Blatt #2, 24. Okt. 2002

Aufgabe 5.

(1) $\sigma = (1,4)(2,3,5), \rho = (2,5,3,4), \sigma^{-1} = (1,4)(2,5,3), \rho^{-1} = (2,4,3,5)$.

(2) Es ist
$\sigma \circ \rho = (1,4,3)$,
$\rho^{-1} \circ \sigma^2 = (3,4)$,
$\sigma^2 \circ \rho^{-1} = (2,4)$.

(3) Berechnung entweder direkt mit (2) oder durch Verwendung der Faktorisierung des Signums:

x	σ	ρ	$\sigma \circ \rho$	$\rho^{-1} \circ \sigma^2$	$\sigma^2 \circ \rho^{-1}$
ε_x	-1	-1	1	-1	-1

(4) Es ist $\sigma^2 = (2,5,3)$, $\sigma^3 = (1,4)$, $\sigma^4 = (2,3,5)$, $\sigma^5 = (1,4)(2,5,3)$, $\sigma^6 = 1$, also Ordnung $= 6$. Es ist $\rho^2 = (2,3)(5,4)$, $\rho^3 = (2,4,3,5)$, $\rho^4 = 1$, also Ordnung $= 4$.

Aufgabe 6. (1)

$\circ$	1	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
1	1	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
$(1,2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	1	$(1,3)$	$(2,3)$	$(1,2)$
$(1,3,2)$	$(1,3,2)$	1	$(1,2,3)$	$(2,3)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$(1,2)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(1,3)$	1	$(1,3,2)$	$(1,2,3)$
$(1,3)$	$(1,3)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(1,2,3)$	1	$(1,3,2)$
$(2,3)$	$(2,3)$	$(1,3)$	$(1,2)$	$(1,3,2)$	$(1,2,3)$	1

(2)

σ	1	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
ε_σ	1	-1	-1	-1	1	1
Ordnung	1	2	2	2	3	3

(3) Nach Aufgabe 4.(1) muß die Anzahl der Elemente einer Untergruppe $\#\mathcal{S}_3 = 6$ teilen. Wir erhalten $G_1 = \{1\}$, $G_2 = \mathcal{S}_3$, $G_3 = \{1,(1,2)\}$, $G_4 = \{1,(1,3)\}$, $G_5 = \{1,(2,3)\}$, $G_6 = \{1,(1,2,3),(1,3,2)\}$.

(4) Für $\sigma, \rho, \tau \in \mathcal{S}_3$ gilt $g_\sigma(\tau \circ \rho) = \sigma \circ \tau \circ \rho \circ \sigma^{-1} = (\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}) \circ (\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1}) = g_\sigma(\tau) \circ g_\sigma(\rho)$, also ist g_σ ein Gruppenmorphismus von $\mathcal{S}_3$ nach $\mathcal{S}_3$. Aus $g_\sigma \circ g_{\sigma^{-1}} = g_{\sigma^{-1}} \circ g_\sigma = 1_{\mathcal{S}_3}$ folgt, daß g_σ bijektiv ist. Damit ist g wohldefiniert.

- Für $\rho, \sigma \in \mathcal{S}_3$ gilt für alle $\tau \in \mathcal{S}_3$

$$g_{\sigma\circ\rho}(\tau) = (\sigma \circ \rho) \circ \tau \circ (\sigma \circ \rho)^{-1} = \sigma \circ \rho \circ \tau \circ \rho^{-1} \circ \sigma^{-1} = g_\sigma(\rho \circ \tau \circ \rho^{-1}) = g_\sigma(g_\rho(\tau)) = (g_\sigma \circ g_\rho)(\tau),$$

  also ist g ein Gruppenhomomorphismus.
- Es ist $\operatorname{Kern} g = \{\sigma \in \mathcal{S}_3 \mid g_\sigma = 1_{\mathcal{S}_3}\} = \{\sigma \in \mathcal{S}_3 \mid g_\sigma(\tau) = \tau \text{ für alle } \tau \in \mathcal{S}_3\}$. Nun gilt $g_\sigma(\tau) = \tau$ für alle $\tau \in \mathcal{S}_3 \Leftrightarrow \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ für alle $\tau \in \mathcal{S}_3$. Aus der Verknüpfungstafel liest man $\sigma = 1$ ab. Damit ist g injektiv.
- Jedes $\tau \in \mathcal{S}_3$ kann eindeutig als $\tau = (1,2)^k \circ (1,2,3)^l$ mit $k \in [0,1], l \in [0,2]$ geschrieben werden. Damit ist für $a \in \operatorname{Aut}(\mathcal{S}_3)$ dann $a(\tau) = a((1,2)^k \circ (1,2,3)^l) = a((1,2))^k \circ a((1,2,3))^l$, Folglich ist a mit Angabe von $a((1,2))$ und $a((1,2,3))$ eindeutig bestimmt. Da die Ordnung unter a erhalten bleibt, gilt: $a((1,2)) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, $a((1,2,3)) \in \{(1,2,3),(1,3,2)\}$. Man hat also ingesamt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten. Damit ist $\#\operatorname{Aut}(\mathcal{S}_3) \leq \#\mathcal{S}_3$. Da g injektiv ist folgt die Surjektivität.

