imprimitive Untergruppen der S_n, wobei H wieder der Stabilisator einer solchen Partition sei.

Da die Stabilisatoren zweier Partitionen aus derselben Bahn konjugiert sind, gibt es für eine fest vorgegebene Partition P mit Stabilisator H demnach maximal

$$H(n) := |S_n : H| \cdot |H|^n = n! \cdot |H|^{n-1} = (mk)! \cdot (m!)^{k(mk-1)} \cdot (k!)^{mk-1}$$

Quasigruppen Q, für die $\mathrm{LM}(Q)$ in einer zu H konjugierten Gruppe enthalten ist. Da n höchstens n Teiler besitzt, gilt also

$$I(n) \leqslant n \cdot H(n) = mk \cdot (mk)! \cdot (m!)^{k(mk-1)} \cdot (k!)^{mk-1}, \tag{III.4}$$

wobei $I(n)$ die Anzahl derjenigen Quasigruppen der Ordnung n bezeichne, deren linke Multiplikationsgruppe imprimitiv ist.

Zur Berechnung des Grenzwertes von $I(n)/Q(n)$ sind zwei Fälle zu unterscheiden, da die Abschätzungen in (3.4) und III.4 für den Fall $k = 2$ zu schwach sind.

§3.1 $k \neq 2$

In diesem Abschnitt sei also $k \neq 2$ fest gewählt. Zur Berechnung des Grenzwertes werden noch die folgenden Bemerkungen benötigt. Die erste beinhaltet Stirlings Formel zur Abschätzung der vorkommenden Fakultäten nach oben bzw. nach unten, und die zweite berechnet mit der Regel von L'Hospital (vgl. [Heu01, 50.1]) den Grenzwert der am Ende des Beweises von (3.19) auftretenden Formel.

(3.17)Lemma (Stirlings Formel) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 \leqslant \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leqslant e^{1/(12n)}.$$

Beweis. [EK94, Example 22].

∎

(3.18)Bemerkung

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ hat die höheren Ableitungen

$$f^{(i)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} k(k-1) \cdot \dots \cdot (k+1-i)x^{k-i}, & \text{falls } 1 \leqslant i < k \\ k!, & \text{falls } i = k \\ 0, & \text{falls } i > k. \end{cases}$$

(b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(\frac{k}{e^{13/12}}\right)^{kx}$$

hat die Ableitungen

$$f^{(i)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c \cdot \left(\frac{k}{e^{13/12}}\right)^{kx}$$

für $i \geqslant 0$, wobei $0 < c \in \mathbb{R}$ eine von i abhängige positive Konstante ist.

(c) Es gilt

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m^k}{\left(\frac{k}{e^{13/12}}\right)^{mk}} = 0.$$

Beweis. Die Aussage aus (a) ist klar. In (b) ist der Fall $i = 0$ klar. Gilt die Behauptung für ein i, so ist

$$\begin{aligned} f^{(i+1)}(x) &= c \cdot \exp'(xk \log \frac{k}{e^{13/12}}) \\ &= c \cdot k \log \frac{k}{e^{13/12}} \cdot \left(\frac{k}{e^{13/12}}\right)^{kx}. \end{aligned}$$

Wegen $k \geqslant 3$ ist $k/e^{13/12} > 1$, also auch $ck \log \frac{k}{e^{13/12}} > 0$.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(\frac{k}{e^{13/12}}\right)^{kx}$. Aus (a) und (b) folgt mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{c\left(\frac{k}{e^{13/12}}\right)^{kx}} = 0,$$

da $k > e^{13/12}$.

□

(3.19)Satz Für festes $k \neq 2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I(n)}{Q(n)} = 0.$$

Beweis. Einsetzen von (3.4) und III.4 liefert

$$
\begin{aligned}
\frac{I(n)}{Q(n)} &\leqslant \frac{(m!)^{k(mk-1)}\cdot(k!)^{mk-1}\cdot mk}{((mk)!)^{mk-1}}\cdot\left(\frac{(mk)^{mk}}{(mk)!}\right)^{mk} \\
&\leqslant \frac{(m!)^{k(mk-1)}\cdot(k!)^{mk-1}\cdot mk}{((mk)!)^{mk-1}}\cdot\frac{e^{(mk)^2}}{\sqrt{2\pi km}^{mk}} \qquad \text{(III.5)}\\
&\leqslant \frac{\sqrt{2\pi m}^{k(mk-1)}\cdot\left(\frac{m}{e}\right)^{mk(mk-1)}\cdot e^{k(mk-1)/(12m)}\cdot(k!)^{mk-1}\cdot mke^{(mk)^2}}{((mk)!)^{mk-1}\cdot\sqrt{2\pi km}^{mk}} \qquad \text{(III.6)}\\
&= \frac{\sqrt{2\pi m}^{k(mk-1)-mk}\cdot\left(\frac{m}{e}\right)^{mk(mk-1)}\cdot(k!)^{mk-1}\cdot mk\exp\left((mk)^2+\frac{k(mk-1)}{12m}\right)}{((mk)!)^{mk-1}\cdot k^{mk/2}}\\
&= \frac{\sqrt{2\pi m}^{k(mk-1)-mk}\cdot m^{mk(mk-1)}\cdot(k!)^{mk-1}\cdot mk\exp\left(mk+\frac{k(mk-1)}{12m}\right)}{((mk)!)^{mk-1}\cdot k^{mk/2}}\\
&\leqslant \frac{\sqrt{2\pi m}^{k(mk-1)-mk}\cdot m^{mk(mk-1)}\cdot(k!)^{mk-1}\cdot mk\exp\left(m^2k^2+\frac{k(mk-1)}{12m}\right)}{\sqrt{2\pi mk}^{mk-1}\cdot(mk)^{mk(mk-1)}\cdot k^{mk/2}} \qquad \text{(III.7)}\\
&\leqslant \frac{\sqrt{2\pi m}^{mk^2}\cdot(k!)^{mk}\cdot m\exp\left(m^2k^2+\frac{k(mk-1)}{12m}\right)}{k^{m^2k^2-3/2}} \qquad \text{(III.8)}\\
&\leqslant \frac{\sqrt{2\pi}^{mk^2}\cdot m^{(mk^2)/2+1}\cdot(k!)^{mk}\cdot\exp\left(m^2k^2+\frac{k(mk-1)}{12m}\right)}{k^{mk(mk-1)}}\\
&= \left(\frac{\sqrt{2\pi}^{k}\cdot(k!)\cdot k\cdot m^{(mk^2+2)/(2mk)}\cdot\exp\left(mk+\frac{k(mk-1)}{12m^2k}\right)}{k^{mk}}\right)^{mk}\\
&\leqslant \left(\sqrt{2\pi}^{k}\cdot k\cdot k!\cdot\frac{m^k\exp(\frac{13}{12}mk)}{k^{mk}}\right)^{mk} \qquad \text{(III.9)}\\
&= \left(\sqrt{2\pi}^{k}\cdot k\cdot k!\cdot\frac{m^k}{\left(\frac{k}{e^{13/12}}\right)^{mk}}\right)^{mk} \overset{(3.18)}{\to} 0 \qquad \text{für } m\to\infty.
\end{aligned}
$$

Dabei wurde in III.5, III.6 und III.7 jeweils Stirlings Formel (3.17) eingesetzt. In III.8 wurde $mk^2 \geqslant (k-2)mk-k+1$ für alle $m\in\mathbb{N}$ benutzt und schließlich gilt III.9 wegen $(mk^2+2)/(2mk)\leqslant k$ und $1+k(mk-1)/(12m^3k^2)\leqslant 13/12$ für alle $m\in\mathbb{N}$.

□

§3.2 $k=2$

Nun wird der Fall behandelt, dass die linke Multiplikationsgruppe einer Quasigruppe imprimitiv mit einem zweielementigen Blocksystem ist. Dazu ist aber zunächst ein kleiner Streifzug durch einige Grundbegriffe der Graphentheorie vonnöten.

(3.20)Definition Ein Paar (V,E) heißt *Graph*, falls $\emptyset\neq V$ eine endliche Menge und $E\subseteq\{\{v_1,v_2\}\subseteq V \mid v_1\neq v_2\}$ ist. Die Elemente aus V heißen die *Ecken*, diejenigen aus E die *Kanten* von G. Eine Ecke $v\in V$ *inzidiert* mit einer Kante $\{v_1,v_2\}\in E$, falls $v\in\{v_1,v_2\}$. Zwei Ecken $v_1,v_2\in V$ heißen *adjazent*, wenn $\{v_1,v_2\}\in E$.

Der Graph (V, E) ist die *Vereinigung der Graphen* (V', E') und (V'', E''), falls $V = V' \cup V''$ und $E = E' \cup E''$ gilt. Diese Vereinigung heißt *disjunkt*, falls sowohl V' und V'' als auch E' und E'' disjunkt sind. Ist $|V| = n$ und $E = \{\{v_1, v_2\} \subseteq V \mid v_1 \neq v_2\}$, dann heißt $G_n := (V, E)$ der *vollständige Graph* auf n Punkten.

(3.21)Definition Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit* mit Bipartition A, B, falls nichtleere Teilmengen $A, B \subseteq V$ mit $A \cup B = V$ und $A \cap B = \emptyset$ existieren, sodass $E \subseteq \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B\}$ erfüllt ist.

(3.22)Definition Es seien $G = (V, E)$ ein Graph und $x \in V$. Der *Grad der Ecke* $x \in V$ ist definiert als $d_G(x) := |\{\{x, v\} \mid v \in V\} \cap E|$. Existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $d_G(x) = r$ für alle $x \in V$, so heißt der Graph r-regulär.

(3.23)Definition Falls in einem Graphen $G = (V, E)$ paarweise verschiedene Elemente $v_0, \ldots, v_r \in V$ mit $E' := \bigcup_{i=1}^{r} \{\{v_{i-1}, v_i\}\} \subseteq E$ existieren, dann heißt der Teilgraph $v_0 v_1 \cdots v_r := (\{v_0, \ldots, v_r\}, E')$ ein *Weg der Länge r in G*. Ist $v_0 \cdots v_r$ ein Weg in G und ist $\{v_r, v_0\} \in E$, dann ist der Teilgraph $v_0 \cdots v_r v_0 := (\{v_0, \ldots, v_r\}, E' \cup \{v_r, v_0\})$ ein *Kreis der Länge $r + 1$ in G*.

(3.24)Definition Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge $M \subseteq E$ heißt *Matching*, falls $m \cap m' = \emptyset$ für alle $m, m' \in M$ mit $m \neq m'$ ist. Ein Matching M von G heißt *perfektes Matching* von G, falls $V = \bigcup_{m \in M} m$ ist.

(3.25)Bemerkung Die Vereinigung zweier (nicht notwendig verschiedener) perfekter Matchings des vollständigen Graphen G_n ist eine disjunkte Vereinigung von Kreisen gerader Länge und Wegen der Länge 1.

Beweis. Seien M und M' zwei Matchings von $G_n = (V_n, E_n)$. Falls diese Matchings übereinstimmen, dann ist ihre Vereinigung, der Graph (V_n, M), die disjunkte Vereinigung von Wegen der Länge 1. Sei also nun $M \neq M'$ und $S := M \cap M'$. Dann ist die Vereinigung von M und M' die disjunkte Vereinigung der Graphen $G' := (V', S)$ und $G := (V, E)$ mit $V := V_n \setminus V'$, $E := E_n \setminus S$ und $V' := \{v \in V_n \mid \{v, w\} \in S \text{ für ein } w \in V_n\}$. Der Graph G' ist die disjunkte Vereinigung von Wegen der Länge 1, und der Graph G ist 2-regulär, da jede Ecke mit jeweils genau einer Kante aus den beiden Matchings inzidiert und diese verschieden sind. Nun genügt es zu zeigen, dass G die disjunkte Vereinigung von Kreisen gerader Länge ist.

Ist $v_0 \in V$ und $v_0 \cdots v_r$ ein längster von v_0 ausgehender Weg in G (dieser existiert wegen der Endlichkeit von V), so existiert wegen der 2-Regularität von G ein $0 \leqslant i < r$ mit $\{v_r, v_i\} \in E$. Wäre $i \neq 0$, so wäre $d_G(v_i) \geqslant 3$ ein Widerspruch. Also ist $v_0 \cdots v_r v_0$ ein Kreis. Durch analoge Argumentation für die noch nicht getroffenen Ecken erhält man, dass G eine disjunkte Vereinigung von Kreisen ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Kreise gerade Länge haben, dass also r wie oben ungerade ist. Ist $v_0 \cdots v_r v_0$ ein solcher Kreis, dann gilt ohne Einschränkung für $0 \leqslant i \leqslant r$ und $v_{r+1} := v_0$

$$\{v_i, v_{i+1}\} \in \begin{cases} M, & \text{falls } i \text{ gerade} \\ M', & \text{falls } i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wäre r gerade, dann wäre $\{v_0, v_1\}, \{v_r, v_0\} \in M$ ein Widerspruch. Die Kreise haben also gerade Länge.

□

(3.26)Definition Es seien $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$. Die Menge $N_G(v) := \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$ heißt die *Nachbarschaft von v in G*. Für eine Teilmenge $S \subseteq V$ ist $N_G(S) := \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ die Nachbarschaft von S.

(3.27)Satz (Heiratssatz) Es sei $G = (A \cup B, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition A, B. Es existiert genau dann ein Matching M von G mit $|M| = |A|$, wenn die Bedingung $|N_G(S)| \geqslant |S|$ für alle Teilmengen $S \subseteq A$ erfüllt ist.

Beweis. [JMT04, Theorem 14.3.7].

□

(3.28)Korollar Ist $r \in \mathbb{N}$ und $G = (A \cup B, E)$ ein r-regulärer, bipartiter Graph mit Bipartition A,B, dann ist $|A| = |B|$.

Beweis. Sei $\emptyset \neq S \subseteq A$. Ist $|S| \leqslant r$, dann ist $|S| \leqslant r = |N_G(v)| \leqslant |N_G(S)|$ mit einem beliebigen $v \in S$.

Sei nun $S \subseteq A$ mit $|S| > r$ und es gelte $|N_G(S')| \geqslant |S'|$ für alle $S' \subseteq A$ mit $|S'| < |S|$. Angenommen, es wäre $|N_G(S)| < |S|$, dann wäre $|N_G(S \setminus \{v_0\})| = |S \setminus \{v_0\}|$ und $N_G(v_0) \subseteq N_G(S \setminus \{v_0\})$ für beliebiges $v_0 \in S$. Sei $G' := (V', E')$ mit $V' := S \setminus \{v_0\} \cup N_G(S \setminus \{v_0\})$ und $E' := \{\{v_1, v_2\} \in E \mid v_1 \in S \setminus \{v_0\}\})$. Aus $|N_G(S \setminus \{v_0\})| = |S \setminus \{v_0\}|$ folgt wegen der r-Regularität von G

$$\sum_{x \in N_G(S \setminus \{v_0\})} d_{G'}(x) = \sum_{s \in S \setminus \{v_0\}} d_{G'}(s) = \sum_{s \in S \setminus \{v_0\}} d_G(s) = r \cdot |S \setminus \{v_0\}| = r \cdot |N_G(S \setminus \{v_0\})|.$$

Daraus folgt $d_{G'}(x) = r$ für alle $x \in N_G(S \setminus \{v_0\})$. Also kann v_0 zu keinem $x \in N_G(S \setminus \{v_0\})$ adjazent sein, da G r-regulär ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu $N_G(v_0) \subseteq N_G(S \setminus \{v_0\})$.

Damit erfüllt der Graph die Voraussetzungen von (3.27) und es existiert ein Matching M mit $|M| = |A|$, d. h. $|A| \leqslant |B|$. Vertauscht man in obiger Argumentation A und B, so erhält man ein Matching M' mit $|M'| = |B|$, also $|B| \leqslant |A|$.

□

(3.29)Bemerkung Für $m \in \mathbb{N}$ sei X die Menge derjenigen Permutationen auf $2m$ Punkten, deren Zykel alle gerade Länge haben (insbesondere gibt es keine Fixpunkte). Dann gilt

$$|X| = \prod_{i=1}^{m} (2i - 1)^2.$$

Beweis. Definiere

$$A := \{(M, M') \mid M, M' \text{ perfekte Matchings des vollständigen Graphen } G_{2m} = (\{1, \cdots, 2m\}, E_{2m})\},$$

$B := X$ sowie $V := A \cup B$. Nach (3.25) ist $M \cup M'$ für $(M, M') \in A$ die disjunkte Vereinigung von Wegen der Länge 1 und r Kreisen gerader Länge. Den Wegen der Länge 1 lässt sich eindeutig eine Transposition in der S_{2m} zuordnen. Des weiteren lassen sich jedem der r Kreise gerader Länge 2 Permutationen aus X zuordnen, nämlich für jede

Orientierung des Kreises eine. So werden also jedem Element aus A genau 2^r Elemente aus B zugeordnet.

Umgekehrt sei G für $\pi \in B$ diejenige disjunkte Vereinigung von Wegen der Länge 1 und r Kreisen gerader Länge, die den Zykeln von π entsprechen. Zu konstruieren sind nun alle Paare perfekter Matchings des vollständigen Graphen, deren Vereinigung G ergibt. Ist v_0v_1 ein Weg der Länge 1 in G, dann muss $\{v_0, v_1\}$ sowohl in M als auch in M' enthalten sein. Ist $v_0v_1 \cdots v_sv_0$ ein Kreis gerader Länge und $\{v_0, v_1\} \in M$, dann ist

$$\{v_i, v_{i+1}\} \in \begin{cases} M, & \text{falls } i \text{ gerade} \\ M', & \text{falls } i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die umgekehrte Aussage gilt, wenn $\{v_0, v_1\} \in M'$ ist. Da r solcher Kreise in G existieren, werden also jedem Element von B auch 2^r Elemente aus A zugeordnet. Der durch diese Zuordnungen entstehende bipartite Graph ist demnach 2^r-regulär und nach (3.28) gilt $|A| = |B| = |X|$.

