

Lösung 19

Aufgabe 53.

(1) Sei $X = \{1\}$. Es wird $c_1 = 2$, und also

$$(1, 2) \operatorname{Tr}_{\downarrow H}^G = \prod_{x \in X} x(1, 2)^{c_x} x^{-1} = 1 \cdot (1, 2)^2 \cdot 1^{-1} = 1.$$

Das war wegen $G^{\text{ab}} \simeq C_2$ und $H^{\text{ab}} \simeq C_3$ von vorneherein klar – es gibt keine nichttrivialen Morphismen von C_2 nach C_3 .

(2) Sei $X = \{1, (1, 4)\}$. Es werden $c_1 = 2$ und $c_{(1,4)} = 1$, und also

$$(1, 2) \operatorname{Tr}_{\downarrow H}^G = \prod_{x \in X} x(1, 2)^{c_x} x^{-1} = (1 \cdot (1, 2)^2 \cdot 1^{-1}) \cdot ((1, 4) \cdot (1, 2) \cdot (1, 4)^{-1}) = (2, 4).$$

Hierbei ist $G' = \mathcal{A}_4$, also die Restklasse von $(1, 2)$ ein Erzeuger von $G^{\text{ab}} \simeq C_2$, und $H' = \langle (1, 3)(2, 4) \rangle$, so daß $H^{\text{ab}} \simeq C_2 \times C_2$, und darin repräsentiert unser Bild $(2, 4)$ ein nichttriviales Element.

Aufgabe 54.

Wir nehmen Bezug auf die Notation von Aufgabe 52, schreiben aber nun wieder $-\otimes_R =$ und ${}_R(-, =)$. Schreibe $RG\text{-free}$ für die Kategorie der endlich erzeugten freien RG -Moduln.

Die zu zeigende Aussagen (1-4) sind auch als *universelles Koeffiziententheorem* bekannt (genauer gesagt, als eine gruppen(co)homologische Fassung davon).

(0) Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte R -Moduln dürfen wir wegen der Additivität jeweils beider Seiten $T = R/tR$ mit $t \in R \setminus \{0\}$ annehmen.

Zur Berechnung von $\operatorname{Ext}_R^*(T, M)$ verwenden wir die projektive Auflösung $R \xrightarrow{t} R$ von T . Anwenden von ${}_R(-, M)$ liefert $M \xleftarrow{t} M$. Folglich sind $\operatorname{Ext}_R^1(T, M) \simeq M/tM$ und $\operatorname{Ext}_R^0(T, M) \simeq M[t]$.

Zur Berechnung von $\operatorname{Tor}_*^R(T, M)$ verwenden wir die projektive Auflösung $R \xrightarrow{t} R$ von T . Anwenden von $-\otimes_R M$ liefert $M \xrightarrow{t} M$. Folglich sind $\operatorname{Tor}_1^R(T, M) \simeq M[t]$ und $\operatorname{Tor}_0^R(T, M) \simeq M/tM$.

Wir sehen, daß $\operatorname{Ext}_R^1(T, M) \simeq \operatorname{Tor}_0^R(T, M)$ und $\operatorname{Ext}_R^0(T, M) \simeq \operatorname{Tor}_1^R(T, M)$, wie behauptet.

Wir bemerken noch, daß die nach Standardkonstruktion endlich erzeugten R -Moduln $H_k(G; R)$ und $H^k(G; R)$ für $k \geq 1$ unter Multiplikation mit $|G|$ verschwinden, wie wir Aufgabe 36 (2, 3) oder aber dem jeweils ersten Korollar der Abschnitte 2.5.4 und 2.5.5.1 entnehmen können. Wegen $|G| \neq 0$ in R liegen also endlich erzeugte R -Torsionsmoduln vor, und wir können (0) mit $T = H_k(G; R)$ oder mit $T = H^k(G; R)$ anwenden.

(1) Wir setzen $P = \operatorname{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} R$.

Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{ccccccc} (X & \otimes_{RG} & R) & \otimes_R & M & \longrightarrow & X & \otimes_{RG} & M \\ (x & \otimes & r) & \otimes & m & \longmapsto & x & \otimes & rm \end{array}$$

eine in X natürliche Isotransformation additiver Funktoren von RG -free nach R -Mod ist. Der Morphismus ist wegen $gx \otimes rm = x \otimes rm$ für $g \in G$ wohldefiniert, wofür wir die identische Operation von g auf M benötigt haben. Natürlichkeit in X ist ersichtlich durch Vergleich der Operation auf einem Morphismus $X \xrightarrow{u} X'$ auf beiden Seiten. Es genügt daher zu zeigen, daß für $X = RG$ ein Isomorphismus vorliegt. In diesem (wie in jedem) Fall ist eine Umkehrung gegeben durch $(x \otimes 1) \otimes m \longleftarrow x \otimes m$, wohldefiniert dank $(gx \otimes 1) \otimes m = (x \otimes 1) \otimes m$ für $g \in G$.

