Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker — Blatt 1

Abgabe: Fr, 26.10.2001 bis 15 Uhr 30, Briefkasten vor H 3 — 19.10.2001

1. Gegeben seien $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Berechne $y + w - 2v, v \cdot w, \|v\|, \|w\|, v \times w, v \times (w \times y)$ und $(v \times w) \times y$.

   (b) Welchen Winkel schließen die Vektoren v und w ein ?

   (c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. (7 Punkte)

2. Es sei E die Ebene durch die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Liegt der Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in dieser Ebene ? (2 Punkte)

   (b) Bestimme diejenige Gerade, die durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft und senkrecht auf E steht. Wo schneidet diese Gerade die Ebene E ? (2 Punkte)

   (c) Bestimme den Durchschnitt $E \cap E_1$ für

   (i) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

   (ii) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \; : \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

   (iii) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \; : \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ (6 Punkte)

3. Formuliere folgende Sätze aus der Elementargeometrie präzise mithilfe der Vektorrechnung, und beweise sie:

   (a) Ein Trapez ist ein Viereck mit (mindestens) zwei parallelen Seiten, im folgenden a und c genannt. Dann ist diejenige Strecke, die sich ergibt, wenn man die Mittelpunkte der anderen beiden Seiten miteinander verbindet, parallel zu a und c , und ihre Länge ist gleich dem Mittelwert der Längen von a und c .

   (b) Satz des Pythagoras: In einem Dreieck mit Seitenlängen a, b und c gilt $c^2 = a^2 + b^2$ genau dann, wenn das Dreick rechtwinklig ist mit Hypotenuse c und Katheten a und b . (6 Punkte)

4. Es seien $v, w \in \mathbb{R}^3$. Zeige:
   $v \times w = o \Leftrightarrow v = o$ oder $w = o$ oder $\exists \; \lambda \in \mathbb{R}$ mit $w = \lambda v$. (4 Punkte)