Zu zeigen ist noch, dass der Graph G_{2m}

$$\prod_{i=1}^{m}(2i-1)$$

perfekte Matchings besitzt. Sei $w_1 \in \{1, \ldots, 2n\}$ beliebig und M ein perfektes Matching von G_{2m}. Dann existiert genau ein $w_2 \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \{w_1\}$ mit $\{w_1, w_2\} \in M$. Weiter ist $M' := M \setminus \{w_1, w_2\}$ ein perfektes Matching des vollständigen Graphen auf der Eckenmenge $\{1, \ldots, 2n\} \setminus \{w_1, w_2\}$. Nach Induktion existieren also

$$\prod_{i=1}^{m-1}(2i-1)$$

Möglichkeiten für M'. Da zudem noch $2m-1$ Wahlmöglichkeiten für w_2 existieren, folgt nun die Behauptung.

$\square$

Solche Permutationen, deren Zykel alle gerade Länge haben, kommen für großes $m \in \mathbb{N}$ im Wesentlichen nicht vor.

(3.30)Bemerkung Es sei X wie in (3.29). Dann gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|X|}{|S_{2m}|} = \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{2i}\right) = 0.$$

Beweis. Aus (3.29) und Stirlings Formel (3.17) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{|X|}{|S_{2m}|} &= \frac{(1\cdot 3\cdot \dots \cdot (2m-1))^2}{(2m)!} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{2m-1}{2m} \\
&= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \dots \cdot (2m-1)\cdot(2m)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\dots\cdot(2m)\cdot(2m)} \\
&= \frac{(2m)!}{2^{2m}\cdot(m!)^2} \\
&\leqslant \frac{2\sqrt{\pi m}\cdot\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}\cdot\exp(1/(24m))}{2^{2m}\cdot\left(\sqrt{2\pi m}\cdot\left(\frac{m}{e}\right)^m\right)^2} \\
&= \frac{2\sqrt{\pi m}\cdot 2^{2m}\cdot n^{2m}\cdot\exp(1/(24m))\cdot\exp(2m)}{2^{2m}\cdot\exp(2m)\cdot 2\pi m\cdot m^{2m}} \\
&= \frac{\exp(1/(24m))}{\sqrt{\pi m}} \to 0 \qquad \text{für } m\to\infty.
\end{aligned}$$

□

(3.31)Lemma Es sei Q eine Quasigruppe der Ordnung n, deren linke Multiplikationsgruppe ein Blocksystem mit zwei Elementen besitze. Dann vertauscht die Hälfte der Zeilen von Q (als Permutationen aufgefasst) die beiden Blöcke.

Beweis. Ohne Einschränkung seien die Elemente von Q mit $1,\dots,n$ bezeichnet sowie $P_1 := \{1,\dots,n/2\}$ und $P_2 := \{n/2+1,\dots,n\}$ die beiden Blöcke. Außerdem seien $\pi_1,\dots,\pi_n \in S_n$ die als Permutationen aufgefassten Zeilen von Q. Für jedes π_i gilt dann entweder $P_1\pi_i = P_1$ oder $P_1\pi_i = P_2$. Also vertauscht π_i genau dann die beiden Blöcke, wenn $1\pi_i \in P_2$ gilt. Da nach der Definition einer Quasigruppe auch in der ersten Spalte von Q jedes Element genau einmal auftritt, ist dies genau für die Hälfte der Zeilen von Q erfüllt.

□

(3.32)Lemma Bei der Hälfte aller Quasigruppen der Ordnung n, deren linke Multiplikationsgruppe ein Blocksystem mit zwei Elementen hat, vertauscht die erste Zeile die beiden Blöcke.

Beweis. Es sei G eine auf $\{1,\dots,n\}$ imprimitiv mit einem zweielementigen Blocksystem $\{P_1,P_2\}$ mit $1\in P_1$ operierende Gruppe. Setze

$$\mathcal{Q}_G := \{Q \mid Q \text{ Quasigruppe mit } \mathrm{LM}(Q) = G\}.$$

Die i-te Zeile eines solchen Q werde mit $\pi_{Q,i} \in S_n$ bezeichnet. Dann definiere

$$\mathcal{F}_G := \{Q \in \mathcal{Q}_G \mid 1\pi_{Q,1} \in P_1\}$$

und

$$\mathcal{V}_G := \{Q \in \mathcal{Q}_G \mid 1\pi_{Q,1} \in P_2\}.$$

Es ist also $\mathcal{F}_G$ die Menge derjenigen Quasigruppen aus $\mathcal{Q}_G$, deren erste Zeile die Blöcke fest lassen, während die erste Zeile der Quasigruppen aus $\mathcal{V}_G$ die Blöcke vertauschen.

Definiere nun einen bipartiten Graphen $(\mathcal{F}_G \cup \mathcal{V}_G, E)$ mit Bipartition $\mathcal{F}_G, \mathcal{V}_G$. Für $Q_1 \in \mathcal{F}_G$ und $Q_2 \in \mathcal{V}_G$ sei $\{Q_1, Q_2\} \in E$ genau dann, wenn Q_2 aus Q_1 durch Permutation der Zeilen hervorgeht.

Sei nun $Q_1 \in \mathcal{F}_G$ beliebig. Die erste Zeile jeder zu Q_1 adjazenten Quasigruppe Q_2 entspricht dann einer der nach (3.31) $n/2$ Zeilen von Q_1, die die Blöcke vertauschen. Die restlichen $n-1$ Zeilen von Q_2 entsprechen dann einer Permutation der übrigen $n-1$ Zeilen von Q_1. Da aber Permutation von Zeilen einer Quasigruppe die linke Multiplikationsgruppe nicht verändert, können diese $n-1$ Zeilen auch beliebig permutiert werden. Insgesamt hat also jedes $Q_1 \in \mathcal{F}_G$ den Grad $(n/2) \cdot (n-1)! = \frac{1}{2}n!$.

Eine analoge Argumentation zeigt auch, dass jedes $Q_2 \in \mathcal{V}_G$ den Grad $\frac{1}{2}n!$ hat, sodass der Graph $(\mathcal{F}_G \cup \mathcal{V}_G, E)$ regulär und bipartit ist. Aus (3.28) folgt dann, dass die erste Zeile der Hälfte der Quasigruppen mit gegebener Multiplikationsgruppe die Blöcke vertauscht. Die Behauptung folgt nun, indem man dieses Ergebnis auf jede imprimitive Gruppe mit zwei Blöcken anwendet.

□

(3.33)Lemma Jede Permutation $\pi \in S_n$ kommt als erste Zeile einer konstanten Anzahl von Quasigruppen vor.

Beweis. Es sei $\pi \in S_n$ beliebig. Definiere die Mengen

$$A := \{Q \mid Q \text{ Quasigruppe der Ordnung } n \text{, deren erste Zeile der Permutation id} \in S_n \text{ entspricht}\},$$

$$B := \{Q \mid Q \text{ Quasigruppe der Ordnung } n \text{, deren erste Zeile der Permutation } \pi \text{ entspricht}\}$$

und

$$E := \{(Q, Q') \in A \times B \mid Q' \text{ entsteht aus } Q \text{ durch Permutation der Spalten}\}.$$

Die Behauptung folgt jetzt aus (3.28), da der Graph $(A \cup B, E)$ bipartit und $n!$-regulär ist.

□

Nun kann auch bewiesen werden, dass der Fall einer Quasigruppe, deren linke Multiplikationsgruppe imprimitiv mit einem zweielementigen Blocksystem ist, für großes $n \in \mathbb{N}$ im Wesentlichen nicht eintritt.

(3.34)Korollar Im Fall $k = 2$ gilt mit $I(2m)$ und $Q(2m)$ wie in III.4 bzw. (3.4)

$$\lim_{m \to \infty} \frac{I(2m)}{Q(2m)} = 0.$$

Beweis. Wegen (3.32) hat die Hälfte der Quasigruppen, deren linke Multiplikationsgruppe zwei Blöcke besitzt, die Eigenschaft, dass ihre erste Zeile die beiden Blöcke vertauscht. Da genau dann eine m-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, 2m\}$ existiert, die von einer Permutation $\pi \in S_{2m}$ auf ihr Komplement abgebildet wird, wenn alle Zykel von π gerade Länge haben, entspricht die erste Zeile der Hälfte der Quasigruppen mit zweielementigem Blocksystem einer Permutation aus X wie in (3.29). Wegen (3.33) kommt jede Permutation aus S_{2m} als erste Zeile von x Quasigruppen vor und es gilt dann

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I(2m)}{Q(2m)} \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{2x|X|}{x|S_{2m}|} = \lim_{m\to\infty} \frac{2|X|}{|S_{2m}|} = 0$$

wegen (3.30).

□

Das Ziel dieses Kapitels folgt nun direkt.

(3.35)Korollar Fast alle linken Multiplikationsgruppen von Quasigruppen der Ordnung n sind symmetrisch oder alternierend auf n Punkten, d. h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{Q \mid Q \text{ Quasigruppe der Ordnung } n \text{ mit } \mathrm{LM}(Q) \notin \{S_n, A_n\}\}|}{Q(n)} = 0.$$

Beweis. Folgt direkt aus den Vorbemerkungen zu Kapitel III auf Seite 35, (3.12), (3.19) und (3.34).

□

Kapitel IV

Algorithmen

In diesem Kapitel werden die Algorithmen vorgestellt, die zu den Programmen im Anhang A und schließlich zu den Ergebnissen im Anhang B führen. Das Ziel ist es zu berechnen, welche Gruppen als Multiplikationsgruppen von Quasigruppen vorkommen. Wie vor (1.4) bemerkt, sind Multiplikationsgruppen transitiv. Da die transitiven Gruppen bis zum Grad 30 in GAP [GAP06] bis auf Konjugation bekannt sind, kann man sich also von vornherein auf Gruppen in dieser Bibliothek beschränken. Eine weitere notwendige Bedingung für die Existenz einer Quasigruppe Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$ für eine gegebene Gruppe G wurde in (2.25) hergeleitet. Es wurde gezeigt, dass G vielfachheitsfrei sein muss. Der erste Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich also mit der Frage, wie man dieses Kriterium bei einer Gruppe überprüfen kann. Im zweiten Abschnitt wird dann schließlich ein Algorithmus beschrieben, der konstruktiv zu einer gegebenen Gruppe eine bzw. alle Quasigruppen berechnet, die diese Gruppe als Multiplikationsgruppe haben, falls welche existieren.

§1 Vielfachheitsfreiheit

In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus entwickelt, der berechnet, ob eine gegebene transitive Gruppe G vielfachheitsfrei ist oder nicht. Dabei sei vorausgesetzt, dass die irreduziblen Charaktere dieser Gruppe bekannt sind bzw. berechnet werden können. Die theoretischen Grundlagen des Vorgehens wurden schon in §2 von Kapitel II gelegt. Dort wurde gezeigt, dass das Betrachten des zur Operation gehörenden Permutationsmoduls bzw. des entsprechenden Permutationscharakters äquivalent sind. Nach (2.20) hat G nur endlich viele irreduzible Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_k$ und es bilden diese eine $\mathbb{C}$-Basis des Raumes aller Klassenfunktionen. Der Permutationscharakter ϱ kann also zerlegt werden in

$$\varrho = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_k$$

mit $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da ϱ ebenfalls ein Charakter ist. Es genügt demnach zu überprüfen, ob $c_i \leqslant 1$ für alle $1 \leqslant i \leqslant k$ erfüllt ist. Dieses kann aber ebenfalls nach (2.20) durch Bilden aller Skalarprodukte (ϱ, χ_i) mit $1 \leqslant i \leqslant k$ berechnet werden. Damit ergibt sich insgesamt der folgende Algorithmus, der in A.1 implementiert ist.

(4.1) Algorithmus

Eingabe Eine transitive Gruppe G

Ausgabe **true**, falls G vielfachheitsfrei ist, **false** sonst.

1. Berechne den Permutationscharakter ϱ von G.
2. Berechne die irreduziblen Charaktere $\chi_1, \dots, \chi_k$ von G.
3. Führe für alle $1 \leqslant i \leqslant k$ folgende Schritte aus:
   (a) Berechne das Skalarprodukt $(\varrho, \chi_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varrho(g)\overline{\chi_i(g)}$.
   (b) Falls $(\varrho, \chi_i) > 1$, brich ab und gib **false** aus.
4. Gib **true** aus.

§2 Konstruktion von Quasigruppen

In diesem Abschnitt sollen nun zu einer gegebenen Gruppe G eine bzw. alle Quasigruppen Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$ konstruiert werden. Die Gruppe G sei ohne Einschränkung als Permutationsgruppe auf n Punkten gegeben und die Elemente der Quasigruppen seien mit $1, \dots, n$ bezeichnet. Diese beiden Algorithmen sind bis auf die Abbruchbedingung völlig identisch. Während der erste Algorithmus nach Berechnung einer gesuchten Quasigruppe abbricht, sucht der zweite weiter, bis alle Quasigruppen mit der gewünschten Eigenschaft berechnet wurden.

Sei also eine Gruppe G wie oben gegeben. Dann sind die Linkstranslationen einer etwaigen Quasigruppe Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$ Elemente aus G. Identifiziert man die Quasigruppe mit ihrer Verknüpfungstafel, so bedeutet das, dass alle Zeilen und Spalten, als Permutationen aufgefasst, Elementen aus G entsprechen. Ist nur ein lateinisches Rechteck gegeben, so stellt sich die Frage, ob dessen Spalten zu Elementen von G erweitert werden können.

(4.2) Definition Ein Tupel $s := (s_1, s_2, \dots, s_r)^t \in N^{r \times 1}$ mit $N := \{1, \dots, n\}$ und $1 \leqslant r \leqslant n$ heißt *erweiterbar bzgl.* $G \leqslant S_n$, falls ein $g \in G$ mit $ig = s_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant r$ existiert. Ist $r < n$, dann heißt ein Element $s_{r+1} \in N$ eine *Erweiterung von s bzgl. G*, falls $(s_1, \dots, s_r, s_{r+1})^t$ bzgl. G erweiterbar ist.

(4.3) Definition Ein lateinisches $(r \times n)$-Rechteck R mit $1 \leqslant r \leqslant n$ heißt *lateinisches Rechteck bzgl. der Gruppe G*, wenn jede als Permutation aufgefasste Zeile von R ein Element der Gruppe G ist und außerdem jede Spalte von R bzgl. G erweiterbar ist.

Die Strategie wird nun sein, sukzessive Zeilen zu allen lateinischen Rechtecken von G hinzuzufügen, bis eine Quasigruppe mit der gewünschten Eigenschaft gefunden wird.

§2.1 Erweiterungen

Es sei in diesem Abschnitt ein lateinisches $(r \times n)$-Rechteck R bzgl. G mit den Spalten $s_i := (s_{i1}, \ldots, s_{ir})$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ gegeben.

(4.4)Definition Für $r < n$ heißt ein Element $g \in G$ *Erweiterung* von R, falls ig für alle $1 \leqslant i \leqslant n$ eine Erweiterung von s_i bzgl. G ist.

Ist R' das lateinische Rechteck, das aus R durch Hinzufügen einer Erweiterung $g \in G$ von R entsteht, dann ist R' ein lateinisches Rechteck bzgl. G. Ist umgekehrt R' ein $(r+1) \times n$-lateinisches Rechteck bzgl. G, dessen ersten r Zeilen R entsprechen, dann entspricht die $(r+1)$-te Zeile von R' einer Erweiterung $g \in G$ von R. Also berechnet der folgende Algorithmus, der in A.3 implementiert ist, alle Möglichkeiten, R um eine Zeile zu einem lateinischen Rechteck R' von G zu erweitern.

(4.5)Algorithmus

Eingabe Eine Gruppe $G \leqslant S_n$; ein lateinisches $(r \times n)$-Rechteck R bzgl. G

Ausgabe Eine Liste aller Erweiterungen von R

1. Sei l_0 die Liste der Elemente von G.

2. Berechne für alle $1 \leqslant j \leqslant n$ die Liste l_j, die aus l_{j-1} durch Streichung aller Elemente $g \in l_{j-1}$, für die jg in der j-ten Spalte von R enthalten ist, hervorgeht.

3. Berechne für alle $1 \leqslant j \leqslant n$ die Liste l_{n+j}, die aus l_{n+j-1} durch Streichung aller Elemente $g \in l_{n+j-1}$, für die jg keine Erweiterungen von s_j ist, hervorgeht.

4. Gib die Liste l_{2n} aus.

Der zweite Schritt des obigen Algorithmus dient der Laufzeitverbesserung, da nur noch die Elemente aus G im dritten Schritt betrachtet werden müssen, die R zu einem lateinischen Rechteck erweitern.

§2.2 Konstruktion einer Quasigruppe

In diesem Abschnitt soll zu einer gegebenen, auf n Punkten operierenden Permutationsgruppe G die Verknüpfungstafel einer Quasigruppe Q mit den Elementen $\{1, \ldots, n\}$ und $\mathrm{M}(Q) = G$ berechnet werden. Die Strategie für dieses Unterfangen ist es, so lange Erweiterungen lateinischer Rechtecke von G zu berechnen, bis ein lateinisches Quadrat mit der gewünschten Eigenschaft entsteht oder alle Möglichkeiten nicht zum Ziel führen. Dies leistet der folgende, in A.5 implementierte Algorithmus.

