

## Cohomologie von Gruppen, SS 05

**Blatt 1**

**Aufgabe 1 (4 Punkte).** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, mit Abbildungen  $s_{\mathcal{C}}, i_{\mathcal{C}}$  und  $t_{\mathcal{C}}$  und der Komposition  $fg = f \cdot_{\mathcal{C}} g$ .

Bestehe die *entgegengesetzte Kategorie*  $\mathcal{C}^{\circ}$  (engl. opposite) aus  $(\mathcal{C}^{\circ})_0 = \mathcal{C}_0, (\mathcal{C}^{\circ})_1 = \mathcal{C}_1, s_{\mathcal{C}^{\circ}} := t_{\mathcal{C}}, t_{\mathcal{C}^{\circ}} := s_{\mathcal{C}}, i_{\mathcal{C}^{\circ}} := i_{\mathcal{C}}$  und  $g \cdot_{\mathcal{C}^{\circ}} f := f \cdot_{\mathcal{C}} g$ .

Zeige, daß es sich bei  $\mathcal{C}^{\circ}$  wieder um eine Kategorie handelt, und daß  $(\mathcal{C}^{\circ})^{\circ} = \mathcal{C}$ .

Gegeben ein kategorieller Begriff, so heißt dieser Begriff, angewandt auf  $\mathcal{C}^{\circ}$ , der jeweils *duale* Begriff, und wird manchmal durch die Vorsilbe “Co” kenntlich gemacht. So z.B. ist die Coretraktion der duale Begriff zur Retraktion, da  $f \in \mathcal{C}_1 = (\mathcal{C}^{\circ})_1$  eine Retraktion bezüglich  $\mathcal{C}^{\circ}$  genau dann ist, wenn  $f$  eine Coretraktion bezüglich  $\mathcal{C}$  ist.

Finde die dualen Begriffe zu folgenden Begriffen. Monomorphismus, Isomorphismus, initiales Objekt, Nullobjekt.

**Aufgabe 2 (10 Punkte).** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, und sei  $X \xrightarrow{f} Y$  ein Morphismus darin. Zeige oder widerlege.

- (1) Ist  $X \xrightarrow{f} Y$  eine Coretraktion, so ist es ein Monomorphismus.
- (2) Ist  $X \xrightarrow{f} Y$  ein Monomorphismus, so ist es eine Coretraktion.
- (3) Ist  $X \xrightarrow{f} Y$  ein Monomorphismus und eine Retraktion, so ist es ein Isomorphismus.
- (4) Ist  $X \xrightarrow{f} Y$  ein Monomorphismus und ein Epimorphismus, so ist es ein Isomorphismus.
- (5) Sind  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  in  $\mathcal{C}$ , und ist  $fg$  ein Monomorphismus, so auch  $f$ .

**Aufgabe 3 (10 Punkte).**

- (1) Sei  $X \xrightarrow{f} Y$  ein Morphismus in (Mengen) mit  $X \neq \emptyset$ . Zeige, daß  $f$  monomorph ist genau dann, wenn es Coretraktion ist, und genau dann, wenn es injektiv ist.
- (2) Sei  $X \xrightarrow{f} Y$  ein Morphismus in (Mengen). Zeige, daß  $f$  epimorph ist genau dann, wenn es Retraktion ist, und genau dann, wenn es surjektiv ist.
- (3) Sei  $R$  ein Ring. Zeige, daß in  $R$ -Mod ein Morphismus genau dann monomorph ist, wenn seine zugrundeliegende Abbildung injektiv ist.
- (4) Sei  $R$  ein Ring. Zeige, daß in  $R$ -Mod ein Morphismus genau dann epimorph ist, wenn seine zugrundeliegende Abbildung surjektiv ist.
- (5) Zeige, daß in (Gruppen) ein Morphismus genau dann epimorph ist, wenn seine zugrundeliegende Abbildung surjektiv ist.

**Aufgabe 4 (6 Punkte).** Bestimme in der Kategorie  $\mathcal{C}$  ein initiales und ein terminales Objekt. Existiert ein Nullobjekt?

- (1)  $\mathcal{C} = (\text{Mengen})$ .
- (2)  $\mathcal{C} = (\text{Ringe})$ .
- (3)  $\mathcal{C} = R\text{-Mod}$ , wobei  $R$  ein Ring sei.