

## Cohomologie von Gruppen, SS 05

**Blatt 9**

**Aufgabe 28 (9+6 Punkte).** Sei  $p > 0$  prim.

- (1) Berechne  $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^k(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m)$  und  $\text{Tor}_k^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m)$  für  $k \geq 0$  und  $l, m \geq 1$  auf 3 Weisen (wie im Korollar im Abschnitt 1.7.4 beschrieben).
- (2) Berechne  $\text{Ext}_{\mathbf{Z}/p^3}^2(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p)$  und  $\text{Tor}_2^{\mathbf{Z}/p^3}(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p)$  auf 2 Weisen. Vergleiche mit (1).

**Aufgabe 29 (6 Punkte).**

Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Sei  $A$  ein Ring. Sei  $R \xrightarrow{\varphi} Z(A)$  ein Ringmorphismus in das Zentrum  $Z(A) := \{z \in A : za = az \text{ für alle } a \in A\}$  von  $A$ . Man sagt auch,  $(A, \varphi)$  ist eine  $R$ -Algebra. Oft schreibt man für  $(A, \varphi)$  kurz nur  $A$ . So z.B. ist jeder Ring auf eindeutige Weise eine  $\mathbf{Z}$ -Algebra, da  $\mathbf{Z}$  initial in der Kategorie der Ringe ist (vgl. Aufgabe 4 (2)).

Zeige durch Betrachtung der jeweiligen Konstruktion, daß  $\text{Ext}_A^i(X, Y)$  für  $X, Y \in \text{Ob } A\text{-Mod}$  und  $\text{Tor}_i^A(X, Y)$  für  $X \in \text{Ob Mod-}A$  und  $Y \in \text{Ob } A\text{-Mod}$  in natürlicher Weise eine  $R$ -Modulstruktur tragen, funktoriell in  $X$  und  $Y$ . Formal gesprochen, man zeige, daß  $\text{Ext}_A^i(-, =)$  und  $\text{Tor}_i^A(-, =)$  über den treuen Vergißfunktoren  $R\text{-Mod} \hookrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$  faktorisieren.

**Aufgabe 30 (6 Punkte).**

Sei  $R = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & 0 & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ . Wir verwenden die Bezeichnung der Lösung zu Aufgabe 23. Berechne

$$\dim_{\mathbf{Q}} \text{Ext}_R^k(I_i, P_j)$$

für  $i, j \in [1, 3]$  und  $k \geq 0$  (eine Berechnungsweise genüge; vgl. Aufgabe 29 für die  $\mathbf{Q}$ -Vektorraumstruktur).

**Aufgabe 31 (6 Punkte).**

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}'$  additive Kategorien. Seien  $U, V \in \text{Ob } C^+(\mathcal{A})$ . Sei  $U \xrightarrow{f} V$  ein nullhomotoper Morphismus in  $C(\mathcal{A})$  (vgl. Aufgabe 16). Sei  $U' \in \text{Ob } C^+(\mathcal{A}')$ . Zeige, daß  $tF^{\text{CC}}(f, U')$  nullhomotop ist. (Hinweis: Gib eine Homotopie an. Hierzu dürfen Indizes bei Morphismen unterschlagen werden.)