(4.6) Algorithmus

Eingabe Eine Permutationsgruppe G und die Anzahl n der Punkte, auf denen G transitiv operiert

Ausgabe Eine Quasigruppe Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$, falls eine solche existiert

- Initialisiere zunächst ein lateinisches $(1 \times n)$-Rechteck, dessen einzige Zeile einem beliebigen Element von G entspricht.
- Berechne nun mit (4.5) alle Kandidaten für die zweite Zeile und erweitere das Rechteck um den ersten Kandidaten (bei willkürlicher Sortierung der Kandidaten). Man erhält so ein lateinisches $(2 \times n)$-Rechteck von G. Fährt man so fort, erhält man schließlich ein lateinisches $(i \times n)$-Rechteck R_i von G, für das es keine Erweiterungen mehr gibt oder für das alle Erweiterungen im Verlauf des Algorithmus schon betrachtet worden sind.
  - Ist $i < n$, dann ist R_i nicht zu einer Quasigruppe Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$ erweiterbar. Lösche also die letzte Zeile und fahre in der $(i-1)$-ten Zeile mit dem nächsten Kandidaten fort.
  - Ist $i = n$, dann ist R_n die Verknüpfungstafel einer Quasigruppe Q mit $\mathrm{M}(Q) \leqslant G$, da nach Konstruktion alle Zeilen und Spalten von Q Elementen aus G entsprechen.
    * Falls $|G| \leqslant |\mathrm{M}(Q)|$ gilt, ist eine Quasigruppe mit gewünschter Multiplikationsgruppe konstruiert, sodass der Algorithmus hier abgebrochen werden kann.
    * Gilt $|G| \nleqslant |\mathrm{M}(Q)|$, dann ist es nicht notwendig, in der letzten Zeile neue Kandidaten zu testen, da diese durch die ersten $n-1$ Zeilen eindeutig bestimmt ist. Gehe also zurück in die vorletzte Zeile und teste dort den nächsten Kandidaten.
- Sind alle Kandidaten (also alle Elemente von G) für die erste Zeile vergeblich getestet worden, so bricht der Algorithmus ohne Erfolg ab.

Da nach (3.35) fast alle Multiplikationsgruppen von Quasigruppen der Ordnung n symmetrische oder alternierende Gruppen auf n Punkten sind, sind solche Quasigruppen relativ schnell zu konstruieren. In diesem Fall ist es also besser, auf den dritten Schritt in Algorithmus (4.5) zu verzichten, da dieser für große Gruppen sehr aufwändig ist. Da für $G = A_n$ die Spalten einer konstruierten Quasigruppe Q nicht mehr notwendigerweise Elementen der A_n entsprechen, ist dann allerdings nicht mehr gewährleistet, dass die Multiplikationsgruppe von Q eine Untergruppe von A_n ist, und es muss in diesem Fall in (4.6) die Abfrage $|G| \leqslant |\mathrm{M}(Q)|$ durch $G = \mathrm{M}(Q)$ ersetzt werden. Ist aber $G \notin \{A_n, S_n\}$, dann bringt der dritte Schritt von (4.5) eine substanzielle Laufzeitverbesserung mit sich.

§2.3 Konstruktion aller Quasigruppen

Dieser Abschnitt dient der Vollständigkeit. Es sollen nun alle Quasigruppen mit einer gegebenen Multiplikationsgruppe konstruiert werden. Wie zuvor bemerkt, unterscheidet er sich von (4.6) nur in der Abbruchbedingung. Er sei hier aber dennoch aufgelistet. Die Implementierung findet sich in A.6.

(4.7) Algorithmus

Eingabe Eine Permutationsgruppe G und die Anzahl n der Punkte, auf denen G transitiv operiert

Ausgabe Alle Quasigruppen Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$, falls solche existieren

- Initialisiere zunächst ein lateinisches $(1 \times n)$-Rechteck, dessen einzige Zeile einem beliebigen Element von G entspricht.
- Berechne nun mit (4.5) alle Kandidaten für die zweite Zeile und erweitere das Rechteck um den ersten Kandidaten (bei willkürlicher Sortierung der Kandidaten). Man erhält so ein lateinisches $(2 \times n)$-Rechteck von G. Fährt man so fort, erhält man schließlich ein lateinisches $(i \times n)$-Rechteck R_i von G, für das es keine Erweiterungen mehr gibt oder für das alle Erweiterungen im Verlauf des Algorithmus schon betrachtet worden sind.
  - Ist $i < n$, dann ist R_i nicht zu einer Quasigruppe Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$ erweiterbar. Lösche also die letzte Zeile und fahre in der $(i-1)$-ten Zeile mit dem nächsten Kandidaten fort.
  - Ist $i = n$, dann ist R_n die Verknüpfungstafel einer Quasigruppe Q mit $\mathrm{M}(Q) \leqslant G$, da nach Konstruktion alle Zeilen und Spalten von Q Elementen aus G entsprechen.
    - Falls $|G| \leqslant |\mathrm{M}(Q)|$ gilt, ist eine Quasigruppe mit gewünschter Multiplikationsgruppe konstruiert und es kann diese gespeichert werden.
  - Da die letzte Zeile durch die ersten $n-1$ Zeilen eindeutig bestimmt ist, ist es nicht notwendig, weitere Kandidaten fuer diese zu testen. Gehe also zurück in die vorletzte Zeile und teste dort den nächsten Kandidaten.
- Sind alle Kandidaten (also alle Elemente von G) für die erste Zeile getestet worden, so bricht der Algorithmus mit der Ausgabe aller gespeicherten Quasigruppen ab.

Die Bemerkungen nach (4.6) treffen natürlich auch auf (4.7) zu.

Anhang A

GAP-Routinen

In diesem Abschnitt werden die in Kapitel IV beschriebenen Algorithmen in GAP [GAP06] implementiert. Das erste Programm bezieht sich auf Algorithmus (4.1) und berechnet, ob eine gegebene Permutationsgruppe vielfachheitsfrei ist. Die Forderung, dass die Gruppe als Permuationsgruppe gegeben ist, stellt aber keine Einschränkung dar, da jede Gruppe mittels des Pakets SONATA [Son07] und des Befehls `AsPermGroup` in eine Permutationsgruppe umgewandelt werden kann.

Eingabe:	Eine Permutationsgruppe `grp`
Ausgabe:	`true`, falls `grp` vielfachheitsfrei ist, `false` sonst
Benötigte Pakete:	Keine

```
IsMultFree := function(grp)

  local NC, i, irrs, IrrCh, mul;

  # Permutationscharakter verschaffen
  NC := NaturalCharacter(grp);
  # die irreduziblen Charaktere der Gruppe berechnen
  IrrCh := Irr(grp);
  irrs := Length(IrrCh);

  for i in [1..irrs] do
    # Vielfachheit jedes irreduziblen Charakters
    # im Permutationscharakter berechnen
    mul := ScalarProduct(NC,IrrCh[i]);

    if mul > 1 then
      # irreduziblen Charakter gefunden, der mehrfach
      # im Permutationscharakter enthalten ist
      return false;
    fi;

  od;

  # jeder irreduzible Charakter ist hoechstens einmal im
```

```
  # Permutationscharakter enthalten, also Gruppe
  # vielfachheitsfrei
  return true;

end;
```

Programmcode A.1: IsMultFree.g

Es folgen drei Programme, die für die Berechnungen von Quasigruppen mit gegebener Multiplikationsgruppe in A.5 und A.6 von Bedeutung sind. Die ersten beiden berechnen alle Erweiterungen eines gegebenen lateinischen Rechtecks bzgl. einer Gruppe. Hat man auf diese Weise sukzessive Zeilen zu einem lateinischen Rechteck hinzugefügt, so erhält man schließlich ein lateinisches Quadrat, also die Verknüpfungstafel einer Quasigruppe, von der nur noch überprüft werden muss, ob sie die gewünschte Multiplikationsgruppe hat. Dieses wird in A.4 unternommen.

Eingabe:	Eine Spalte `col` eines lateinischen Rechtecks, eine Zahl `el`, eine Liste `groupels`, die die Permutationen einer Gruppe enthält
Ausgabe:	**true**, falls `el` eine Erweiterung von `col` bzgl. der Gruppe mit den Elementen `groupels` im Sinne von (4.2) ist; **false** sonst
Benötigte Pakete:	Keine

```
HasExtension := function(col,el,groupels)

  local g,len,i,help;

  help := ShallowCopy(col);
  Add(help,el);
  len := Length(help);

  for g in groupels do
    for i in [1..len] do
      if i^g <> help[i] then
        # Dieses Element erweitert die Spalte nicht,
        # probiere sofort neues
        break;
      elif i = len then
        return true;
      fi;
    od;
  od;

  return false;

end;
```

Programmcode A.2: HasExtension.g

Eingabe:	Eine Liste `els` von Permutationen und ein lateinisches Rechteck `mat`
Ausgabe:	Eine Liste aller Erweiterungen von `mat` im Sinne von (4.4)
Benötigte Pakete:	Keine

```
Candidates := function(els,mat)

  local transp,j,deg,col,groupels;

  groupels := els;
  # Anzahl der Punkte, auf denen operiert wird
  deg := Length(mat[1]);

  # Matrix transponieren, damit die Elemente von
  # <transp> die Spalten von <mat> sind
  transp := TransposedMat(mat);

  # Spaltenweise alle Elemente entfernen, die <j>
  # auf ein Element abbilden, das schon in der
  # <j>-ten Spalte vorhanden ist
  for j in [1..deg] do
    els := Filtered(els,x-> not (j^x in transp[j]));
  od;

  # nun noch alle Elemente entfernen, die in einer Spalte
  # dazu fuehren, dass diese nicht mehr zu einem Element
  # der Gruppe erweitert werden kann
  for j in [1..deg] do
    col := transp[j];
    els := Filtered(els,x->HasExtension(col,j^x,groupels));
  od;

  # nun stehen in <els> genau diejenigen
  # Permutationen, die <mat> zu einem um eine
  # Zeile groesseren lateinischen Rechteck
  # erweitern
  return els;

end;
```

Programmcode A.3: Candidates.g

Eingabe:	Ein lateinisches Quadrat `matrix` und eine Gruppe `group`
Ausgabe:	**true**, falls M(`matrix`)=`group` gilt, **false** sonst
Benötigte Pakete:	LOOPS [Loo06]

```
AreWeHappy := function(matrix,group)

  local qgrp,mgrp;
```

```

  # <matrix> als Quasigruppe auffassen
  qgrp := QuasigroupByCayleyTable(matrix);
  # und Multiplikationsgruppe berechnen
  mgrp := MultiplicationGroup(qgrp);

  # Nach Konstruktion ist <mgrp> eine Untergruppe von
  # <group>; pruefe also nur die Ordnung
  return Size(mgrp) >= Size(group);

end;
```

Programmcode A.4: AreWeHappy.g

Nun kann auch das Hauptprogramm implementiert werden, das eine Quasigruppe mit gegebener Multiplikationsgruppe zu berechnen trachtet und dafür wie in (4.6) beschrieben vorgeht.

Eingabe:	Eine Permutationsgruppe `group`, die auf `deg` Punkten operiert
Ausgabe:	Die Verknüpfungstafel einer Quasigruppe der Ordnung `deg` mit `group` als Multiplikationsgruppe, falls eine solche existiert, die leere Liste `[]`, falls keine existiert
Benötigte Pakete:	LOOPS [Loo06]

```
GenerateQuasigroup := function(group,deg)

  local els,i,mat,nrs,len,j,cand, numcand;

  els := Elements(group);
  len := Length(els);
  # in der Variablen <i> wird gespeichert, welche
  # Zeile des zu konstruierenden lateinischen
  # Quadrats gerade betrachtet wird
  i := 1;
  # in der Variablen <mat> soll sukzessive die
  # Verknuepfungstafel einer Quasigruppe aufgebaut
  # werden
  mat := [];
  # in der Variablen <nrs> wird gespeichert, welche
  # Permutationen aus <group> in welcher Zeile in
  # Frage kommen
  nrs := [];

  # <cand> enthaelt alle Kandidaten fuer jede Zeile
  cand := [];
  numcand := [];

```

```
# initialisiere <nrs> mit dem ersten Element fuer
# jede der <deg> Zeilen; ausserdem ist zunaechst jedes
# Element ein Kandidat fuer jede Zeile
for j in [1..deg] do
  nrs[j] := 1;
  cand[j]:=[];
  cand[j] := els;
  numcand[j] := len;
od;

while nrs[1] <= len do

  if i > 1 and numcand[i] = len then
    # existiert schon eine Zeile in <mat>, so
    # berechne alle Kandidaten, die <mat> zu einem
    # <i>x<deg>-lateinischen Rechteck erweitern,
    # falls noch nicht geschehen
    cand[i] := Candidates(els,mat);
    numcand[i] := Length(cand[i]);
  fi;

  # schreibe den <nrs>[<i>]-ten Kandidaten in die
  # i-te Zeile, falls dieser existiert
  if nrs[i] <= numcand[i] then
    mat[i] := [];

    for j in [1..deg] do
      mat[i][j] := j^cand[i][nrs[i]];
    od;

    if i = deg then
      # an dieser Stelle ist <mat> ein lateinisches
      # Quadrat; falls die Multiplikationsgruppe
      # wie gewuenscht ist, gib <mat> aus und
      # brich ab
      if AreWeHappy(mat,group) then
        return mat;
      else
        # die Multiplikationsgruppe ist nicht
        # wie gewuenscht; da die letzte
        # Zeile aber durch die anderen
        # eindeutig bestimmt ist, ist es
        # nicht notwendig, hier andere
        # Elemente zu testen; gehe also
        # direkt zurueck zur vorletzten
        # Zeile und loesche die letzten beiden
        # Zeilen
        Remove(mat);
        Remove(mat);
```

```
          i := i-1;
          # Kandidat fuer vorletzte Zeile
          # aendern
          nrs[i] := nrs[i]+1;
          # letzte Zeile wieder offen
          nrs[deg] := 1;
          cand[deg] := els;
          numcand[deg] := len;
        fi;

      else
        # <mat> ist noch kein lateinisches
        # Quadrat, gehe also in die naechste
        # Zeile
        i := i+1;
      fi;

    else
      # an dieser Stelle sind alle Kandidaten fuer die
      # <i>-te Zeile ausprobiert, d.h. mit der speziellen
      # Wahl der ersten <i>-1 Zeilen gibt es keine
      # moegliche Wahl fuer die <i>-te Zeile, die <mat>
      # zu einem lateinischen Rechteck macht
      if i = 1 then
        # in diesem Fall gibt es also keine
        # Quasigruppe mit den gewuenschten
        # Eigenschaften
        return [];
      else
        # ansonsten letzte Zeile loeschen und
        # wieder vorherige mit dem naechsten
        # Kandidaten betrachten
        Remove(mat);
        i := i-1;
        nrs[i] := nrs[i] + 1;
        # alle folgenden Zeilen wieder offen lassen
        for j in [i+1..deg] do
          nrs[j] := 1;
          cand[j] := els;
          numcand[j] := len;
        od;

      fi;

    fi;

  od;

  return [];
```

```
end;
```

Programmcode A.5: GenerateQuasigroup.g

Der Vollständigkeit halber sei auch noch der folgende Code hier aufgelistet, der nach allen Quasigruppen mit gegebener Multiplikationsgruppe dürstet. Der Weg zu diesem Glück ist in (4.7) kartographiert.