Aufgabe 7. Sei M Menge.

(1)

$\cdot$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

(2) Sei $A \in \mathfrak{P}(M)$. Es ist $A \cdot \emptyset = \emptyset \cdot A = A$, also $\emptyset =: 1$. Weiter ist $A^2 = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset = 1$.

(3) Zur Assoziativität: Für $A, B, C \in \mathfrak{P}(M)$ gilt

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= \Big(A \setminus \big((B \setminus C) \cup (C \setminus B)\big)\Big) \cup \Big(\big((B \setminus C) \cup (C \setminus B)\big) \setminus A\Big) \\ &= \ldots \\ &= (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C) \\ &= \ldots \\ &= (A \cdot B) \cdot C \end{aligned}$$

Nach (1) ist $\emptyset$ ein neutrales Element und $A^{-1} = A$. Also ist $(\mathfrak{P}(M), \cdot)$ eine Gruppe und – da $A^2 = 1$ nach (1) – nach Aufgabe 4.(2) auch abelsch (, was man auch direkt sieht).

(4) Es ist $\emptyset \neq \mathfrak{P}(N) \subseteq \mathfrak{P}(M)$, und für $A, B \in \mathfrak{P}(N)$, d.h. $A, B \subseteq N$ gilt

$$A \cdot B^{-1} = A \cdot B = \underbrace{(A \setminus B)}_{\subseteq N} \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\subseteq N} \in \mathfrak{P}(N),$$

also ist $\mathfrak{P}(N)$ Untergruppe von $\mathfrak{P}(M)$.

Aufgabe 8. Sei $s_0 = 1$, $s_1 = (1,2)(3,4)$, $s_2 = (1,3)(2,4)$, $s_3 = (1,4)(2,3)$.

(1) Es ist $V \subseteq \mathcal{S}_4$. Man bemerke, daß $s_i^2 = 1$, d.h. $s_i^{-1} = s_i$ für $i \in [0,3]$. V ist also Untergruppe wenn stets $s_i \circ s_j \in V$ gilt. Dies rechnet man nach und erhält die Verknüpfungstafel:

$\circ$	s_0	s_1	s_2	s_3
s_0	s_0	s_1	s_2	s_3
s_1	s_1	s_0	s_3	s_2
s_2	s_2	s_3	s_0	s_1
s_3	s_3	s_2	s_1	s_0

(2) Es ist

$$U = \{(1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3)\} \cup V.$$

Seien $\rho, \sigma \in U$. Dann ist $\varepsilon_{\rho \circ \sigma^{-1}} = \varepsilon_\rho \varepsilon_{\sigma^{-1}} = \varepsilon_\rho \varepsilon_\sigma = 1$, also ist $\rho \circ \sigma^{-1} \in U$.

(3) Es gibt kein Element der Ordnung 5 in $\mathcal{S}_4$. Es kommen nur folgende Typen von Elementen vor:

$$1, (1,2), (1,2,3), (1,2)(3,4), (1,2,3,4)$$

Diese haben Ordnung $1, 2, 3, 2, 4$, respektive.

Alternativ: Betrachte für $x \in \mathcal{S}_4$ die Menge $G_x := \{x^m \mid m \in \mathbf{Z}\}$. Da für $n, m \in \mathbf{Z}$ gilt, daß $x^m x^{-n} = x^{m-n} \in G_x$, ist $G_x \leqslant \mathcal{S}_4$ Untergruppe. Die Ordnung von x ist gleich der Anzahl der Elemente in G_x. Nach Aufgabe 4.(1) gilt: $\#G_x$ teilt $\#\mathcal{S}_4 = 24$. Also kommen für die Ordnung von x nur $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ oder 24 in Frage, und 5 nicht.