

Cohomologie von Gruppen, SS 05

Blatt 2

Aufgabe 5 (2+2+6 Punkte). Zeige.

- (1) Sei R ein Ring, und sei $n \geq 0$. In R -Mod ist R^n projektiv.
- (2) Sei k ein Körper. Jeder k -Modul ist injektiv.
- (3) Sei R ein Hauptidealbereich. Ein R -Modul Q heiße *divisibel*, falls es für alle $q \in Q$ und alle $r \in R \setminus \{0\}$ ein $q' \in Q$ mit $rq' = q$ gibt. Zeige, daß divisible R -Moduln injektiv sind. (Hinweis: Zorn auf $\{(Y, g) : Q \subseteq Y \subseteq X \text{ Teilmodul, } Y \xrightarrow{g} Q \text{ Morphismus mit } g|_Q = 1_Q\}$ anwenden.)

Aufgabe 6 (2+4 Punkte). Seien G und H Gruppen. Konstruiere in (Gruppen)

- (1) $G \amalg H$,
- (2) $G \ltimes H$. (Hinweis: Verwende eine freie Gruppe auf $G \sqcup H$.)

Ist (Gruppen) eine additive Kategorie?

Aufgabe 7 (6+2+2 Punkte). Sei \mathcal{C} eine additive Kategorie.

- (1) Zeige, daß für je zwei Objekte X und Y die Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ mit der Operation $(+)$ eine abelsche Gruppe bildet. (Hinweis: Die Assoziativität haben wir in der Vorlesung bei der Herleitung des Matrixkalkuls mit gezeigt, aber die hier zu zeigende Tatsache nicht verwandt. Also braucht Assoziativität nicht nochmals gezeigt werden, und ferner darf der Matrixkalkül hier verwandt werden.)

- (2) Zeige, daß für $X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f'} \end{array} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{g'} \end{array} Z$ die Distributivität

$$(f + f')(g + g') = fg + fg' + f'g + f'g'$$

gilt.

- (3) Zeige, daß für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ die Menge $\text{End}_{\mathcal{C}} X$ zusammen mit der Addition und der durch die Komposition von Morphismen gegebenen Multiplikation einen Ring bildet.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Sei \mathcal{C} eine additive Kategorie. Zeige, daß Summanden projektiver Objekte wieder projektiv sind.