

## Lösung 2

## Aufgabe 5.

(1) Sei  $X \xrightarrow{f} R^n$  ein Epimorphismus in  $R$ -Mod. Wir haben für die Projektivität von  $R$  eine Coretraktion  $g$  zu  $f$  zu konstruieren. Sei  $x_i \in X$  gewählt mit  $(x_i)f = e_i$  für  $i \in [1, n]$ , wobei  $(e_i)_i$  die Standardbasis von  $R^n$  über  $R$  sei. Setze  $(e_i)g := x_i$ . Dies definiert einen Morphismus  $R^n \xrightarrow{g} X$  vermöge  $(\sum r_i e_i)g = \sum r_i x_i$  für  $r_i \in R$ , und es ist wegen stets  $(e_i)gf = (x_i)f = e_i$  auch  $gf = 1$ .

(2) Sei  $V$  ein Vektorraum über  $k$ .

Wir haben zu zeigen, daß jeder Epimorphismus  $W \xrightarrow{f} V$  eine Retraktion ist. Sei  $(x_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ . Sei  $(y_i)_{i \in I}$  mit  $y_i \in W$  derart, daß  $y_i f = x_i$  stets. Definiere  $V \xrightarrow{g} W$  vermöge  $(x_i)g := y_i$  für alle  $i \in I$ . Dann ist wegen  $(x_i)gf = (y_i)f = x_i$  stets auch  $gf = 1$ , wie verlangt.

Wir haben zu zeigen, daß jeder Monomorphismus  $V \xrightarrow{f} W$  eine Coretraktion ist. Sei  $(x_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ , und sei  $(x_i f)_{i \in I} \sqcup (y_j)_{j \in J}$  (Konkatenation der Tupel, das Resultat ist also indiziert über  $I \sqcup J$ ) eine Basisergänzung von  $(x_i f)_{i \in I}$ . Definiere  $W \xrightarrow{g} V$  über  $(x_i f)g := x_i$  für alle  $i \in I$  und  $y_j g := 0$  für alle  $j \in J$ . Dann ist in der Tat  $fg = 1$ .

(3) Sei  $Q \xrightarrow{f} X$  ein Monomorphismus in  $R$ -Mod. Wir haben zu zeigen, daß er eine Coretraktion ist. Wir identifizieren  $Q$  mit  $Qf$  und sehen  $Q \hookrightarrow X$  als Teilmodul. Betrachte die Menge

$$\mathcal{F} := \{(Y, g) : Q \subseteq Y \subseteq X \text{ Teilmodul, } Y \xrightarrow{g} Q \text{ Morphismus mit } g|_Q = 1_Q\}$$

von Faktorisierungen. Es ist  $\mathcal{F}$  ein Poset vermöge  $(Y, g) \leq (Y', g')$  genau dann, wenn  $Y \subseteq Y'$  und  $g'|_Y = g$ .

Wir behaupten, daß  $\mathcal{F}$  zorngeordnet ist, i.e. daß jede Kette ein maximales Element enthält. Sei  $I$  eine totalgeordnete Menge und  $((Y_i, g_i))_{i \in I}$  eine Kette in  $\mathcal{F}$ , i.e.  $i \leq i'$  impliziert  $(Y_i, g_i) \leq (Y_{i'}, g_{i'})$  stets.

Wir müssen zeigen, daß diese Kette eine obere Schranke besitzt. Sei  $Y := \bigcup_i Y_i$ , und sei  $Y \xrightarrow{g} Q$  definiert durch  $yg := yg_i$ , falls  $y \in Y_i$ . Das ist wohldefiniert, da zum einen ein  $i$  mit  $y \in Y_i$  existiert, und da zum anderen für  $y \in Y_i \subseteq Y_{i'}$  auch  $yg_i = y(g_{i'}|_{Y_i}) = yg_{i'}$  ist.

Mit dem Lemma von Zorn existiert also ein maximales Element  $(Y, g)$  in  $\mathcal{F}$ . Wir müssen zeigen, daß  $Y = X$  ist. Angenommen, es gebe ein  $x \in X \setminus Y$ . Wir wollen  $Y + Rx \xrightarrow{g'} Q$  mit  $(Y, g) < (Y + Rx, g')$  konstruieren, i.e. mit  $g'|_Y = g$ . Sei, unter Verwendung der Hauptidealbereichseigenschaft von  $R$ ,  $a \in R$  so, daß

$$Ra = \{r \in R : rx \in Y\}.$$

Ist  $a = 0$ , so ist  $Y \cap Rx = 0$ , also  $Y \oplus Rx$  direkt, und es existiert ein  $g'$  wie verlangt, indem wir  $g'|_Y := g$  und  $g'|_{Rx} := 0$  setzen.

