

Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker

Lösungen Blatt 9

Aufgabe 30.

- a) Aussage ist wahr. Ist $Bx = 0$, so ist auch $ABx = 0$.
- b) Aussage ist wahr. Zu zeigen ist unter Voraussetzung $\ker A = 0$, daß $\ker AB \subseteq \ker B$. Aber $ABx = 0$ impliziert nun $Bx = 0$.
- c) Aussage ist falsch. Sei etwa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, über K beliebig.
- d) Aussage ist wahr. Summe ist K^m : $x = (E - A)x + Ax$. Summe ist direkt: Ist ein Element Ax des Bildes im Kern, so ist $0 = A(Ax) = Ax$. Also ist $\text{Im } A \cap \ker A = 0$.
- e) Aussage ist falsch. Sei etwa $K = \mathbf{C}$, $A = (1i)$. Der Kern von A ist erzeugt von $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, das Bild von A^T ebenfalls.
- f) Aussage ist wahr. Zu zeigen genügt die Implikation \implies . Wegen $AB = 0$ ist $B^T A^T = 0$, und folglich $\text{Im } A^T \subseteq \ker B^T$. Bleibt zu zeigen, daß die Dimensionen übereinstimmen. Aber $\dim \text{Im } A^T = \dim \text{Im } A = n - \dim \ker A = n - \dim \text{Im } B = n - \dim \text{Im } B^T = \dim \ker B^T$.

Aufgabe 31.

- a) $\det A = 2$.
- b) $\det A = 62$. Nach der Cramerschen Regel ist der gesuchte Eintrag von x also $\frac{1}{62} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{31}$.
- c) $\det A = -26 + 74i$.
- d) $\det A = -59$. Die 59 war der Nenner der Einträge von A^{-1} (in gekürzter Form). Eine Erklärung hierfür liefert die Adjunktenformel für A^{-1} .
- e) Wir führen eine Induktion nach n . Der Induktionsanfang $n = 1$ folgt daraus, daß das leere Produkt den Wert 1 hat. Wir nehmen nun die Formel für $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrizen als gegeben an. Umformung liefert

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 0 & (x_1 - x_0) & (x_1 - x_0)(x_0 + x_1) & \dots & (x_1 - x_0)(x_0^{n-1}x_1^0 + x_0^{n-2}x_1^1 + \dots + x_0^0x_1^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_0 + x_n) & \dots & (x_n - x_0)(x_0^{n-1}x_n^0 + x_0^{n-2}x_n^1 + \dots + x_0^0x_n^{n-1}) \end{pmatrix} \\
 &= (x_1 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 + x_1 & \dots & x_0^{n-1}x_1^0 + x_0^{n-2}x_1^1 + \dots + x_0^0x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_0 + x_n & \dots & x_0^{n-1}x_n^0 + x_0^{n-2}x_n^1 + \dots + x_0^0x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
 &= (x_1 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
 &= (x_1 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\
 &= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
 \end{aligned}$$

f) Schreibe $f_n(s) := \det A_n(s)$. Für $n \geq 3$ ist $f_n(s) = sf_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)$, wie durch Entwicklung nach erster Zeile folgt. Wir führen eine Induktion nach n und nehmen die Formel an für $n-1$ und $n-2$. Für $n=1$ und $n=2$ folgt die Formel hierbei mit direktem Nachrechnen. Allgemein wird

$$\begin{aligned} f_n(s) &= sf_{n-1}(s) - f_{n-2}(s) \\ &= \left(s \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n-1-i}{i} s^{n-1-2i} \right) - \left(\sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n-2-i}{i} s^{n-2-2i} \right) \\ &= s^n + \sum_{i \geq 1} \left((-1)^i \binom{n-1-i}{i} s^{n-2i} - (-1)^{i-1} \binom{n-1-i}{i-1} s^{n-2i} \right) \\ &= s^n + \sum_{i \geq 1} (-1)^i \binom{n-i}{i} s^{n-2i} \\ &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n-i}{i} s^{n-2i}. \end{aligned}$$

Aufgabe 32.

a) Bringe durch elementare Zeilenumformungen vom Typ $Q_{i,j}(\lambda)$ mit entweder $1 \leq i, j \leq m$ oder $m+1 \leq i, j \leq m+n$ die Matrix $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ in obere Dreiecksform, d.h. ihre Einträge $x_{i,j}$ sollen verschwinden falls $i > j$. Die Determinante hat sich dadurch nicht geändert und berechnet sich als Produkt der Hauptdiagonalelemente $x_{11} \cdots x_{m+n, m+n}$. Die Determinante von A ist aber $x_{11} \cdots x_{m,m}$, und die Determinante von B ist $x_{m+1, m+1} \cdots x_{m+n, m+n}$.

b) Eine Matrix ist regulär genau dann, wenn ihre Determinante nicht verschwindet.

c) Setzt man $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} = E_{m+n, m+n}$ an, so erhält man als Bedingungen $BV = 0$, woraus $U = 0$, $BV = E_{n,n}$, woraus $V = B^{-1}$, sodann $AX = E_{m,m}$, woraus $X = A^{-1}$ und schließlich $AY + CB^{-1} = 0$, woraus $Y = -A^{-1}CB^{-1}$. Also wird $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$, was man auch leicht direkt verifiziert.