Da $\text{Bar}_{G;R}$ (wegen G endlich) aus endlich erzeugten freien RG -Moduln besteht, folgt, daß $(\text{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} R) \otimes_R M \simeq \text{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M$. Einsetzen von P in die split kurz exakte Sequenz von Aufgabe 52 (4) und isomorphes Ersetzen liefert bei $k \geq 1$ also die split kurz exakte Sequenz

$$(*_1) \quad \text{H}_k(G; R) \otimes_R M \longrightarrow \text{H}_k(G, M; R) \longrightarrow \text{Tor}_1^R(\text{H}_{k-1}(G; R), M) .$$

Ist nun $k \geq 2$, so ergibt eine Anwendung von (0) die behauptete split kurz exakte Sequenz

$$\text{H}_k(G; R) \otimes_R M \longrightarrow \text{H}_k(G, M; R) \longrightarrow {}_R(\text{H}_{k-1}(G; R), M) .$$

(2) Wir setzen $P = {}_R(\text{Bar}_{G;R}, R)$.

Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{ccc} {}_{RG}(X, R) \otimes_R M & \longrightarrow & {}_{RG}(X, M) \\ f \otimes m & \longmapsto & (x \longmapsto (xf) \cdot m) \end{array}$$

eine in X natürliche Isotransformation additiver Funktoren von $(RG\text{-free})^\circ$ nach R -Mod ist. Der Morphismus ist wegen $gx \longmapsto ((gx)f) \cdot m = ((xf) \cdot m)$ für $g \in G$ wohldefiniert, wofür wir die identische Operation von g auf M benötigt haben. Natürlichkeit in X ist ersichtlich. Es genügt daher zu zeigen, daß für $X = RG$ ein Isomorphismus vorliegt. In diesem Fall haben wir einen inversen Morphismus $(1 \longmapsto 1) \otimes 1h \longleftarrow h$.

Es folgt, daß ${}_{RG}(\text{Bar}_{G;R}, R) \otimes_R M \simeq {}_{RG}(\text{Bar}_{G;R}, M)$. Ersetzen von unterer durch obere Indizierung und Einsetzen von P in die split kurz exakte Sequenz von Aufgabe 52 (4) und isomorphes Ersetzen liefert bei $k \geq 1$ also die split kurz exakte Sequenz

$$(*_2) \quad \text{H}^{k-1}(G; R) \otimes_R M \longrightarrow \text{H}^{k-1}(G, M; R) \longrightarrow \text{Tor}_1^R(\text{H}^k(G; R), M) .$$

Eine Anwendung von (0) ergibt hieraus die behauptete split kurz exakte Sequenz

$$\text{H}^{k-1}(G; R) \otimes_R M \longrightarrow \text{H}^{k-1}(G, M; R) \longrightarrow {}_R(\text{H}^k(G; R), M) .$$

(3) Wir setzen $P = \text{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} R$.

Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{ccc} {}_R(X \otimes_{RG} R, M) & \longrightarrow & {}_R(X, M) \\ f & \longmapsto & (x \longmapsto (x \otimes 1)f) \end{array}$$

eine in X natürliche Isotransformation additiver Funktoren von $(RG\text{-free})^\circ$ nach R -Mod ist. Der Morphismus ist wegen $gx \longmapsto (gx \otimes 1)f = (x \otimes 1)f$ für $g \in G$ wohldefiniert, wofür wir die identische Operation von g auf M benötigt haben. Natürlichkeit in X ist ersichtlich. Es genügt daher zu zeigen, daß für $X = RG$ ein Isomorphismus vorliegt. In diesem (wie in jedem anderen) Fall haben wir einen inversen Morphismus $(x \otimes 1 \longmapsto xh) \longleftarrow h$, welcher wegen $gx \otimes 1 \longmapsto (gx)h = xh$ wohldefiniert ist.

Es folgt, daß ${}_R(\text{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} R, M) \simeq {}_R(\text{Bar}_{G;R}, M)$. Einsetzen von P in die split kurz exakte Sequenz von Aufgabe 52 (5) und isomorphes Ersetzen liefert bei $k \geq 1$ also die split kurz exakte Sequenz

$$(*_3) \quad \text{Ext}_R^1(\text{H}_{k-1}(G; R), M) \longrightarrow \text{H}^k(G, M; R) \longrightarrow {}_R(\text{H}_k(G; R), M) .$$

Ist nun $k \geq 2$, so ergibt eine Anwendung von (0) die behauptete split kurz exakte Sequenz

$$\text{H}_{k-1}(G; R) \otimes_R M \longrightarrow \text{H}^k(G, M; R) \longrightarrow {}_R(\text{H}_k(G; R), M) .$$

(4) Wir setzen $P = {}_R(\text{Bar}_{G;R}, R)$.

Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{ccc} {}_R({}_R G(X, R), M) & \longrightarrow & X \otimes_{RG} M \\ (f \longmapsto (xf) \cdot m) & \longleftarrow & x \otimes m \end{array}$$

eine in X natürliche Isotransformation additiver Funktoren von RG -free nach R -Mod ist. Der Morphismus ist wegen $((gx)f) \cdot m = (xf) \cdot m$ für $g \in G$ wohldefiniert, wofür wir die identische Operation von g auf M benötigt haben. Natürlichkeit in X ist ersichtlich. Es genügt daher zu zeigen, daß für $X = RG$ ein Isomorphismus vorliegt. In diesem Fall haben wir einen inversen Morphismus $h \longmapsto 1 \otimes (1 \longmapsto 1)h$.

Es folgt, daß ${}_R({}_R G(\text{Bar}_{G;R}, R), M) \simeq \text{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M$. Ersetzen von unterer durch obere Indizierung und umgekehrt, Einsetzen von P in die split kurz exakte Sequenz von Aufgabe 52 (5) und isomorphes Ersetzen liefert bei $k \geq 1$ also die split kurz exakte Sequenz

$$(*_4) \quad \text{Ext}_R^1(\mathbb{H}^k(G; R), M) \longrightarrow \mathbb{H}_{k-1}(G, M; R) \longrightarrow {}_R(\mathbb{H}^{k-1}(G; R), M).$$

Eine Anwendung von (0) ergibt hieraus die behauptete split kurz exakte Sequenz

$$\mathbb{H}^k(G; R) \otimes_R M \longrightarrow \mathbb{H}_{k-1}(G, M; R) \longrightarrow {}_R(\mathbb{H}^{k-1}(G; R), M).$$

(5) In $(*_3)$ beobachten wir für $k = 1$ und $R = \mathbf{Z}$ zunächst, daß $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^1(\mathbb{H}_0(G), M) \simeq \text{Ext}_{\mathbf{Z}}^1(\mathbf{Z}, M) \simeq 0$. Die kurz exakte Sequenz liefert daher den Isomorphismus

$$\mathbb{H}^1(G, M) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{z}(\mathbb{H}_1(G), M) \simeq_{(\text{AbGruppen})} (G^{\text{ab}}, M),$$

wie behauptet wurde.

(6) Setzen wir in $(*_3)$ $M = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, so erhalten wir zunächst wegen \mathbf{Q}/\mathbf{Z} injektiv (vgl. Aufgabe 5 (3)), daß $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^1(\mathbb{H}_{k-1}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq 0$ (vgl. Aufgabe 26 (1)). Somit haben wir einen Isomorphismus $\mathbb{H}^k(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{z}(\mathbb{H}_k(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Nun ist aber $\mathbb{H}_k(G)$ eine endliche abelsche Gruppe (vgl. Aufgabe 39 (1)), so daß mit dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen folgt, daß $\mathbf{z}(\mathbb{H}_k(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathbb{H}_k(G)$, da dies für endliche zyklische Gruppen der Fall ist. Es folgt $\mathbb{H}_k(G) \simeq \mathbb{H}^k(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Mit Aufgabe 49 (3) folgt vollends $\mathbb{H}^k(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathbb{H}^{k+1}(G)$.

Aus $\mathbb{H}_1(G) \simeq G^{\text{ab}}$ folgt nun im Falle $k = 1$, daß $\mathbb{H}^2(G) \simeq G^{\text{ab}}$.

Ist $G = \mathcal{S}_3$, so ist in der Tat $\mathbb{H}^2(\mathcal{S}_3) \simeq \mathbf{Z}/2 \simeq \mathcal{S}_3^{\text{ab}}$ (vgl. Aufgabe 40 (3)).

Ist $G = C_n$ für $n \geq 2$, so ist in der Tat $\mathbb{H}^2(C_n) \simeq \mathbf{Z}/n \simeq C_n = C_n^{\text{ab}}$ (vgl. Aufgabe 41).

(7) Sind T und M endlich erzeugte R -Torsionsmoduln, so behaupten wir, daß $T \otimes_R M \simeq {}_R(T, M)$. In der Tat können wir hierfür $T = R/tR$ und $M = R/mR$ mit $t, m \in R \setminus \{0\}$ annehmen. Ferner können wir nach Lokalisierung annehmen, daß R ein diskreter Bewertungsring ist mit maximalem Ideal erzeugt von $r \in R$, und daß $t = r^\tau$ und $m = r^\mu$ für gewisse $\tau, \mu \geq 0$. Es wird

$$\begin{aligned} R/r^\tau R \otimes_R R/r^\mu R &\simeq (R/r^\mu R)/r^\tau (R/r^\mu R) \\ &\simeq R/(r^\mu R + r^\tau R) \\ &= R/r^{\min(\tau, \mu)} R \\ &\simeq r^{\mu - \min(\tau, \mu)} R/r^\mu R \\ &= (R/r^\mu R)[r^\tau] \\ &\simeq {}_R(R/r^\tau R, R/r^\mu R). \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\mathbb{H}_k(G, M; R) \stackrel{(4)}{\simeq} (\mathbb{H}^k(G; R) \oplus \mathbb{H}^{k+1}(G; R)) \otimes_R M \stackrel{(2)}{\simeq} \mathbb{H}^k(G, M; R).$$

Beachte, daß hier nicht $R = M$ gewählt werden darf.