Eingabe:	Eine Permutationsgruppe `group`, die auf `deg` Punkten operiert
Ausgabe:	Eine Liste, die die Verknüpfungstafeln aller Quasigruppen der Ordnung `deg` mit `group` als Multiplikationsgruppe enthält, falls solche existieren, die leere Liste `[]`, falls keine existiert
Benötigte Pakete:	LOOPS [Loo06]

```
GenerateAllQuasigroups := function(group,deg)

  local els,i,mat,nrs,len,j,cand,numcand,res;

  # in der Variablen <res> sollen alle gefundenen
  # Loesungen abgespeichert werden
  res := [];
  els := Elements(group);
  len := Length(els);
  # in der Variablen <i> wird gespeichert, welche
  # Zeile des zu konstruierenden lateinischen Quadrats
  # gerade betrachtet wird
  i := 1;
  # in der Variablen <mat> soll sukzessive die
  # Verknuepfungstafel einer Quasigruppe aufgebaut
  # werden
  mat := [];
  # in der Variablen <nrs> wird gespeichert, welche
  # Permutationen aus <group> in welcher Zeile in Frage
  # kommen
  nrs := [];

  # <cand> enthaelt alle Kandidaten fuer jede Zeile
  cand := [];
  numcand := [];

  # initialisiere <nrs> mit dem ersten Element fuer jede
  # der <deg> Zeilen; ausserdem ist zunaechst jedes
  # Element ein Kandidat fuer jede Zeile
  for j in [1..deg] do
    nrs[j] := 1;
    cand[j] := els;
    numcand[j] := len;
```

```
od;

while nrs[1] <= len do

  # existiert schon eine Zeile in <mat>, so
  # berechne alle Kandidaten, die <mat> zu einem
  # <i>x<deg>-lateinischen Rechteck erweitern,
  # falls noch nicht geschehen
  if i > 1 and numcand[i] = len then
    cand := Candidates(els,mat);
    numcand[i] := Length(cand[i]);
  fi;

  # schreibe den <nrs>[<i>]-ten Kandidaten in die
  # i-te Zeile, falls dieser existiert
  if nrs[i] <= numcand then
    mat[i] := [];

    for j in [1..deg] do
      mat[i][j] := j^cand[i][nrs[i]];
    od;

    if i = deg then
      # an dieser Stelle ist <mat> ein lateinisches
      # Quadrat; falls die Multiplikationsgruppe
      # wie gewuenscht ist, speichere <mat> in
      # <res> und suche weiter
      if AreWeHappy(mat,group) then
        # ShallowCopy notwendig, da ansonsten
        # nur ein Verweis auf <mat> in
        # <res> gespeichert wird
        Add(res,ShallowCopy(mat));
      fi;

      # da die letzte Zeile durch die anderen
      # eindeutig bestimmt ist, ist es nicht
      # notwendig, hier andere Elemente zu testen;
      # gehe also direkt zurueck zur vorletzten
      # Zeile und loesche die letzten beiden
      # Zeilen
      Remove(mat);
      Remove(mat);
      i := i-1;
      # Kandidat fuer vorletzte Zeile
      # aendern
      nrs[i] := nrs[i]+1;
      # letzte Zeile wieder offen
      nrs[deg]:=1;
      cand[deg] := els;
```

```
        numcand[deg] := len;

      else
        # <mat> ist noch kein lateinisches
        # Quadrat, gehe also in die naechste
        # Zeile
        i := i+1;
      fi;

    else
      # an dieser Stelle sind alle Kandidaten fuer die
      # <i>-te Zeile ausprobiert, d.h. mit der speziellen
      # Wahl der ersten <i>-1 Zeilen gibt es keine noch
      # nicht betrachtete moegliche Wahl fuer die
      # <i>-te Zeile, die <mat>
      # zu einem lateinischen Rechteck macht
      if i = 1 then
        # in diesem Fall gibt es also keine
        # weitere Quasigruppe mit den gewuenschten
        # Eigenschaften
        return res;
      else
        # ansonsten letzte Zeile loeschen und
        # wieder vorherige mit dem naechsten
        # Kandidaten betrachten
        Remove(mat);
        i := i-1;
        nrs[i] := nrs[i] + 1;
        # alle folgenden Zeilen wieder offen lassen
        for j in [i+1..deg] do
          nrs[j] := 1;
          cand[j] := els;
          numcand[j] := len;
        od;
      fi;

    fi;

  od;

  return res;

end;
```

Programmcode A.6: GenerateAllQuasigroups.g

Anhang B

Ergebnisse

§1 Legende und Notation

In diesem Teil werden die mit Hilfe der in Anhang A implementierten Programme erzielten Ergebnisse aufgeführt. Dabei wurden zunächst mittels des Befehls `AllTransitiveGroups(NrMovedPoints,<n>)` alle transitiven Gruppen vom Grad `<n>` berechnet. Zu jeder dieser Gruppen werden in diesem Abschnitt die folgenden Daten angegeben:

- der Name der Gruppe in GAP,
- die Gruppenordnung, berechnet durch `Size(<gruppe>)`,
- ein Erzeugendensystem der Gruppe, berechnet durch `GeneratorsOfGroup(<gruppe>)`,
- die Struktur der Gruppe, berechnet durch `StructureDescription(<gruppe>)`,
- eine Information zur Vielfachheitsfreiheit der Gruppe (Spalte VF in den Tabellen ab Grad 5), berechnet durch `IsMultFree(<gruppe>)`, vgl. A.1.

Zur Illustration des Ergebnisses aus (3.35) wurden dann für die transitiven Gruppen G vom Grad $n \leqslant 4$ durch `GenerateAllQuasigroups(<G>,<n>)` (vgl. A.6) alle Quasigruppen Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$ berechnet. Quasigruppen werden in diesem Abschnitt jeweils durch ihre verkürzten Verknüpfungstafeln repräsentiert, z. B. wird die Quasigruppe $Q = \{1, 2\}$ mit der Verknüpfungstafel

$\cdot$	1	2
1	1	2
2	2	1

durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Für höhere Grade ist es allerdings nicht mehr praktikabel, alle auf diese Weise berechneten Quasigruppen hier zu notieren, da deren Anzahl bei wachsendem n rapide zunimmt. Für $n = 5$ gilt z. B. schon:

transitive Gruppe G	Anzahl der Quasigruppen Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
C_5	5
D_{10}	15
$C_5 \rtimes C_4$	60
A_5	4200
S_5	156600

Hier ist noch zu beachten, dass auf diese Weise natürlich nicht alle Quasigruppen bis zur Ordnung 5 ihre Aufwartung machen, da die transitiven Gruppen in GAP nur bis auf Konjugiertheit angegeben sind. Ist aber $H \leqslant S_n$ transitiv und Q eine Quasigruppe mit $\mathrm{M}(Q) = H$, dann existiert wegen (1.11) für jede konjugierte Gruppe H^g, $g \in S_n$, eine Quasigruppe Q' mit $\mathrm{M}(Q') = H^g$, sodass $g : Q \to Q'$ ein Isomorphismus ist. Da sich dieses Argument umkehren lässt, ist die Anzahl der Quasigruppen mit vorgegebener Multiplikationsgruppe also konstant auf den Konjugiertenklassen von Untergruppen der S_n.

Für die vielfachheitsfreien, transitiven Gruppen G vom Grad $n \geqslant 5$ wurde wegen oben beschriebener Problematik mit `GenerateQuasigroup(<G>,<n>)` (vgl. A.5) nur noch eine Quasigruppe Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$ berechnet, falls eine solche existiert. Ist zu einer Gruppe im Folgenden keine Quasigruppe angegeben, dann bedeutet das, dass diese Gruppe keine Multiplikationsgruppe einer Quasigruppe ist.

§2 Grad 2

- $G = \mathrm{S2} = \langle (1,2) \rangle \cong S_2$, $|G| = 2$, ist vielfachheitsfrei und die Multiplikationsgruppe der folgenden Quasigruppen:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

§3 Grad 3

- $G = \mathrm{A3} = \langle (1,2,3) \rangle \cong C_3$, $|G| = 3$, ist vielfachheitsfrei und die Multiplikationsgruppe der folgenden Quasigruppen:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$
- $G = \mathrm{S3} = \langle (1,2,3), (1,2) \rangle \cong S_3$, $|G| = 6$, ist vielfachheitsfrei und die Multiplikationsgruppe der folgenden Quasigruppen:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

§4 Grad 4

- $G = \mathrm{C}(4) = 4 = \langle(1,2,3,4)\rangle \cong C_4$, $|G| = 4$, ist vielfachheitsfrei und die Multiplikationsgruppe der folgenden Quasigruppen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $G = \mathrm{E}(4) = 2[\mathrm{x}]2 = \langle(1,4)(2,3),(1,2)(3,4)\rangle \cong C_2 \times C_2$, $|G| = 4$, ist vielfachheitsfrei und die Multiplikationsgruppe der folgenden Quasigruppen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- $G = \mathrm{D}(4) = \langle(1,2,3,4),(1,3)\rangle \cong D_8$, $|G| = 8$, ist vielfachheitsfrei und die Multiplikationsgruppe der folgenden Quasigruppen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $G = \mathrm{A4} = \langle(1,2,3),(2,3,4)\rangle \cong A_4$, $|G| = 12$, ist vielfachheitsfrei und die Multiplikationsgruppe der folgenden Quasigruppen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $G = \mathrm{S4} = \langle (1,2,3,4),(1,2) \rangle \cong S_4$, $|G| = 24$, ist vielfachheitsfrei und die Multiplikationsgruppe der folgenden Quasigruppen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&3&4&2\\3&1&2&4\\2&4&3&1\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&4&2\\3&1&2&4\\4&2&3&1\\2&4&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&4&2\\3&2&1&4\\2&4&3&1\\4&1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&4&2\\3&2&1&4\\4&1&2&3\\2&4&3&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&3&4&2\\3&4&2&1\\2&1&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&4&2\\3&4&2&1\\4&2&1&3\\2&1&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&4&2\\4&1&2&3\\2&4&3&1\\3&2&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&4&2\\4&1&2&3\\3&2&1&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&3&4&2\\4&2&1&3\\2&1&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&4&2\\4&2&1&3\\3&1&2&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&4&2\\4&2&1&3\\3&4&2&1\\2&1&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&4&2\\4&2&3&1\\2&4&1&3\\3&1&2&4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&3&4&2\\4&2&3&1\\3&1&2&4\\2&4&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\2&1&3&4\\3&2&4&1\\4&3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\2&1&3&4\\4&3&1&2\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\2&3&1&4\\3&1&4&2\\4&2&3&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&4&2&3\\2&3&1&4\\4&1&3&2\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\2&3&1&4\\4&2&3&1\\3&1&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\2&3&4&1\\3&2&1&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\2&3&4&1\\4&1&3&2\\3&2&1&4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&4&2&3\\3&1&4&2\\2&3&1&4\\4&2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\3&1&4&2\\4&2&3&1\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\3&2&1&4\\2&3&4&1\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\3&2&1&4\\4&1&3&2\\2&3&4&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&4&2&3\\3&2&4&1\\2&1&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\3&2&4&1\\2&3&1&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\3&2&4&1\\4&3&1&2\\2&1&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\4&1&3&2\\2&3&4&1\\3&2&1&4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&4&2&3\\4&1&3&2\\3&2&1&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\4&1&3&2\\3&2&4&1\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\4&2&3&1\\2&3&1&4\\3&1&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\4&2&3&1\\3&1&4&2\\2&3&1&4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&4&2&3\\4&3&1&2\\2&1&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2&3\\4&3&1&2\\3&2&4&1\\2&1&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&2\\2&1&4&3\\4&3&2&1\\3&2&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&2\\2&3&1&4\\3&2&4&1\\4&1&2&3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&4&3&2\\2&3&1&4\\4&1&2&3\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&2\\2&3&4&1\\3&1&2&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&2\\2&3&4&1\\4&1&2&3\\3&2&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&2\\2&3&4&1\\4&2&1&3\\3&1&2&4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&4&3&2\\3&1&2&4\\2&3&4&1\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&2\\3&1&2&4\\4&2&1&3\\2&3&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&2\\3&2&1&4\\2&1&4&3\\4&3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&2\\3&2&1&4\\2&3&4&1\\4&1&2&3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&4&3&2\\3&2&1&4\\4&1&2&3\\2&3&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&2\\3&2&1&4\\4&3&2&1\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&2\\3&2&4&1\\2&3&1&4\\4&1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&3&2\\3&2&4&1\\4&1&2&3\\2&3&1&4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1&4&3&2\\4&1&2&3\\2&3&1&4\\3&2&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&4&3&2\\4&1&2&3\\2&3&4&1\\3&2&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&4&3&2\\4&1&2&3\\3&2&4&1\\2&3&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&4&3&2\\4&2&1&3\\2&3&4&1\\3&1&2&4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1&4&3&2\\4&2&1&3\\3&1&2&4\\2&3&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&4&3&2\\4&3&2&1\\2&1&4&3\\3&2&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\1&3&4&2\\3&4&2&1\\4&2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\1&3&4&2\\4&2&1&3\\3&4&2&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&1&3&4\\1&4&2&3\\3&2&4&1\\4&3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\1&4&2&3\\4&3&1&2\\3&2&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\3&2&4&1\\1&4&2&3\\4&3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\3&2&4&1\\4&3&1&2\\1&4&2&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&1&3&4\\3&4&1&2\\1&2&4&3\\4&3&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\3&4&1&2\\4&3&2&1\\1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\3&4&2&1\\1&2&4&3\\4&3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\3&4&2&1\\1&3&4&2\\4&2&1&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&1&3&4\\3&4&2&1\\4&2&1&3\\1&3&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\3&4&2&1\\4&3&1&2\\1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\4&2&1&3\\1&3&4&2\\3&4&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\4&2&1&3\\3&4&2&1\\1&3&4&2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&1&3&4\\4&3&1&2\\1&2&4&3\\3&4&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\4&3&1&2\\1&4&2&3\\3&2&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\4&3&1&2\\3&2&4&1\\1&4&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\4&3&1&2\\3&4&2&1\\1&2&4&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&1&3&4\\4&3&2&1\\1&2&4&3\\3&4&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&4\\4&3&2&1\\3&4&1&2\\1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&4&3\\1&3&2&4\\3&4&1&2\\4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&4&3\\1&4&3&2\\3&2&1&4\\4&3&2&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&1&4&3\\3&2&1&4\\1&4&3&2\\4&3&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&4&3\\3&4&1&2\\1&3&2&4\\4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&4&3\\3&4&1&2\\4&2&3&1\\1&3&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&4&3\\3&4&2&1\\1&2&3&4\\4&3&1&2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&1&4&3\\3&4&2&1\\4&3&1&2\\1&2&3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&4&3\\4&2&3&1\\3&4&1&2\\1&3&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&4&3\\4&3&1&2\\1&2&3&4\\3&4&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&4&3\\4&3&1&2\\3&4&2&1\\1&2&3&4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&1&4&3\\4&3&2&1\\1&4&3&2\\3&2&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&4&3\\4&3&2&1\\3&2&1&4\\1&4&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\1&2&4&3\\3&4&2&1\\4&1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\1&2&4&3\\4&1&3&2\\3&4&2&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&3&1&4\\1&4&2&3\\3&1&4&2\\4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\1&4&2&3\\3&2&4&1\\4&1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\1&4&2&3\\4&2&3&1\\3&1&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\1&4&3&2\\3&2&4&1\\4&1&2&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&3&1&4\\1&4&3&2\\4&1&2&3\\3&2&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\3&1&4&2\\1&4&2&3\\4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\3&1&4&2\\4&2&3&1\\1&4&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\3&2&4&1\\1&4&3&2\\4&1&2&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&3&1&4\\3&2&4&1\\4&1&2&3\\1&4&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\3&2&4&1\\4&1&3&2\\1&4&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\3&4&2&1\\1&2&4&3\\4&1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\3&4&2&1\\4&1&3&2\\1&2&4&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&3&1&4\\4&1&2&3\\1&4&3&2\\3&2&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\4&1&2&3\\3&2&4&1\\1&4&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\4&1&3&2\\1&2&4&3\\3&4&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\4&1&3&2\\1&4&2&3\\3&2&4&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&3&1&4\\4&1&3&2\\3&4&2&1\\1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\4&2&3&1\\1&4&2&3\\3&1&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&1&4\\4&2&3&1\\3&1&4&2\\1&4&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&1&2&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\1&4&2&3\\3&2&1&4\\4&1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\1&4&2&3\\4&1&3&2\\3&2&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\1&4&3&2\\3&1&2&4\\4&2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\1&4&3&2\\3&2&1&4\\4&1&2&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\1&4&3&2\\4&2&1&3\\3&1&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\3&1&2&4\\1&4&3&2\\4&2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\3&1&2&4\\4&2&1&3\\1&4&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\3&2&1&4\\1&4&2&3\\4&1&3&2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\3&2&1&4\\1&4&3&2\\4&1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\3&2&1&4\\4&1&3&2\\1&4&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\3&4&1&2\\1&2&3&4\\4&1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\4&1&2&3\\1&2&3&4\\3&4&1&2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\4&1&2&3\\1&4&3&2\\3&2&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\4&1&2&3\\3&2&1&4\\1&4&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\1&2&3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\4&1&3&2\\1&4&2&3\\3&2&1&4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\4&1&3&2\\3&2&1&4\\1&4&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\4&2&1&3\\1&4&3&2\\3&1&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&3&4&1\\4&2&1&3\\3&1&2&4\\1&4&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\1&2&3&4\\3&1&4&2\\4&3&2&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&4&1&3\\1&3&2&4\\3&1&4&2\\4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\1&3&2&4\\3&2&4&1\\4&1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\1&3&2&4\\4&1&3&2\\3&2&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\1&3&4&2\\3&1&2&4\\4&2&3&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&4&1&3\\1&3&4&2\\4&2&3&1\\3&1&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\3&1&2&4\\1&3&4&2\\4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\3&1&2&4\\4&2&3&1\\1&3&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\3&1&4&2\\1&2&3&4\\4&3&2&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&4&1&3\\3&1&4&2\\1&3&2&4\\4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\3&1&4&2\\4&2&3&1\\1&3&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\3&1&4&2\\4&3&2&1\\1&2&3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\3&2&4&1\\1&3&2&4\\4&1&3&2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&4&1&3\\3&2&4&1\\4&1&3&2\\1&3&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\4&1&3&2\\1&3&2&4\\3&2&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\4&1&3&2\\3&2&4&1\\1&3&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\4&2&3&1\\1&3&4&2\\3&1&2&4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&4&1&3\\ 4&2&3&1\\ 3&1&2&4\\ 1&3&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\ 4&2&3&1\\ 3&1&4&2\\ 1&3&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&1&3\\ 4&3&2&1\\ 3&1&4&2\\ 1&2&3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 1&2&4&3\\ 3&1&2&4\\ 4&3&1&2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 1&2&4&3\\ 4&3&1&2\\ 3&1&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 1&3&2&4\\ 3&1&4&2\\ 4&2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 1&3&2&4\\ 4&2&1&3\\ 3&1&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 1&3&4&2\\ 3&1&2&4\\ 4&2&1&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 1&3&4&2\\ 3&2&1&4\\ 4&1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 1&3&4&2\\ 4&1&2&3\\ 3&2&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 3&1&2&4\\ 1&2&4&3\\ 4&3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 3&1&2&4\\ 4&2&1&3\\ 1&3&4&2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 3&1&2&4\\ 4&3&1&2\\ 1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 3&1&4&2\\ 1&3&2&4\\ 4&2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 3&1&4&2\\ 4&2&1&3\\ 1&3&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 3&2&1&4\\ 1&3&4&2\\ 4&1&2&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 3&2&1&4\\ 4&1&2&3\\ 1&3&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 4&1&2&3\\ 1&3&4&2\\ 3&2&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 4&1&2&3\\ 3&2&1&4\\ 1&3&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 4&2&1&3\\ 1&3&2&4\\ 3&1&4&2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 4&2&1&3\\ 1&3&4&2\\ 3&1&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 4&2&1&3\\ 3&1&4&2\\ 1&3&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 4&3&1&2\\ 1&2&4&3\\ 3&1&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&4&3&1\\ 4&3&1&2\\ 3&1&2&4\\ 1&2&4&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 1&2&4&3\\ 2&4&3&1\\ 4&3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 1&2&4&3\\ 4&3&1&2\\ 2&4&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 1&3&4&2\\ 2&4&1&3\\ 4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 1&3&4&2\\ 4&2&1&3\\ 2&4&3&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 1&3&4&2\\ 4&2&3&1\\ 2&4&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 1&4&3&2\\ 2&3&4&1\\ 4&2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 1&4&3&2\\ 4&2&1&3\\ 2&3&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 2&3&4&1\\ 1&4&3&2\\ 4&2&1&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 2&3&4&1\\ 4&2&1&3\\ 1&4&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 2&4&1&3\\ 1&3&4&2\\ 4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 2&4&1&3\\ 4&2&3&1\\ 1&3&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 2&4&3&1\\ 1&2&4&3\\ 4&3&1&2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 2&4&3&1\\ 1&3&4&2\\ 4&2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 2&4&3&1\\ 4&3&1&2\\ 1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 4&2&1&3\\ 1&4&3&2\\ 2&3&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 4&2&1&3\\ 2&3&4&1\\ 1&4&3&2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 4&2&1&3\\ 2&4&3&1\\ 1&3&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 4&2&3&1\\ 1&3&4&2\\ 2&4&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 4&2&3&1\\ 2&4&1&3\\ 1&3&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 4&3&1&2\\ 1&2&4&3\\ 2&4&3&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&1&2&4\\ 4&3&1&2\\ 2&4&3&1\\ 1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&4&2\\ 1&2&3&4\\ 2&4&1&3\\ 4&3&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&4&2\\ 1&3&2&4\\ 2&4&1&3\\ 4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&1&4&2\\ 1&3&2&4\\ 2&4&3&1\\ 4&2&1&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&2&4&1\\ 2&3&1&4\\ 4&1&2&3\\ 1&4&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&2&4&1\\ 2&4&1&3\\ 1&3&2&4\\ 4&1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&2&4&1\\ 2&4&1&3\\ 4&1&3&2\\ 1&3&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&2&4&1\\ 4&1&2&3\\ 1&4&3&2\\ 2&3&1&4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&2&4&1\\ 4&1&2&3\\ 2&3&1&4\\ 1&4&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&2&4&1\\ 4&1&3&2\\ 1&3&2&4\\ 2&4&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&2&4&1\\ 4&1&3&2\\ 2&3&1&4\\ 1&4&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&2&4&1\\ 4&1&3&2\\ 2&4&1&3\\ 1&3&2&4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&2&4&1\\ 4&3&1&2\\ 1&4&2&3\\ 2&1&3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&2&4&1\\ 4&3&1&2\\ 2&1&3&4\\ 1&4&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 1&2&3&4\\ 2&3&4&1\\ 4&1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 1&2&3&4\\ 4&1&2&3\\ 2&3&4&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 1&2&4&3\\ 2&1&3&4\\ 4&3&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 1&2&4&3\\ 4&3&2&1\\ 2&1&3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 1&3&2&4\\ 2&1&4&3\\ 4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 2&1&3&4\\ 1&2&4&3\\ 4&3&2&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 2&1&3&4\\ 4&3&2&1\\ 1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 2&1&4&3\\ 1&3&2&4\\ 4&2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 2&1&4&3\\ 4&2&3&1\\ 1&3&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 2&3&4&1\\ 4&1&2&3\\ 1&2&3&4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 4&1&2&3\\ 2&3&4&1\\ 1&2&3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&1&2\\ 4&2&3&1\\ 2&1&4&3\\ 1&3&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 1&2&3&4\\ 2&1&4&3\\ 4&3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 1&2&3&4\\ 4&3&1&2\\ 2&1&4&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 1&2&4&3\\ 2&1&3&4\\ 4&3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 1&2&4&3\\ 2&3&1&4\\ 4&1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 1&2&4&3\\ 4&1&3&2\\ 2&3&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 1&2&4&3\\ 4&3&1&2\\ 2&1&3&4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 1&3&4&2\\ 2&1&3&4\\ 4&2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 1&3&4&2\\ 4&2&1&3\\ 2&1&3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 2&1&3&4\\ 1&2&4&3\\ 4&3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 2&1&3&4\\ 1&3&4&2\\ 4&2&1&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 2&1&3&4\\ 4&2&1&3\\ 1&3&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 2&1&3&4\\ 4&3&1&2\\ 1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 2&1&4&3\\ 1&2&3&4\\ 4&3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 2&1&4&3\\ 4&3&1&2\\ 1&2&3&4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 2&3&1&4\\ 1&2&4&3\\ 4&1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 2&3&1&4\\ 4&1&3&2\\ 1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 4&1&3&2\\ 1&2&4&3\\ 2&3&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 4&1&3&2\\ 2&3&1&4\\ 1&2&4&3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 4&2&1&3\\ 1&3&4&2\\ 2&1&3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&4&2&1\\ 4&2&1&3\\ 2&1&3&4\\ 1&3&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&1&2&3\\ 1&2&3&4\\ 3&4&1&2\\ 2&3&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&1&2&3\\ 1&3&4&2\\ 2&4&3&1\\ 3&2&1&4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4&1&2&3\\ 1&3&4&2\\ 3&2&1&4\\ 2&4&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&1&2&3\\ 1&4&3&2\\ 2&3&1&4\\ 3&2&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&1&2&3\\ 1&4&3&2\\ 3&2&1&4\\ 2&3&4&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&1&2&3\\ 1&4&3&2\\ 3&2&4&1\\ 2&3&1&4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4&3&2&1\\1&2&3&4\\2&4&1&3\\3&1&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&3&2&1\\1&2&3&4\\3&1&4&2\\2&4&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&3&2&1\\1&2&4&3\\2&1&3&4\\3&4&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&3&2&1\\1&2&4&3\\3&4&1&2\\2&1&3&4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 4&3&2&1\\1&4&3&2\\3&2&1&4\\2&1&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&3&2&1\\2&1&3&4\\1&2&4&3\\3&4&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&3&2&1\\2&1&3&4\\3&4&1&2\\1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&3&2&1\\2&1&4&3\\1&4&3&2\\3&2&1&4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 4&3&2&1\\2&1&4&3\\3&2&1&4\\1&4&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&3&2&1\\2&4&1&3\\1&2&3&4\\3&1&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&3&2&1\\3&1&4&2\\1&2&3&4\\2&4&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4&3&2&1\\3&2&1&4\\1&4&3&2\\2&1&4&3 \end{pmatrix}.$$

