Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker — Blatt 9

Abgabe: Fr, 11.1.2002 bis 15.30 Uhr, Briefkasten vor H3 — 14.12.2001

30. Entscheide, ob die folgenden Aussagen stets zutreffen oder nicht. Sei K ein Körper, seien $A \in K^{m,n}$, $B \in K^{n,p}$, wobei $m, n, p \geq 1$. (Beweis oder Gegenbeispiel!)

    (a) $\ker B \subseteq \ker AB$.

    (b) Falls $\ker A = \{0\}$, dann ist $\ker B = \ker AB$.

    (c) Falls $\ker B = \ker AB$, dann ist $\ker A = \{0\}$.

    (d) Falls $m = n$ und $A^2 = A$, dann ist $K^m = \ker A \oplus \operatorname{Im} A$.

    (e) $K^m = \ker A \oplus \operatorname{Im} A^{\mathrm{T}}$.

    (f) $\ker A = \operatorname{Im} B \iff \ker B^{\mathrm{T}} = \operatorname{Im} A^{\mathrm{T}}$.

(6 Punkte)

31. Berechne die Determinante der Matrix A .

    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimme dazuhin von der Lösung $x \in \mathbb{R}^4$ des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ den zweiten Eintrag vermittels der Cramerschen Regel.

    (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1+2i & 3 \\ 2+2i & 1-i & 3+2i & 7+6i \\ 3-i & -3+2i & 5+i & 9-2i \\ 1+i & 6+2i & 3+i & 3+3i \end{pmatrix}$.

    (d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, d.h. die Matrix aus Aufgabe 27 (a). Was fällt bei Vergleich Determinante und Inverse auf?

    (e) Seien $x_0, \ldots, x_n$ aus einem Körper K , und sei $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in K^{n+1,n+1}$.
    Zeige, daß $\det A = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

    (f) Sei s aus einem Körper K , sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A_n \in K^{n,n}$ gegeben durch $A_n(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & s & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s \end{pmatrix}$. Also z.B. $A_1(s) = (s)$, $A_2(s) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix}$. Zeige, daß $\det A_n(s) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n-i}{i} s^{n-2i}$.

(16 Punkte)

32. Sei K ein Körper, sei $A \in K^{m,m}$, sei $B \in K^{n,n}$, sei $C \in K^{m,n}$. Schreibe $0 = 0_{n,m}$.

(a) Zeige, daß $\det \left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) = \det A \cdot \det B$.

(b) Zeige, daß A und B genau beide regulär sind, wenn $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ regulär ist.

(c) Gib diesenfalls die Inverse von $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ unter Verwendung von A^{-1} und B^{-1} an.

(5 Punkte)

33. (Weihnachtsaufgabe.) Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $t \geq 2$ eine ganze Zahl und sei $1 \leq m \leq n-1$.

(a) Sei $A \in \mathbb{Z}^{n,n}$ mit $\det A \neq 0$. Zeige, daß die Einträge von A^{-1} genau dann sämtlich in $\mathbb{Z}$ liegen, wenn $\det A \in \{-1, +1\}$. Man folgere, daß diese Matrizen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bilden.

(b) Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{n,n}$, sei $0 \leq k \leq m$. Es teile t den Eintrag $a_{i,j}$ wann immer $1 \leq i \leq m$ und $m+1-k \leq j \leq n$. Zeige mit der Leibniz-Formel, daß t^k die Determinante $\det A$ teilt.

(c) Sei

$$G_{n,m,t} := \left\{ A = (a_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{n,n} \;\middle|\; \begin{array}{l} \det A = 1, \\ t \text{ teilt } a_{i,j} \text{ falls } 1 \leq i \leq m \text{ und } m+1 \leq j \leq n \end{array} \right\} .$$

Zeige unter Zuhilfenahme der Adjunktenformel und (b), daß $G_{n,m,t}$ mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(6 Zusatzpunkte)

34. (Neujahrsproblem.) Zeige die Formel von Cauchy-Binet. Sei hierzu $A \in K^{m,n}$, $B \in K^{n,m}$, $m \leq n$. Nachzuweisen ist

$$\det(AB) \;=\; \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq m} \det\left(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}\right) \det \begin{pmatrix} b^{i_1} \\ b^{i_2} \\ \vdots \\ b^{i_m} \end{pmatrix} .$$

(Hinweis: Verfahre in Analogie zum Determinantenmultiplikationssatz.)

(6 Zusatzpunkte)

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch wünscht das gesamte LA-Team!