Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker

Lösungen Blatt 14

Aufgabe 52.

i) Ist indefinit, da Hauptdiagonaleinträge mit verschiedenen Vorzeichen auftreten.

ii) Ist positiv semidefinit, da die Eigenwerte 0, 3 und 14 betragen.

iii) Das charakteristische Polynom von A ist $p_A(\lambda) = (s - \lambda + 3)(s - \lambda - 1)^3$. Also ist A positiv definit für $s > 1$, positiv semidefinit für $s = 1$, indefinit für $-3 < s < 1$, negativ semidefinit für $s = -3$ und negativ definit für $s < -3$.

Aufgabe 53.

Sei $x = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$, sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 5 \\ -3 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist zu zeigen, daß $x^{\mathrm{T}} A x > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$. In anderen Worten, die Matrix A ist als positiv definit nachzuweisen. Die Folge der Hauptminoren ist $H_1 = 3$, $H_2 = \det \left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right) = 11$, $H_3 = \det A = 6$. Da diese alle positiv sind, ist A in der Tat positiv definit.

Beachte, daß das Hauptminorkriterium zu zeigen hier einfacher ist, als die Eigenwerte zu bestimmen.