§5 Grad 5

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
C(5) = 5	5	$(1,2,3,4,5)$	C_5	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\ 2&3&4&5&1\\ 3&4&5&1&2\\ 4&5&1&2&3\\ 5&1&2&3&4 \end{pmatrix}$
D(5) = 5:2	10	$(1,2,3,4,5)$, $(1,4)(2,3)$	D_{10}	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\ 5&1&2&3&4\\ 4&5&1&2&3\\ 3&4&5&1&2\\ 2&3&4&5&1 \end{pmatrix}$
F(5) = 5:4	20	$(1,2,3,4,5)$, $(1,2,4,3)$	$C_5 \rtimes C_4$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\ 3&4&5&1&2\\ 5&1&2&3&4\\ 2&3&4&5&1\\ 4&5&1&2&3 \end{pmatrix}$
A5	60	$(1,2,3,4,5)$, $(3,4,5)$	A_5	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\ 2&3&4&5&1\\ 4&5&1&2&3\\ 5&1&2&3&4\\ 3&4&5&1&2 \end{pmatrix}$
S5	120	$(1,2,3,4,5)$, $(1,2)$	S_5	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\ 2&1&4&5&3\\ 3&4&5&1&2\\ 4&5&2&3&1\\ 5&3&1&2&4 \end{pmatrix}$

§6 Grad 6

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
C(6) = 6 = 3[x]2	6	$(1,2,3,4,5,6)$	C_6	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
D_6(6) = [3]2	6	$(1,3,5)(2,4,6)$, $(1,4)(2,3)(5,6)$	S_3	N	
D(6) = S(3)[x]2	12	$(1,2,3,4,5,6)$, $(1,4)(2,3)(5,6)$	D_{12}	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$
A_4(6) = [2^2]3	12	$(1,4)(2,5),\ (1,3,5)(2,4,6)$	A_4	J	
F_18(6) = [3^2]2 = 3 wr 2	18	$(2,4,6),\ (1,4)(2,5)(3,6)$	$C_3 \times S_3$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
2A_4(6) = [2^3]3 = 2 wr 3	24	$(3,6),\ (1,3,5)(2,4,6)$	$C_2 \times A_4$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6\\ 2&3&1&5&6&4\\ 3&1&5&6&4&2\\ 4&5&6&1&2&3\\ 5&6&4&2&3&1\\ 6&4&2&3&1&5 \end{pmatrix}$
S_4(6d) = [2^2]S(3)	24	$(1,4)(2,5),\ (1,3,5)(2,4,6),$ $(1,5)(2,4)$	S_4	J	
S_4(6c) = 1/2[2^3]S(3)	24	$(1,4)(2,5),\ (1,3,5)(2,4,6),$ $(1,5)(2,4)(3,6)$	S_4	J	
F_18(6):2 = [1/2.S(3)^2]2	36	$(2,4,6),\ (1,5)(2,4),$ $(1,4)(2,5)(3,6)$	$S_3 \times S_3$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6\\ 2&1&4&3&6&5\\ 3&6&5&2&1&4\\ 4&5&6&1&2&3\\ 5&4&1&6&3&2\\ 6&3&2&5&4&1 \end{pmatrix}$
F_36(6) = 1/2[S(3)^2]2	36	$(2,4,6),\ (1,5)(2,4),$ $(1,4,5,2)(3,6)$	$(C_3 \times C_3) \rtimes C_4$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6\\ 2&1&4&5&6&3\\ 3&4&5&6&1&2\\ 4&5&6&3&2&1\\ 5&6&1&2&3&4\\ 6&3&2&1&4&5 \end{pmatrix}$
2S_4(6) = [2^3]S(3) = 2 wr S(3)	48	$(3,6),\ (1,3,5)(2,4,6),$ $(1,5)(2,4)$	$C_2 \times S_4$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6\\ 3&1&2&6&4&5\\ 2&3&4&5&6&1\\ 4&5&6&1&2&3\\ 6&4&5&3&1&2\\ 5&6&1&2&3&4 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
L(6) = PSL(2,5) = A_5(6)	60	$(1,2,3,4,6),\ (1,4)(5,6)$	A_5	J	
F_36(6):2 = [S(3)^2]2 = S(3) wr 2	72	$(2,4,6),\ (2,4),\ (1,4)(2,5)(3,6)$	$(S_3 \times S_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6\\ 2&1&4&3&6&5\\ 3&4&5&6&1&2\\ 4&5&6&1&2&3\\ 5&6&1&2&3&4\\ 6&3&2&5&4&1 \end{pmatrix}$
L(6):2 = PGL(2,5) = S_5(6)	120	$(1,2,3,4,6),\ (1,2)(3,4)(5,6)$	S_5	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6\\ 2&1&4&3&6&5\\ 4&3&6&5&1&2\\ 6&5&1&2&3&4\\ 3&4&5&6&2&1\\ 5&6&2&1&4&3 \end{pmatrix}$
A6	360	$(1,2,3,4,5),\ (4,5,6)$	A_6	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6\\ 2&1&4&5&6&3\\ 3&4&1&6&2&5\\ 4&5&6&1&3&2\\ 5&6&2&3&1&4\\ 6&3&5&2&4&1 \end{pmatrix}$
S6	720	$(1,2,3,4,5,6),\ (1,2)$	S_6	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6\\ 2&1&4&3&6&5\\ 3&4&5&6&1&2\\ 4&5&6&1&2&3\\ 6&3&2&5&4&1\\ 5&6&1&2&3&4 \end{pmatrix}$

§7 Grad 7

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
C(7) = 7	7	$(1,2,3,4,5,6,7)$	C_7	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7\\ 2&3&4&5&6&7&1\\ 3&4&5&6&7&1&2\\ 4&5&6&7&1&2&3\\ 5&6&7&1&2&3&4\\ 6&7&1&2&3&4&5\\ 7&1&2&3&4&5&6 \end{pmatrix}$
D(7) = 7:2	14	$(1,2,3,4,5,6,7)$, $(1,6)(2,5)(3,4)$	D_{14}	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7\\ 7&1&2&3&4&5&6\\ 6&7&1&2&3&4&5\\ 5&6&7&1&2&3&4\\ 4&5&6&7&1&2&3\\ 3&4&5&6&7&1&2\\ 2&3&4&5&6&7&1 \end{pmatrix}$
F_21(7) = 7:3	21	$(1,2,3,4,5,6,7)$, $(1,2,4)(3,6,5)$	$C_7 \rtimes C_3$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7\\ 3&4&5&6&7&1&2\\ 5&6&7&1&2&3&4\\ 7&1&2&3&4&5&6\\ 2&3&4&5&6&7&1\\ 4&5&6&7&1&2&3\\ 6&7&1&2&3&4&5 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
F_42(7) = 7:6	42	$(1,2,3,4,5,6,7)$, $(1,3,2,6,4,5)$	$(C_7 \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7\\ 4&5&6&7&1&2&3\\ 7&1&2&3&4&5&6\\ 3&4&5&6&7&1&2\\ 6&7&1&2&3&4&5\\ 2&3&4&5&6&7&1\\ 5&6&7&1&2&3&4 \end{pmatrix}$
L(7) = L(3,2)	168	$(1,2,3,4,5,6,7)$, $(1,2)(3,6)$	$\mathrm{PSL}_3(2)$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7\\ 2&3&4&5&6&7&1\\ 5&6&7&1&2&3&4\\ 4&5&6&7&1&2&3\\ 3&4&5&6&7&1&2\\ 7&1&2&3&4&5&6\\ 6&7&1&2&3&4&5 \end{pmatrix}$
A7	2520	$(1,2,3,4,5,6,7)$, $(5,6,7)$	A_7	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7\\ 2&1&4&3&6&7&5\\ 3&4&1&2&7&5&6\\ 4&5&6&7&1&2&3\\ 5&3&7&6&2&1&4\\ 6&7&2&5&3&4&1\\ 7&6&5&1&4&3&2 \end{pmatrix}$
S7	5040	$(1,2,3,4,5,6,7)$, $(1,2)$	S_7	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7\\ 2&1&4&3&6&7&5\\ 3&4&1&2&7&5&6\\ 4&5&6&7&1&2&3\\ 5&3&7&6&2&1&4\\ 6&7&2&5&4&3&1\\ 7&6&5&1&3&4&2 \end{pmatrix}$

§8 Grad 8

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
C(8) = 8	8	$(1,2,3,4,5,6,7,8)$	C_8	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&3&4&5&6&7&8&1\\ 3&4&5&6&7&8&1&2\\ 4&5&6&7&8&1&2&3\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&7&8&1&2&3&4&5\\ 7&8&1&2&3&4&5&6\\ 8&1&2&3&4&5&6&7 \end{pmatrix}$
4[x]2	8	$(1,2,3,8)(4,5,6,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$	$C_4 \times C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&3&8&5&6&7&4&1\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 4&5&6&3&8&1&2&7\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&7&4&1&2&3&8&5\\ 7&4&5&2&3&8&1&6\\ 8&1&2&7&4&5&6&3 \end{pmatrix}$
E(8) = 2[x]2[x]2	8	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$	$C_2 \times C_2 \times C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&8&7&6&5&4&3\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 4&7&6&1&8&3&2&5\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&5&4&3&2&1&8&7\\ 7&4&5&2&3&8&1&6\\ 8&3&2&5&4&7&6&1 \end{pmatrix}$
D_8(8) = [4]2	8	$(1,2,3,8)(4,5,6,7)$, $(1,6)(2,5)(3,4)(7,8)$	D_8	N	