Aufgabe 33.

a) Liegen die Einträge von A^{-1} sämtlich in \mathbf{Z} , so ist auch $\det A^{-1} \in \mathbf{Z}$. Wegen $\det A = (\det A^{-1})^{-1} \in \mathbf{Z}$ muß $\det A \in \{-1, +1\}$ liegen.

Umgekehrt, falls $\det A \in \{-1, +1\}$, so zeigt die Adjunktenformel, daß A^{-1} ganzzahlige Einträge hat.

Damit sind diese Matrizen in $\text{GL}_n(\mathbf{Q})$ unter Inversion abgeschlossen. Da die Determinante multiplikativ ist, und da $\{-1, +1\}$ unter der Multiplikation abgeschlossen ist, ist diese Menge von Matrizen auch unter Multiplikation abgeschlossen. Eine unter Multiplikation und Inversion abgeschlossene Teilmenge einer Gruppe bildet mit der geerbten Multiplikation ebenfalls wieder eine Gruppe.

Bemerkung (fakultativ). Die Gruppe dieser Matrizen wird als $\text{GL}_n(\mathbf{Z})$ bezeichnet, i.e. als allgemeine lineare Gruppe über \mathbf{Z} . Die Untergruppe der ganzzahligen Matrizen darin mit Determinante 1, die uns in c) noch begegnen wird, wird als $\text{SL}_n(\mathbf{Z})$ bezeichnet, i.e. als spezielle lineare Gruppe über \mathbf{Z} .

b) Schreibe $A = (a_{i,j})$. Es genügt mit der Leibniz-Formel zu zeigen, daß für $\sigma \in \mathcal{S}_n$ das Produkt $a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)}$ mindestens k durch t teilbare Faktoren enthält. Bezeichne

hierzu $[a, b]$ ein ganzzahliges Intervall. Es genügt zu zeigen, daß $\sigma([1, m]) \cap [m + 1 - k, n]$ mindestens k Elemente enthält. Generell gilt für endliche Teilmengen A und B der Menge X , daß $\#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cup B)$ ($\#$ bezeichne die Elementzahl). Da in unserem Fall $\sigma([1, m]) \cup [m + 1 - k, n] \subseteq [1, n]$, folgt, daß die Schnittmenge mindestens $m + (n - m + k) - n = k$ Elemente enthält.

c) Es folgt direkt, daß $G_{n,m,t}$ unter Multiplikation abgeschlossen ist. Wir müssen zeigen, daß $G_{n,m,t}$ unter Inversion abgeschlossen ist. Sei dazu $A \in G_{n,m,t}$. Wir haben zu zeigen, daß die Transponierte der Adjunkten an einer Position (i, j) mit $1 \leq i \leq m$ und $m + 1 \leq j \leq n$ durch t teilbar ist. Streicht man in A aber die j -te Zeile und die i -te Spalte, so ist die Determinante der überbleibenden Matrix wegen b) durch t teilbar.

Aufgabe 34. Sei $\text{Abb}(m, n)$ die Menge der Abbildungen von $\{1, \dots, m\}$ nach $\{1, \dots, n\}$, sei $\text{injAbb}(m, n)$ die Menge der injektiven Abbildungen zwischen diesen Mengen, und sei $\text{smwAbb}(m, n)$ die Menge der streng monoton wachsenden Abbildungen zwischen diesen Mengen. Es wird

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det \left(\sum_{j \in [1, n]} a_j b_{j, k} \right)_{k \in [1, m]} \\
&= \sum_{\varphi \in \text{Abb}(m, n)} \det \left(a_{\varphi(k)} b_{\varphi(k), k} \right)_{k \in [1, m]} \\
&= \sum_{\varphi \in \text{Abb}(m, n)} \det(a_{\varphi(k)})_{k \in [1, m]} \cdot \prod_{k \in [1, m]} b_{\varphi(k), k} \\
&= \sum_{\varphi \in \text{injAbb}(m, n)} \det(a_{\varphi(k)})_{k \in [1, m]} \cdot \prod_{k \in [1, m]} b_{\varphi(k), k} \\
&= \sum_{\psi \in \text{smwAbb}(m, n)} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \det(a_{\psi \sigma(k)})_{k \in [1, m]} \cdot \prod_{k \in [1, m]} b_{\psi \sigma(k), k} \\
&= \sum_{\psi \in \text{smwAbb}(m, n)} \det(a_{\psi(k)})_{k \in [1, m]} \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \text{sign}(\sigma) \prod_{k \in [1, m]} b_{\psi(k), \sigma(k)} \\
&= \sum_{\psi \in \text{smwAbb}(m, n)} \det(a_{\psi(k)})_{k \in [1, m]} \cdot \det(b^{\psi(k)})_{k \in [1, m]}
\end{aligned}$$

wie behauptet.