M. Künzer Abgabe am 05.12.05

Cohomologie von Gruppen, WS 05/06

Blatt 19

Aufgabe 53 (4 Punkte).

Sei G eine Gruppe, sei $H \leq G$ von endlichem Index, sei $g \in G$. Berechne das Bild von g unter $G^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\mathrm{Tr}\downarrow_H^G} H^{\mathrm{ab}}$ mit dem Lemma aus Abschnitt 2.5.5.2.3.

(1) $G = \mathcal{S}_3$, $H = \langle (1,2,3) \rangle$, $g = (1,2)$.

(2) $G = \mathcal{S}_4$, $H = \langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle$, $g = (1,2)$.

Aufgabe 54 (2+3+3+3+3+2+2+2 Punkte).

Sei R ein Hauptidealbereich. Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| \neq 0$ in R. Sei M ein RG-Modul, auf welchem jedes Element von G identisch operiere. Sei $k \geq 1$. Zeige die Existenz der split kurz exakten Sequenzen in (1-4) mittels Aufgabe 52.

(0) Sei T ein endlich erzeugter R-Torsionsmodul. Berechne, daß

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}^1_R(T,M) & \simeq & T \otimes_R M \\ \mathrm{Tor}^R_1(T,M) & \simeq & {}_R(T,M)\ . \end{array}$$

(1) $\mathrm{H}_{k+1}(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}_{k+1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}_k(G;R),M)$.

(2) $\mathrm{H}^{k-1}(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}^{k-1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}^k(G;R),M)$.

(3) $\mathrm{H}_k(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}_{k+1}(G;R),M)$.

(4) $\mathrm{H}^k(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}_{k-1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}^{k-1}(G;R),M)$.

(5) Sei $R = \mathbf{Z}$. Zeige unter Verwendung von $\mathrm{H}_1(G) \simeq G^{\mathrm{ab}}$ erneut, daß
$\mathrm{H}^1(G,M) \simeq {}_{(\mathrm{AbGruppen})}(G^{\mathrm{ab}},M)$; vgl. Aufgabe 49 (4).

(6) Sei $R = \mathbf{Z}$. Zeige, daß $\mathrm{H}_k(G) \simeq \mathrm{H}^k(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{H}^{k+1}(G)$.
Insbesondere ist $\mathrm{H}^2(G) \simeq G^{\mathrm{ab}}$.

(7) Ist M ein endlich erzeugter R-Torsionsmodul, so ist $\mathrm{H}_k(G,M;R) \simeq \mathrm{H}^k(G,M;R)$.