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
Q_8(8)	8	$(1,2,3,8)(4,5,6,7)$, $(1,7,3,5)(2,6,8,4)$	Q_8	N	
D(8)	16	$(1,2,3,4,5,6,7,8)$, $(1,6)(2,5)(3,4)(7,8)$	D_{16}	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 8&1&2&3&4&5&6&7\\ 7&8&1&2&3&4&5&6\\ 6&7&8&1&2&3&4&5\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 4&5&6&7&8&1&2&3\\ 3&4&5&6&7&8&1&2\\ 2&3&4&5&6&7&8&1 \end{pmatrix}$
1/2[2^3]4	16	$(1,2,3,4,5,6,7,8)$, $(1,5)(3,7)$	$C_8 \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 6&3&8&5&2&7&4&1\\ 3&4&5&6&7&8&1&2\\ 8&5&2&7&4&1&6&3\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 2&7&4&1&6&3&8&5\\ 7&8&1&2&3&4&5&6\\ 4&1&6&3&8&5&2&7 \end{pmatrix}$
2D_8(8) = [D(4)]2	16	$(1,2,3,4,5,6,7,8)$, $(1,3)(2,6)(5,7)$	QD_{16}	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 4&5&6&7&8&1&2&3\\ 7&8&1&2&3&4&5&6\\ 2&3&4&5&6&7&8&1\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 8&1&2&3&4&5&6&7\\ 3&4&5&6&7&8&1&2\\ 6&7&8&1&2&3&4&5 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
E(8):2 = D(4)[x]2	16	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(4,5)(6,7)$	$C_2 \times D_8$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&8&7&6&5&4&3\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 5&6&7&1&8&3&2&4\\ 4&7&6&8&1&2&3&5\\ 7&4&5&3&2&1&8&6\\ 6&5&4&2&3&8&1&7\\ 8&3&2&5&4&7&6&1 \end{pmatrix}$
[2^2]4	16	$(1,5)(3,7)$, $(1,2,3,8)(4,5,6,7)$	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 6&3&4&5&2&7&8&1\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 8&5&2&3&4&1&6&7\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 2&7&8&1&6&3&4&5\\ 7&4&5&2&3&8&1&6\\ 4&1&6&7&8&5&2&3 \end{pmatrix}$
1/2[2^3]E(4) = Q_8:2	16	$(1,5)(3,7)$, $(1,3,5,7)(2,4,6,8)$, $(1,4,5,8)(2,3,6,7)$	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 6&1&8&3&2&5&4&7\\ 3&4&5&6&7&8&1&2\\ 8&3&2&5&4&7&6&1\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 2&5&4&7&6&1&8&3\\ 7&8&1&2&3&4&5&6\\ 4&7&6&1&8&3&2&5 \end{pmatrix}$
2A_4(8) = [2]A(4) = SL(2,3)	24	$(1,3,5,7)(2,4,6,8)$, $(1,3,8)(4,5,7)$	$\mathrm{SL}_2(3)$	J	

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
E(8):3 = A(4)[x]2	24	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(1,2,3)(4,6,5)$	$C_2 \times A_4$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 8&3&2&5&4&7&6&1\\ 7&4&5&2&3&8&1&6\\ 4&7&6&1&8&3&2&5\\ 6&5&4&3&2&1&8&7\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 2&1&8&7&6&5&4&3 \end{pmatrix}$
S(4)[1/2]2 = 1/2(S_4[x]2)	24	$(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,2,3)(5,6,7)$, $(1,4)(2,6)(3,7)(5,8)$	S_4	J	
[1/4.cD(4)^2]2	32	$(1,2,3,4,5,6,7,8)$, $(1,5)(3,7)$, $(1,6)(2,5)(3,4)(7,8)$	$(C_2 \times D_8) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 4&3&2&1&8&7&6&5\\ 7&4&1&6&3&8&5&2\\ 2&5&8&3&6&1&4&7\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 8&7&6&5&4&3&2&1\\ 3&8&5&2&7&4&1&6\\ 6&1&4&7&2&5&8&3 \end{pmatrix}$
1/2[2^4]4	32	$(2,6)(3,7)$, $(1,2,3,4,5,6,7,8)$	$(C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&3&4&5&6&7&8&1\\ 3&4&1&2&7&8&5&6\\ 4&5&2&3&8&1&6&7\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&7&8&1&2&3&4&5\\ 7&8&5&6&3&4&1&2\\ 8&1&6&7&4&5&2&3 \end{pmatrix}$

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[4^2]2	32	$(1,2,3,8)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&3&8&5&6&7&4&1\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 5&6&7&1&2&3&8&4\\ 6&7&4&2&3&8&1&5\\ 7&4&5&3&8&1&2&6\\ 4&5&6&8&1&2&3&7\\ 8&1&2&7&4&5&6&3 \end{pmatrix}$
E(8):E_4 = [2^2]D(4)	32	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(4,5)(6,7)$, $(4,6)(5,7)$	$(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$	J	
E(8):4 = [1/4.eD(4)^2]2	32	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(1,3)(4,5,6,7)$	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 8&3&2&5&4&7&6&1\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 5&6&7&2&3&8&1&4\\ 6&5&4&1&8&3&2&7\\ 7&4&5&8&1&2&3&6\\ 4&7&6&3&2&1&8&5\\ 2&1&8&7&6&5&4&3 \end{pmatrix}$
[2^3]4	32	$(2,6)(3,7)$, $(1,2,3,8)(4,5,6,7)$	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&3&4&1&6&7&8&5\\ 3&4&5&6&7&8&1&2\\ 4&1&6&7&8&5&2&3\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&7&8&5&2&3&4&1\\ 7&8&1&2&3&4&5&6\\ 8&5&2&3&4&1&6&7 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
1/2[2^4]E(4) = [1/4.dD(4)^2]2	32	$(1,5)(3,7)$, $(1,4,5,8)(2,3)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&4&7&6&5&8&3\\ 3&4&1&2&7&8&5&6\\ 4&7&2&1&8&3&6&5\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&5&8&3&2&1&4&7\\ 7&8&5&6&3&4&1&2\\ 8&3&6&5&4&7&2&1 \end{pmatrix}$
E(8):D_4 = [2^3]2^2	32	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(2,3)(4,5)$, $(2,3)(6,7)$	$(C_2 \times D_8) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&8&6&7&4&5&3\\ 3&8&1&7&6&5&4&2\\ 4&7&6&1&8&3&2&5\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&5&4&2&3&8&1&7\\ 7&4&5&3&2&1&8&6\\ 8&3&2&5&4&7&6&1 \end{pmatrix}$
2S_4(8) = GL(2,3)	48	$(1,2,3,4,5,6,7,8)$, $(1,3,8)(4,5,7)$	$\mathrm{GL}_2(3)$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 3&4&5&6&7&8&1&2\\ 2&3&4&5&6&7&8&1\\ 8&1&2&3&4&5&6&7\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 7&8&1&2&3&4&5&6\\ 6&7&8&1&2&3&4&5\\ 4&5&6&7&8&1&2&3 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
E(8):D_6 = S(4)[x]2	48	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(1,2,3)(4,6,5)$, $(2,3)(4,5)$	$C_2 \times S_4$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&3&8&7&4&5&6&1\\ 8&1&2&5&6&7&4&3\\ 7&6&5&2&1&8&3&4\\ 5&4&7&8&3&2&1&6\\ 6&5&4&3&2&1&8&7\\ 4&7&6&1&8&3&2&5\\ 3&8&1&6&7&4&5&2 \end{pmatrix}$
E(8):7 = F_56(8)	56	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(1,2,6,3,4,5,7)$	$(C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_7$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 6&5&4&3&2&1&8&7\\ 2&1&8&7&6&5&4&3\\ 7&4&5&2&3&8&1&6\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 8&3&2&5&4&7&6&1\\ 4&7&6&1&8&3&2&5 \end{pmatrix}$
1/2[2^4]eD(4)	64	$(1,2,3,4,5,6,7,8)$, $(1,5)(4,8)$, $(1,7)(3,5)(4,8)$	$((C_4 \times C_4) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 4&1&2&7&8&5&6&3\\ 3&4&1&2&7&8&5&6\\ 6&3&8&5&2&7&4&1\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 8&5&6&3&4&1&2&7\\ 7&8&5&6&3&4&1&2\\ 2&7&4&1&6&3&8&5 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[2^4]4	64	$(4,8),\ (1,2,3,8)(4,5,6,7)$	$((C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&3&4&1&6&7&8&5\\ 3&4&1&2&7&8&5&6\\ 4&1&2&7&8&5&6&3\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&7&8&5&2&3&4&1\\ 7&8&5&6&3&4&1&2\\ 8&5&6&3&4&1&2&7 \end{pmatrix}$
1/2[2^4]dD(4)	64	$(2,6)(3,7),\ (1,3)(5,7),\ (1,2,3,4,5,6,7,8)$	$(((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 4&1&2&7&8&5&6&3\\ 3&4&1&2&7&8&5&6\\ 2&7&4&1&6&3&8&5\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 8&5&6&3&4&1&2&7\\ 7&8&5&6&3&4&1&2\\ 6&3&8&5&2&7&4&1 \end{pmatrix}$
E(8):D_8 = [2^3]D(4)	64	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7),\ (1,3)(2,8)(4,6)(5,7),\ (1,5)(2,6)(3,7)(4,8),\ (1,3)(4,5,6,7),\ (1,3)(5,7)$	$(((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&8&5&4&7&6&3\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 5&6&7&1&8&3&2&4\\ 4&7&6&2&3&8&1&5\\ 7&4&5&3&2&1&8&6\\ 6&5&4&8&1&2&3&7\\ 8&3&2&7&6&5&4&1 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
1/2[2ˆ4]cD(4)	64	$(2,6)(3,7)$, $(1,3)(4,8)(5,7)$, $(1,2,3,8)(4,5,6,7)$	$(((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 4&1&2&3&8&5&6&7 \\ 3&4&1&2&7&8&5&6 \\ 6&7&8&5&2&3&4&1 \\ 5&6&7&8&1&2&3&4 \\ 8&5&6&7&4&1&2&3 \\ 7&8&5&6&3&4&1&2 \\ 2&3&4&1&6&7&8&5 \end{pmatrix}$
[2ˆ4]E(4)	64	$(4,8)$, $(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$	$(((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 2&1&4&3&6&5&8&7 \\ 3&4&1&2&7&8&5&6 \\ 4&3&2&5&8&7&6&1 \\ 5&6&7&8&1&2&3&4 \\ 6&5&8&7&2&1&4&3 \\ 7&8&5&6&3&4&1&2 \\ 8&7&6&1&4&3&2&5 \end{pmatrix}$
[2ˆ3]A(4)	96	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(1,2,3)(4,6,5)$, $(2,5)(3,4)$	$((C_2 \times D_8) \rtimes C_2) \rtimes C_3$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&7&1&6&8&4&2&5 \\ 7&3&5&2&4&8&6&1 \\ 8&4&2&5&3&7&1&6 \\ 4&8&6&1&7&3&5&2 \\ 6&5&4&3&2&1&8&7 \\ 2&1&8&7&6&5&4&3 \\ 5&6&7&8&1&2&3&4 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
E(8):A_4 = [1/3.A(4)^2]2 = E(4):6	96	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(1,2,3)(4,6,5)$, $(4,6)(5,7)$	$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 5 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 8 & 2 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 2 & 8 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 4 & 8 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 8 & 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
1/2[E(4)^2:S_3]2 = E(4)^2:D_6	96	$(1,8)(2,3)$, $(1,2,3)(5,6,7)$, $(1,5)(2,7)(3,6)(4,8)$	$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 5 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 1 & 8 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 8 & 1 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 8 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
[2^4]D(4)	128	$(4,8)$, $(1,3)(5,7)$, $(1,2,3,8)(4,5,6,7)$	$(D_8 \times D_8) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
E(8):F_21	168	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(1,2,6,3,4,5,7)$, $(1,2,3)(4,6,5)$	$((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_7) \rtimes C_3$	J	

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
L(8) = PSL(2,7)	168	$(1,2,3,4,5,6,8)$, $(1,2,4)(3,6,5)$, $(1,6)(2,3)(4,5)(7,8)$	$\mathrm{PSL}_3(2)$	J	
[2^4]A(4)	192	$(4,8)$, $(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,2,3)(5,6,7)$	$(((C_2 \times D_8) \rtimes C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 3&4&1&2&7&8&5&6\\ 4&3&2&1&8&7&6&5\\ 2&1&4&7&6&5&8&3\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 7&8&5&6&3&4&1&2\\ 8&7&6&5&4&3&2&1\\ 6&5&8&3&2&1&4&7 \end{pmatrix}$
[2^3]S(4)	192	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(1,2,3)(4,6,5)$, $(1,6)(2,3,5,4)$	$(((C_2 \times D_8) \rtimes C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&3&7&8&4&5&1&6\\ 7&1&5&2&6&8&4&3\\ 8&6&2&5&1&7&3&4\\ 5&4&8&7&3&2&6&1\\ 6&5&4&3&2&1&8&7\\ 3&7&6&1&8&4&5&2\\ 4&8&1&6&7&3&2&5 \end{pmatrix}$
1/2[2^4]S(4)	192	$(1,5)(4,8)$, $(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,2,3)(5,6,7)$, $(2,3)(4,8)(6,7)$	$(((C_2 \times D_8) \rtimes C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&3&4&5&6&7&8&1\\ 4&1&2&7&8&5&6&3\\ 7&4&5&2&3&8&1&6\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&7&8&1&2&3&4&5\\ 8&5&6&3&4&1&2&7\\ 3&8&1&6&7&4&5&2 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
E(8):S_4 = [E(4)^2:S_3]2 = E(4)^2:D_12	192	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(1,2,3)(4,6,5)$, $(1,3)(4,5,6,7)$	$(((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&8&5&4&7&6&3\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 4&5&7&1&3&2&8&6\\ 5&4&6&2&8&1&3&7\\ 6&7&5&3&1&8&2&4\\ 7&6&4&8&2&3&1&5\\ 8&3&2&7&6&5&4&1 \end{pmatrix}$
[A(4)^2]2	288	$(1,3)(2,8)$, $(1,2,3)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$	$(A_4 \times A_4) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&8&5&4&7&6&3\\ 3&8&1&7&6&5&4&2\\ 4&5&7&1&2&8&3&6\\ 5&4&6&3&8&2&1&7\\ 6&7&5&2&1&3&8&4\\ 7&6&4&8&3&1&2&5\\ 8&3&2&6&7&4&5&1 \end{pmatrix}$
L(8):2 = PGL(2,7)	336	$(1,2,3,4,5,6,8)$, $(1,3,2,6,4,5)$, $(1,6)(2,3)(4,5)(7,8)$	$\mathrm{PSL}_3(2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&4&3&8&7&6&5\\ 5&8&6&7&3&2&1&4\\ 7&6&5&8&1&3&4&2\\ 8&5&7&6&4&1&2&3\\ 3&4&2&1&6&8&5&7\\ 6&7&8&5&2&4&3&1\\ 4&3&1&2&7&5&8&6 \end{pmatrix}$

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[2^4]S(4)	384	$(4,8)$, $(1,8)(4,5)$, $(1,2,3,8)(4,5,6,7)$	$((((C_2 \times D_8) \rtimes C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&3&4&1&6&7&8&5\\ 4&1&2&3&8&5&6&7\\ 3&4&1&6&7&8&5&2\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&7&8&5&2&3&4&1\\ 8&5&6&7&4&1&2&3\\ 7&8&5&2&3&4&1&6 \end{pmatrix}$
[1/2.S(4)^2]2	576	$(1,3)(2,8)$, $(1,2,3)$, $(1,8)(4,5)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$	$((A_4 \times A_4) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&8&5&4&7&6&3\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 4&5&7&1&2&8&3&6\\ 6&7&5&2&1&3&8&4\\ 7&6&4&3&8&2&1&5\\ 5&4&6&8&3&1&2&7\\ 8&3&2&7&6&5&4&1 \end{pmatrix}$
1/2[S(4)^2]2	576	$(1,3)(2,8)$, $(1,2,3)$, $(1,8)(4,5)$, $(1,5)(2,7,3,6)(4,8)$	$(A_4 \times A_4) \rtimes C_4$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&8&5&4&7&6&3\\ 3&8&1&6&7&4&5&2\\ 4&5&6&1&2&8&3&7\\ 5&4&7&3&8&2&1&6\\ 6&7&4&2&1&3&8&5\\ 7&6&5&8&3&1&2&4\\ 8&3&2&7&6&5&4&1 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[S(4)^2]2	1152	$(1,2,3,8)$, $(2,3)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$	$(S_4 \times S_4) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 5 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 2 & 3 & 8 & 1 & 6 \\ 6 & 7 & 4 & 8 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 8 & 1 & 2 & 4 \\ 8 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
E(8):L_7 = AL(8)	1344	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,3)(2,8)(4,6)(5,7)$, $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$, $(1,2,6,3,4,5,7)$, $(1,2,3)(4,6,5)$, $(1,2)(5,6)$	$(C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes \mathrm{PSL}_3(2)$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 8 & 7 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
A8	20160	$(1,2,3,4,5,6,7)$, $(6,7,8)$	A_8	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 8 & 7 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
S8	40320	$(1,2,3,4,5,6,7,8),\ (1,2)$	S_8	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&4&3&6&5&8&7\\ 3&4&1&2&7&8&5&6\\ 4&3&2&5&8&7&6&1\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&5&8&7&2&4&1&3\\ 7&8&6&1&4&3&2&5\\ 8&7&5&6&3&1&4&2 \end{pmatrix}$

§9 Grad 9

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
C(9) = 9	9	$(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$	C_9	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&3&4&5&6&7&8&9&1\\ 3&4&5&6&7&8&9&1&2\\ 4&5&6&7&8&9&1&2&3\\ 5&6&7&8&9&1&2&3&4\\ 6&7&8&9&1&2&3&4&5\\ 7&8&9&1&2&3&4&5&6\\ 8&9&1&2&3&4&5&6&7\\ 9&1&2&3&4&5&6&7&8 \end{pmatrix}$
E(9) = 3[x]3	9	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$	$C_3 \times C_3$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1\\ 3&4&8&6&7&2&9&1&5\\ 4&5&6&7&8&9&1&2&3\\ 5&3&7&8&6&1&2&9&4\\ 6&7&2&9&1&5&3&4&8\\ 7&8&9&1&2&3&4&5&6\\ 8&6&1&2&9&4&5&3&7\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2 \end{pmatrix}$

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
D(9) = 9:2	18	$(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$, $(1,8)(2,7)(3,6)(4,5)$	D_{18}	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 9&1&2&3&4&5&6&7&8\\ 8&9&1&2&3&4&5&6&7\\ 7&8&9&1&2&3&4&5&6\\ 6&7&8&9&1&2&3&4&5\\ 5&6&7&8&9&1&2&3&4\\ 4&5&6&7&8&9&1&2&3\\ 3&4&5&6&7&8&9&1&2\\ 2&3&4&5&6&7&8&9&1 \end{pmatrix}$
S(3)[x]3	18	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,2)(4,5)(7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$	$C_3 \times S_3$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2\\ 5&3&7&8&6&1&2&9&4\\ 4&5&6&7&8&9&1&2&3\\ 3&4&8&6&7&2&9&1&5\\ 8&6&1&2&9&4&5&3&7\\ 7&8&9&1&2&3&4&5&6\\ 6&7&2&9&1&5&3&4&8\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1 \end{pmatrix}$
S(3)[1/2]S(3) = 3^2:2	18	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(1,2)(3,6)(4,8)(5,7)$	$(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2\\ 8&6&1&2&9&4&5&3&7\\ 7&8&9&1&2&3&4&5&6\\ 6&7&2&9&1&5&3&4&8\\ 5&3&7&8&6&1&2&9&4\\ 4&5&6&7&8&9&1&2&3\\ 3&4&8&6&7&2&9&1&5\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
1/3[3^3]3	27	$(1,4,7)(2,8,5)$, $(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$	$C_9 \rtimes C_3$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 5&3&1&8&6&4&2&9&7\\ 9&4&8&3&7&2&6&1&5\\ 4&5&6&7&8&9&1&2&3\\ 8&6&4&2&9&7&5&3&1\\ 3&7&2&6&1&5&9&4&8\\ 7&8&9&1&2&3&4&5&6\\ 2&9&7&5&3&1&8&6&4\\ 6&1&5&9&4&8&3&7&2 \end{pmatrix}$
E(9):3 = [3^2]3	27	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(3,4,5)(6,8,7)$	$(C_3 \times C_3) \rtimes C_3$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1\\ 4&5&6&7&8&9&1&2&3\\ 5&3&7&8&6&1&2&9&4\\ 3&4&8&6&7&2&9&1&5\\ 8&6&1&2&9&4&5&3&7\\ 6&7&2&9&1&5&3&4&8\\ 7&8&9&1&2&3&4&5&6\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2 \end{pmatrix}$
S(3)[x]S(3) = E(9):D_4	36	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,2)(4,5)(7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(3,6)(4,7)(5,8)$	$S_3 \times S_3$	J	

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
E(9):4	36	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(1,8,2,4)(3,5,6,7)$	$(C_3 \times C_3) \rtimes C_4$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 5&3&7&8&6&1&2&9&4\\ 4&5&6&7&8&9&1&2&3\\ 8&6&1&2&9&4&5&3&7\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1\\ 3&4&8&6&7&2&9&1&5\\ 7&8&9&1&2&3&4&5&6\\ 6&7&2&9&1&5&3&4&8 \end{pmatrix}$
[3^2]S(3)_6	54	$(1,4,7)(2,8,5)$, $(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$, $(1,8)(2,7)(3,6)(4,5)$	$(C_9 \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 3&1&8&6&4&2&9&7&5\\ 5&9&4&8&3&7&2&6&1\\ 7&8&9&1&2&3&4&5&6\\ 9&7&5&3&1&8&6&4&2\\ 2&6&1&5&9&4&8&3&7\\ 4&5&6&7&8&9&1&2&3\\ 6&4&2&9&7&5&3&1&8\\ 8&3&7&2&6&1&5&9&4 \end{pmatrix}$
E(9):6 = 1/2[3^2:2]S(3)	54	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(3,4,5)(6,8,7)$, $(1,2)(3,6)(4,8)(5,7)$	$((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2\\ 6&7&1&2&9&3&4&5&8\\ 8&6&9&1&2&5&3&4&7\\ 7&8&2&9&1&4&5&3&6\\ 4&5&7&8&6&2&9&1&3\\ 3&4&6&7&8&1&2&9&5\\ 5&3&8&6&7&9&1&2&4\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1 \end{pmatrix}$

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[3^2]S(3)	54	$(3,4,5)(6,8,7)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(3,6)(4,7)(5,8)$	$((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	
E(9):D_6 = [3^2:2]3 = [1/2.S(3)^2]3	54	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(3,4,5)(6,8,7)$, $(1,2)(3,5)(6,7)$	$((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 5 & 3 & 4 & 8 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 6 & 7 & 9 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 6 & 2 & 9 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 2 & 9 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 9 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 8 & 6 & 9 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 9 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$
M(9) = E(9):Q_8	72	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(1,8,2,4)(3,5,6,7)$, $(1,6,2,3)(4,7,8,5)$	$(C_3 \times C_3) \rtimes Q_8$	J	
E(9):8	72	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(1,6,4,5,2,3,8,7)$	$(C_3 \times C_3) \rtimes C_8$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 8 & 6 & 7 & 2 & 9 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 2 & 9 & 1 & 5 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 9 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 3 & 4 & 8 & 6 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 8 & 6 & 1 & 2 & 9 & 4 \\ 8 & 6 & 1 & 2 & 9 & 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
E(9):D_8	72	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(1,2)(3,5)(6,7)$, $(1,8)(2,4)(5,7)$	$(S_3 \times S_3) \rtimes C_2$	J	

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[3^3]3 = 3wr3	81	$(1,2,9)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$	$(C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C_3$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1 \\ 3&4&6&7&8&1&2&9&5 \\ 4&5&7&8&6&2&9&1&3 \\ 5&3&8&6&7&9&1&2&4 \\ 6&7&1&2&9&4&5&3&8 \\ 7&8&2&9&1&5&3&4&6 \\ 8&6&9&1&2&3&4&5&7 \\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2 \end{pmatrix}$
E(9):D_12 = [3^2:2]S(3) = [1/2.S(3)^2]S(3)	108	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(3,4,5)(6,8,7)$, $(1,2)(3,6)(4,8)(5,7)$, $(1,2)(3,5)(6,7)$	$(((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	
E(9):2D_8	144	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(1,6,4,5,2,3,8,7)$, $(1,2)(3,5)(6,7)$	$((C_3 \times C_3) \rtimes C_8) \rtimes C_2$	J	
[3^3]S(3) = 3wrS(3)	162	$(1,2,9)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(3,6)(4,7)(5,8)$	$((C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1 \\ 6&7&1&2&9&3&4&5&8 \\ 7&8&2&9&1&4&5&3&6 \\ 8&6&9&1&2&5&3&4&7 \\ 3&4&6&7&8&2&9&1&5 \\ 4&5&7&8&6&9&1&2&3 \\ 5&3&8&6&7&1&2&9&4 \\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2 \end{pmatrix}$

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
1/2.[3^3:2]S(3)	162	$(1,2,9)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(1,2)(3,6)(4,8)(5,7)$	$((C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2\\ 6&7&1&2&9&3&4&5&8\\ 8&6&9&1&2&5&3&4&7\\ 7&8&2&9&1&4&5&3&6\\ 3&4&6&7&8&2&9&1&5\\ 5&3&8&6&7&1&2&9&4\\ 4&5&7&8&6&9&1&2&3\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1 \end{pmatrix}$
[3^3:2]3	162	$(1,2,9)$, $(1,2)(4,5)(7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$	$((C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1\\ 3&4&6&7&8&1&2&9&5\\ 4&5&7&8&6&2&9&1&3\\ 5&3&8&6&7&9&1&2&4\\ 6&8&1&9&2&3&5&4&7\\ 7&6&2&1&9&4&3&5&8\\ 8&7&9&2&1&5&4&3&6\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2 \end{pmatrix}$
E(9):2A_4	216	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(1,8,2,4)(3,5,6,7)$, $(3,4,5)(6,8,7)$	$((C_3 \times C_3) \rtimes Q_8) \rtimes C_3$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&3&1&5&6&4&8&9&7\\ 4&5&6&7&8&9&1&2&3\\ 5&6&4&8&9&7&2&3&1\\ 3&1&2&6&4&5&9&7&8\\ 8&9&7&2&3&1&5&6&4\\ 6&4&5&9&7&8&3&1&2\\ 7&8&9&1&2&3&4&5&6\\ 9&7&8&3&1&2&6&4&5 \end{pmatrix}$

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[3^3:2]S(3)	324	$(1,2,9)$, $(1,2)(4,5)(7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(3,6)(4,7)(5,8)$	$(((C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1 \\ 6&7&1&2&9&3&4&5&8 \\ 7&8&2&9&1&4&5&3&6 \\ 8&6&9&1&2&5&3&4&7 \\ 3&5&6&8&7&1&9&2&4 \\ 4&3&7&6&8&2&1&9&5 \\ 5&4&8&7&6&9&2&1&3 \\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2 \end{pmatrix}$
[1/2.S(3)^3]3	324	$(1,2,9)$, $(4,5)(7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$	$((C_3 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)) \rtimes C_2) \rtimes C_3$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1 \\ 3&4&6&7&8&1&2&9&5 \\ 4&5&7&8&6&2&9&1&3 \\ 5&3&8&6&7&9&1&2&4 \\ 6&7&1&9&2&3&5&4&8 \\ 7&8&2&1&9&4&3&5&6 \\ 8&6&9&2&1&5&4&3&7 \\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2 \end{pmatrix}$
E(9):2S_4	432	$(1,2,9)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(1,6,4,5,2,3,8,7)$, $(3,4,5)(6,8,7)$	$(((C_3 \times C_3) \rtimes Q_8) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 2&3&1&5&6&4&8&9&7 \\ 7&8&9&1&2&3&4&5&6 \\ 8&9&7&2&3&1&5&6&4 \\ 6&4&5&9&7&8&3&1&2 \\ 5&6&4&8&9&7&2&3&1 \\ 3&1&2&6&4&5&9&7&8 \\ 4&5&6&7&8&9&1&2&3 \\ 9&7&8&3&1&2&6&4&5 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
L(9) = PSL(2,8)	504	$(1,9)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,2,4,3,6,7,5)$, $(2,5)(3,6)(4,7)(8,9)$	$\mathrm{PSL}_2(8)$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&3&1&6&9&7&4&5&8\\ 4&6&7&5&3&9&8&2&1\\ 6&7&4&9&1&8&5&3&2\\ 7&4&6&8&2&5&9&1&3\\ 5&9&8&3&7&1&2&6&4\\ 9&8&5&1&4&2&3&7&6\\ 3&1&2&7&8&4&6&9&5\\ 8&5&9&2&6&3&1&4&7 \end{pmatrix}$
[S(3)^3]3 = S(3) wr 3	648	$(1,2,9)$, $(1,2)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$	$(((C_3 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)) \rtimes C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1\\ 3&4&6&7&8&1&2&9&5\\ 4&5&7&8&6&2&9&1&3\\ 5&3&8&6&7&9&1&2&4\\ 6&7&1&2&9&3&4&5&8\\ 7&8&2&9&1&5&3&4&6\\ 8&6&9&1&2&4&5&3&7\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2 \end{pmatrix}$
[1/2.S(3)^3]S(3)	648	$(1,2,9)$, $(4,5)(7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(3,6)(4,7)(5,8)$	$(((C_3 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)) \rtimes C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1\\ 6&7&1&2&9&3&4&5&8\\ 7&8&2&9&1&4&5&3&6\\ 8&6&9&1&2&5&3&4&7\\ 3&4&6&8&7&1&9&2&5\\ 4&5&7&6&8&2&1&9&3\\ 5&3&8&7&6&9&2&1&4\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
1/2[S(3)^3]S(3)	648	$(1,2,9)$, $(4,5)(7,8)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(1,2)(3,6)(4,7)(5,8)$	$(((C_3 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)) \rtimes C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1\\ 6&7&1&2&9&3&4&5&8\\ 7&8&2&9&1&4&5&3&6\\ 8&6&9&1&2&5&3&4&7\\ 3&4&6&7&8&1&2&9&5\\ 5&3&8&6&7&9&1&2&4\\ 4&5&7&8&6&2&9&1&3\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2 \end{pmatrix}$
[S(3)^3]S(3) = S(3) wr S(3)	1296	$(1,2,9)$, $(1,2)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$, $(3,6)(4,7)(5,8)$	$((((C_3 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)) \rtimes C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&9&4&5&3&7&8&6&1\\ 6&7&1&2&9&3&4&5&8\\ 7&8&2&9&1&4&5&3&6\\ 8&6&9&1&2&5&3&4&7\\ 3&4&6&7&8&1&2&9&5\\ 4&5&7&8&6&9&1&2&3\\ 5&3&8&6&7&2&9&1&4\\ 9&1&5&3&4&8&6&7&2 \end{pmatrix}$
L(9):3 = P|L(2,8)	1512	$(1,9)(2,3)(4,5)(6,7)$, $(1,2,4,3,6,7,5)$, $(2,5)(3,6)(4,7)(8,9)$, $(2,4,6)(3,5,7)$	$\mathrm{PSL}_2(8) \rtimes C_3$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&3&1&6&9&7&4&5&8\\ 4&6&7&5&3&9&8&2&1\\ 5&9&8&3&7&1&2&6&4\\ 3&1&2&7&8&4&6&9&5\\ 9&8&5&1&4&2&3&7&6\\ 6&7&4&9&1&8&5&3&2\\ 8&5&9&2&6&3&1&4&7\\ 7&4&6&8&2&5&9&1&3 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
A9	181440	$(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$, $(7,8,9)$	A_9	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&1&4&3&6&7&8&9&5\\ 3&4&1&2&7&5&9&6&8\\ 4&3&2&1&9&8&5&7&6\\ 5&6&7&8&1&9&2&4&3\\ 6&7&5&9&8&1&3&2&4\\ 7&9&8&5&4&3&6&1&2\\ 8&5&9&6&2&4&1&3&7\\ 9&8&6&7&3&2&4&5&1 \end{pmatrix}$
S9	362880	$(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$, $(1,2)$	S_9	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 2&1&4&3&6&5&8&9&7\\ 3&4&1&2&7&8&9&5&6\\ 4&3&2&1&8&9&6&7&5\\ 5&6&7&8&9&1&2&3&4\\ 6&5&8&9&1&7&3&4&2\\ 7&8&9&5&2&3&4&6&1\\ 8&9&6&7&4&2&5&1&3\\ 9&7&5&6&3&4&1&2&8 \end{pmatrix}$

§10 Grad 10

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
C(10)=5[x]2	10	$(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$	C_{10}	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
D(10)=5:2	10	$(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(1,4)(2,3)(5,10)(6,9)(7,8)$	D_{10}	N	
D_10(10)=[D(5)]2	20	$(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$, $(1,8)(2,7)(3,6)(4,5)(9,10)$	D_{20}	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \end{pmatrix}$
1/2[F(5)]2	20	$(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(1,2,9,8)(3,6,7,4)(5,10)$	$C_5 \rtimes C4$	N	

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
F(5)[x]2	40	$(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$, $(1,7,9,3)(2,4,8,6)$	$C_2 \times (C_5 \rtimes C_4)$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
[5^2]2	50	$(2,4,6,8,10)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$C_5 \times D_{10}$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 8 & 5 & 10 & 7 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 8 & 5 & 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 5 & 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 3 & 8 & 5 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 3 & 8 & 5 & 10 & 7 \end{pmatrix}$
A_5(10)	60	$(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(1,9)(3,4)(5,10)(6,7)$	A_5	J	
[2^4]5	80	$(2,7)(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$	$(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5$	J	

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[1/2.D(5)^2]2	100	$(2,4,6,8,10)$, $(1,9)(2,8)(3,7)(4,6)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$D_{10} \times D_{10}$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 \\ 3 & 10 & 5 & 2 & 7 & 4 & 9 & 6 & 1 & 8 \\ 4 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 10 & 5 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 7 & 10 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 1 & 10 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 8 & 5 & 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 9 & 4 & 1 & 6 & 3 & 8 & 5 & 10 & 7 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
1/2[D(5)^2]2	100	$(2,4,6,8,10)$, $(1,6,9,4)(2,3,8,7)(5,10)$	$(C_5 \times C_5) \rtimes C_4$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 9 & 6 & 7 & 8 & 5 & 10 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 6 & 7 & 8 & 5 & 10 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 10 & 3 & 2 & 1 & 4 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 5 & 10 & 3 & 2 & 1 & 4 & 9 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 3 & 2 & 1 & 4 & 9 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$
A(5)[x]2	120	$(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(2,4,10)(5,7,9)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$C_2 \times A_5$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
1/2[S(5)]2=S_5(10a)	120	$(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(1,4)(2,7)(3,8)(5,10)(6,9)$	S_5	J	
S_5(10d)	120	$(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(1,2)(3,7)(8,9)$	S_5	J	
[2^5]5	160	$(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$	$C_2 \times ((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5)$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 6 & 7 & 8 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
[2^4]D(5)	160	$(2,7)(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(1,9)(2,8)(3,7)(4,6)$	$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5) \rtimes C_2$	J	
1/2[2^5]D(5)	160	$(2,7)(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(1,9)(2,8)(3,7)(4,6)(5,10)$	$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5) \rtimes C_2$	J	
[5^2:4]2	200	$(2,4,6,8,10)$, $(1,7,9,3)(2,4,8,6)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$((C_5 \times C_5) \rtimes C4) \rtimes C2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & 8 & 1 & 10 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 10 & 5 & 2 & 7 & 4 & 9 & 6 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 10 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[5^2:4]2_2	200	$(2,4,6,8,10)$, $(1,7,9,3)(2,4,8,6)$, $(1,4,3,2,9,6,7,8)(5,10)$	$(C_5 \times C_5) \rtimes C_8$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 3 & 8 & 9 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 & 3 & 8 & 9 & 10 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 8 & 9 & 10 & 5 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 & 5 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 5 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
[5^2:4_2]2	200	$(2,4,6,8,10)$, $(1,3,9,7)(2,4,8,6)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$(D_{10} \times D_{10}) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & 1 & 10 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 8 & 5 & 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 1 & 10 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 10 & 5 & 2 & 7 & 4 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$
[5^2:4_2]2_2	200	$(2,4,6,8,10)$, $(1,3,9,7)(2,4,8,6)$, $(1,6,9,4)(2,3,8,7)(5,10)$	$(C_5 \times C_5) \rtimes Q_8$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 9 & 6 & 7 & 8 & 5 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 1 & 10 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & 8 & 7 & 10 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 10 & 1 & 2 & 9 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 1 & 10 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 10 & 7 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[D(5)^2]2	200	$(2,4,6,8,10)$, $(2,8)(4,6)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$(D_{10} \times D_{10}) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 10 & 5 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 5 & 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
S(5)[x]2	240	$(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(2,10)(5,7)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$C_2 \times S_5$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 9 & 10 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 8 & 9 & 10 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 9 & 10 & 1 & 8 & 7 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 9 & 10 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 9 & 10 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ 8 & 9 & 10 & 7 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 9 & 10 & 1 & 8 & 7 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
[2^5]D(5)	320	$(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(1,9)(2,8)(3,7)(4,6)$	$C_2 \times (((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5) \rtimes C_2)$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[2^4]F(5)	320	$(2,7)(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(1,7,9,3)(2,4,8,6)$	$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5) \rtimes C_4$	J	
1/2[2^5]F(5)	320	$(2,7)(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(1,7,9,3)(2,4,8,6)(5,10)$	$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5) \rtimes C_4$	J	
L(10)=PSL(2,9)	360	$(1,2,10)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,3,2,6)(4,5,8,7)$, $(1,2)(4,7)(5,8)(9,10)$	A_6	J	
[1/2.F(5)^2]2	400	$(2,4,6,8,10)$, $(2,8)(4,6)$, $(1,7,9,3)(2,4,8,6)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$(((C_5 \times C_5) \rtimes C_4) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 7 & 4 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 3 & 8 \\ 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 10 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 8 & 5 & 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 10 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & 1 & 10 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
1/2[F(5)^2]2	400	$(2,4,6,8,10)$, $(2,8)(4,6)$, $(1,6,7,2,9,4,3,8)(5,10)$	$((C_5 \times C_5) \rtimes C_8) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 9 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 & 1 & 8 & 5 & 10 & 9 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 8 & 7 & 10 & 1 & 2 & 5 & 4 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 & 3 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 5 & 2 & 9 & 4 & 3 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[2^5]F(5)	640	$(5, 10)$, $(1, 3, 5, 7, 9)(2, 4, 6, 8, 10)$, $(1, 7, 9, 3)(2, 4, 8, 6)$	$C_2\times(((C_2\times C_2\times C_2\times C_2)\rtimes C_5)\rtimes C_4)$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 9 & 10 & 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$
L(10):2=PGL(2,9)	720	$(1, 2, 10)(3, 4, 5)(6, 7, 8)$, $(1, 7, 3, 4, 2, 5, 6, 8)$, $(1, 2)(4, 7)(5, 8)(9, 10)$	$A_6 \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 9 & 10 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 8 & 10 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 & 9 \\ 9 & 7 & 6 & 5 & 10 & 8 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 10 & 8 & 7 & 9 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 9 & 7 & 8 & 3 & 10 & 4 \\ 3 & 4 & 10 & 8 & 2 & 1 & 5 & 9 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 9 & 10 & 4 & 8 & 3 \\ 8 & 10 & 9 & 7 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 5 & 6 & 8 & 10 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
M(10)=L(10)'2	720	$(1, 2, 10)(3, 4, 5)(6, 7, 8)$, $(1, 3, 2, 6)(4, 5, 8, 7)$, $(1, 2)(4, 7)(5, 8)(9, 10)$, $(1, 4, 2, 8)(3, 7, 6, 5)$	$A_6.C_2$	J	
S_6(10)=L(10):2	720	$(1, 2, 10)(3, 4, 5)(6, 7, 8)$, $(1, 3, 2, 6)(4, 5, 8, 7)$, $(1, 2)(4, 7)(5, 8)(9, 10)$, $(3, 6)(4, 7)(5, 8)$	S_6	J	

G	$\lvert G\rvert$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[F(5)^2]2	800	$(2,4,6,8,10)$, $(2,4,8,6)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$((C_5 \rtimes C_4) \times (C_5 \rtimes C_4)) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 8 & 1 & 10 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 10 & 5 & 2 & 7 & 4 & 9 & 6 & 1 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$
[2^4]A(5)	960	$(2,7)(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(2,4,10)(5,7,9)$	$(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes A_5$	J	
L(10).2^2=P|L(2,9)	1440	$(1,2,10)(3,4,5)(6,7,8)$, $(1,7,3,4,2,5,6,8)$, $(1,2)(4,7)(5,8)(9,10)$, $(3,6)(4,7)(5,8)$	$(A_6 \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 9 & 10 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 10 & 8 & 2 & 1 & 5 & 9 & 6 & 7 \\ 8 & 10 & 9 & 7 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 5 & 6 & 8 & 10 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 9 & 10 & 4 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 9 & 7 & 8 & 3 & 10 & 4 \\ 4 & 3 & 8 & 10 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 & 9 \\ 10 & 8 & 7 & 9 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \\ 9 & 7 & 6 & 5 & 10 & 8 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[2^5]A(5)	1920	$(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(2,4,10)(5,7,9)$	$C_2 \times ((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes A_5)$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 10 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
[2^4]S(5)	1920	$(2,7)(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(2,10)(5,7)$	$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes A_5) \rtimes C_2$	J	
1/2[2^5]S(5)	1920	$(2,7)(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(2,4)(5,10)(7,9)$	$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes A_5) \rtimes C_2$	J	
[2^5]S(5)	3840	$(5,10)$, $(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)$, $(2,10)(5,7)$	$C_2 \times (((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes A_5) \rtimes C_2)$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 & 9 & 10 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 9 & 10 & 7 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 9 & 10 & 8 & 6 & 7 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 9 & 10 & 8 & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 9 & 10 & 7 & 8 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 6 & 7 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[A(5)^2]2	7200	$(2,4,6,8,10)$, $(2,4,10)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$(A_5 \times A_5) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\ 2&1&4&3&6&5&8&7&10&9\\ 3&4&5&6&7&8&9&10&1&2\\ 4&3&6&5&8&7&10&9&2&1\\ 5&6&7&8&9&10&1&2&3&4\\ 6&7&8&9&10&1&2&3&4&5\\ 7&8&9&10&1&2&3&4&5&6\\ 8&9&10&1&2&3&4&5&6&7\\ 9&10&1&2&3&4&5&6&7&8\\ 10&5&2&7&4&9&6&1&8&3 \end{pmatrix}$
[1/2.S(5)^2]2 = [A(5):2]2	14400	$(2,4,6,8,10)$, $(2,10)(5,7)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$((A_5 \times A_5) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\ 2&1&4&3&6&5&8&7&10&9\\ 3&4&1&2&7&8&9&10&5&6\\ 4&3&2&1&8&7&10&9&6&5\\ 5&6&7&8&9&10&1&2&3&4\\ 6&5&8&7&10&9&2&1&4&3\\ 7&10&9&6&3&2&5&4&1&8\\ 8&9&10&5&4&1&6&3&2&7\\ 9&8&5&10&1&4&3&6&7&2\\ 10&7&6&9&2&3&4&5&8&1 \end{pmatrix}$
1/2[S(5)^2]2	14400	$(2,4,6,8,10)$, $(1,6)(2,5,10,7)(3,8)(4,9)$	$(A_5 \times A_5) \rtimes C_4$	J	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\ 2&1&4&3&6&5&8&9&10&7\\ 3&4&1&2&7&8&9&10&5&6\\ 4&3&2&1&8&7&10&5&6&9\\ 5&6&7&8&9&10&1&2&3&4\\ 6&5&8&7&10&9&2&3&4&1\\ 7&8&9&10&3&4&5&6&1&2\\ 8&9&10&5&4&1&6&7&2&3\\ 9&10&5&6&1&2&3&4&7&8\\ 10&7&6&9&2&3&4&1&8&5 \end{pmatrix}$

G	$\|G\|$	Erzeuger	Struktur	VF	Q mit $\mathrm{M}(Q) = G$
[S(5)^2]2	28800	$(2,4,6,8,10)$, $(2,10)$, $(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$	$(S_5 \times S_5) \rtimes C_2$	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 9 & 10 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 10 & 9 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 8 & 9 & 10 & 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 9 & 10 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 10 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
A10	1814400	$(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$, $(8,9,10)$	A_{10}	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 9 & 10 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 10 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 9 & 10 & 5 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 10 & 9 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 10 & 7 & 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 \\ 9 & 10 & 5 & 6 & 4 & 7 & 1 & 3 & 8 & 2 \\ 10 & 7 & 6 & 5 & 9 & 4 & 3 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$
S10	3628800	$(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$, $(1,2)$	S_{10}	J	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 9 & 10 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 10 & 9 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 8 & 9 & 10 & 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 \\ 9 & 10 & 5 & 6 & 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 8 \\ 10 & 7 & 6 & 9 & 4 & 2 & 3 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Anhang C

Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung
$(\cdot,\cdot)$	Skalarprodukt auf dem Raum der Klassenfunktionen einer Gruppe, (2.20)
q_1/q_2	Division von rechts in Quasigruppen, (1.2)
$q_1\backslash q_2$	Division von links in Quasigruppen, (1.2)
$H\backslash G$	Menge der Rechtsnebenklassen der Gruppe G nach der Untergruppe $H \leqslant G$
$\otimes$	Kronecker-Produkt von Matrizen, (2.24)
$\overline{x}$	komplex konjugiertes Element zu $x \in \mathbb{C}$
1_G	trivialer Charakter der Gruppe G, (2.14)
$A^{(i)}$	i-te Adjazenzmatrix von Q, (1.5)
A_n	alternierende Gruppe auf $\{1,\ldots,n\}$
Atp Q	Autotopismengruppe einer Quasigruppe Q, (1.15)
Aut Q	Automorphismengruppe einer Quasigruppe Q, S. 14
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{C}^{m\times n}$	Ring der $(m\times n)$-Matrizen über $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}M$	$\mathbb{C}$-Vektorraum mit der Menge M als Basis
C_i	Konjugiertenklasse von Q, (1.4)
C_i^{-1}	entgegengesetzte Konjugiertenklasse von C_i,(1.4)
$C_i(q)$	(2.3)
$d_G(x)$	Grad der Ecke x im Graphen G, (3.22)
$\dim_{\mathbb{C}} V$	$\mathbb{C}$-Dimension des Vektorraumes V
e	Eulersche Zahl
ϵ	Funktor aus (1.25) und (1.30)
$\mathrm{End}_R(M)$	Ring der R-Endomorphismen von M
G_n	vollständiger Graph auf n Punkten, (3.20)
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	Gruppe der invertierbaren $(n\times n)$-Matrizen über $\mathbb{C}$
id_Q	Die Abbildung $Q \to Q, q \mapsto q$
$I(n)$	Anzahl der Quasigruppen von Ordnung n mit imprimitiver linker Multiplikationsgruppe, III.4

Symbol	Bedeutung
im	Bild eines Gruppenhomomorphismus
ker	Kern eines Gruppenhomomorphismus
l	Funktor aus (1.31) und (1.32)
log	natürlicher Logarithmus
$L(x)$	Linkstranslation mit $x \in Q$, (1.3)
$\mathrm{LN}(Q)$	Menge der linksnuklearen Elemente einer Quasigruppe Q, (1.19)
$\mathrm{LM}(Q)$	linke Multiplikationsgruppe von Q,(1.3)
$\mathrm{M}(Q)$	Multiplikationsgruppe von Q, (1.3)
$\mathrm{MN}(Q)$	Menge der mittelnuklearen Elemente einer Quasigruppe Q, (1.19)
Mor C	Familie der Morphismen einer Kategorie C, (1.27)
$\mathrm{N}(Q)$	Menge der nuklearen Elemente einer Quasigruppe Q, (1.19)
$N_G(S)$	Nachbarschaft einer Eckenmenge S im Graphen G, (3.26)
Ob C	Klasse der Objekte einer Kategorie C, (1.27)
$P(n)$	Anzahl der Quasigruppen von Ordnung n, deren linke Multiplikationsgruppe primitiv, aber weder S_n noch A_n sind, (3.9)
per	Permanente einer Matrix, (3.2)
Q	Quasigruppe, (1.1)
$Q(n)$	Anzahl der Quasigruppen der Ordnung n, (3.4)
ρ	(2.2)
$R(x)$	Rechtstranslation mit $x \in Q$, (1.3)
$\mathrm{RN}(Q)$	Menge der rechtsnuklearen Elemente einer Quasigruppe Q, (1.19)
$\mathrm{RM}(Q)$	rechte Multiplikationsgruppe von Q,(1.3)
S_M	Symmetrische Gruppe auf der Menge M
S_n	Symmetrische Gruppe auf der Menge $\{1,\ldots,n\}$
$\mathrm{Stab}_G(x)$	Stabilisator eines Elements x aus einer Menge M in einer auf M operierenden Gruppe G
$V(Q)$	Vertauschungsring von Q, (2.1)
ξ	Loop-Folder bzw. Loop-Hülle, (1.24)
$X \sim X_1 + X_2$	(2.10)
$Z(Q)$	Zentrum einer Quasigruppe Q, (1.21)

Literatur

[AB95] Alperin, J. L. ; Bell, R. B.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 162: *Groups and Representations*. New York : Springer-Verlag, 1995

[Asc05] Aschbacher, M.: On Bol loops of exponent 2. In: *Journal of Algebra* 288 (2005), S. 99–136

[Bab81] Babai, L.: On the order of uniprimitive permutation groups. In: *Ann. Math.* 113 (1981), S. 553–568

[BI84] Bannai, E. ; Ito, T.: *Algebraic Combinatorics I*. Menlo Park, CA : Benjamin/Cummings Publishing Co., 1984

[Cam81] Cameron, P. J.: Finite permutation groups and finite simple groups. In: *Bull. London Math. Soc.* 13 (1981), S. 1–22

[Cam92] Cameron, P. J.: Almost all quasigroups have rank 2. In: *Discrete Mathematics 106/107* (1992), S. 111–115

[CR62] Curtis, C. W. ; Reiner, I.: *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. Wiley, 1962

[Ego81] Egorychev, G. P.: The Solution of van der Waerden's Problem for Permanents. In: *Adv. Math.* 42 (1981), S. 299–305

[EK94] Estrada, R. ; Kanwal, R. P.: *Asymptotic Analysis: A Distributional Approach*. Boston, MA : Birkhäuser Boston, Inc., 1994

[Fal81] Falikman, D. I.: Proof of the van der Waerden conjecture regarding the permanent of a doubly stochastic matrix. In: *Math. Notes* 29 (1981), S. 475–479

[GAP06] The GAP Group: *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*. 2006. – http://www.gap-system.org

[Hal86] Hall Jr., M.: *Combinatorial Theory*. Second Edition. New York (u. a.) : Wiley Interscience, 1986

[Heu01] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. 14. Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden : Teubner GmbH, 2001

[Isa76] Isaacs, I. M.: *Character theory of finite groups*. New York : Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1976. – Pure and Applied Mathematics, No. 69

[Jac04] Jacob, J.: *Representation Theory of Association Schemes*, RWTH Aachen, Diss., 2004

[JMT04] Jongen, H. T. ; Meer, K. ; Triesch, E.: *Optimization Theory.* Boston / Dordrecht / New York / London : Kluwer Academic Publishers, 2004

[JS84] Johnson, K.W. ; Smith, J.D.H.: Characters of Finite Quasigroups. In: *Europ. J. Combinatorics* 5 (1984), S. 43–50

[Lan02] Lang, S.: *Algebra.* Revised Third Edition. New York : Springer-Verlag, 2002

[Loo06] The GAP Group: *GAP–package LOOPS.* 2006. – `http://www.gap-system.org/Packages/loops.html`

[Pfl90] Pflugfelder, H. O.: *Sigma Series in Pure Mathematics.* Bd. 7: *Quasigroups and loops: introduction.* Berlin : Heldermann Verlag, 1990

[Smi86] Smith, J. D. H.: *Representation Theory of Infinite Groups and Finite Quasigroups.* Presses Univ. Montreal, 1986

[Smi90] Smith, J. D. H.: Entropy, character theory and centrality of finite quasigroups. In: *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 108 (1990), S. 435–443

[Son07] The GAP Group: *GAP–package SONATA.* 2007. – `http://www.gap-system.org/Packages/sonata.html`

Index

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.