Ist  $a \neq 0$ , so beachten wir zunächst, daß  $ax \in Y$ , und wir also  $q := (ax)g \in Q$  bilden können. Sei  $q' \in Q$  mit  $aq' = q$ , unter Verwendung der Divisibilität von  $Q$ . Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{ccc} Y + Rx & \xrightarrow{g'} & Q \\ y + rx & \longmapsto & yg + rq' \end{array}$$

für  $y \in Y$  und  $r \in R$  wohldefiniert ist, und dann auch  $R$ -linear. Sei  $y + rx = y' + r'x$  mit  $y, y' \in Y$  und  $r, r' \in R$ . Dann ist  $(y - y') = (r' - r)x$ , und also  $r' - r = as$  für ein  $s \in S$ . Somit wird

$$\begin{aligned}
 (yg + rq') - (y'g + r'q') &= (y - y')g - (r' - r)q' \\
 &= (y - y')g - asq' \\
 &= (y - y')g - sq \\
 &= (y - y')g - s((ax)g) \\
 &= ((y - y') - sax)g \\
 &= ((y - y') - (r' - r)x)g \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Somit ist  $Y + Rx \xrightarrow{g'} Q$  wohldefiniert, und insgesamt  $(Y, g) < (Y + Rx, g')$  konstruiert, im Widerspruch zur Maximalität von  $(Y, g)$ .

**Aufgabe 6.** Seien  $G$  und  $H$  Gruppen.

- (1) Wir behaupten, daß  $G \times H$ , zusammen mit  $\pi_G : (g, h) \mapsto g$  und  $\pi_H : (g, h) \mapsto h$ , das Produkt  $G \amalg H$  von  $G$  und  $H$  darstellt.

Seien Gruppenmorphisimen  $T \xrightarrow{s} G$  und  $T \xrightarrow{t} H$  gegeben. Setze  $T \xrightarrow{u} G \times H$ ,  $x \mapsto (xs, xt)$ . Dies ist ein Gruppenmorphisimus, er erfüllt  $u\pi_G = s$  und  $u\pi_H = t$ , und er ist hierfür die einzige mögliche Wahl.

- (2) Wir konstruieren wie folgt eine Gruppe  $G * H$ , genannt das *freie Produkt* von  $G$  und  $H$ . Sei  $(F, \cdot)$  die freie Gruppe auf der Menge  $G \sqcup H$ . Sei

$$G * H := F / \langle g_1 \cdot g_2 = g_1g_2, h_1 \cdot h_2 = h_1h_2 : g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H \rangle^F,$$

und seien  $G \xrightarrow{\iota_G} G * H$ ,  $g \mapsto g$ ,  $H \xrightarrow{\iota_H} G * H$ ,  $h \mapsto h$ , was wegen der  $G * H$  definierenden Relationen Gruppenmorphisimen sind.

Wir behaupten, daß  $G * H$ , zusammen mit  $\iota_G$  und  $\iota_H$ , das Coprodukt  $G \amalg H$  von  $G$  und  $H$  darstellt.

Seien dazu Gruppenmorphisimen  $G \xrightarrow{s} T$  und  $H \xrightarrow{t} T$  gegeben. Setze zunächst  $F \xrightarrow{v} T$ ,  $g \mapsto gs$  für  $g \in G \subseteq F$ ,  $h \mapsto ht$  für  $h \in H \subseteq F$ . Der Relator  $(g_1g_2) \cdot g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}$  mit  $g_1, g_2 \in G$  wird unter  $v$  definitionsgemäß abgebildet auf

$$(g_1g_2)s (g_2^{-1})s (g_1^{-1})s,$$

was aber wegen  $s$  Gruppenmorphisimus dasselbe ist wie

$$(g_1s)(g_2s)(g_2s)^{-1}(g_1s)^{-1} = 1.$$

Genauso verfährt man mit den anderen Relatoren, und erhält eine Faktorisierung

$$(F \xrightarrow{v} T) = (F \longrightarrow G * H \xrightarrow{u} T)$$

über den Restklassenmorphisimus  $F \longrightarrow G * H$ . Es werden  $g\iota_G u = gu = gs$  und  $h\iota_H u = hu = ht$  stets, womit  $\iota_G u = s$  und  $\iota_H u = t$ .

Da  $G \sqcup H$  die Gruppe  $F$  erzeugt, erzeugt das Bild von  $G \sqcup H$  in  $G * H$  die Gruppe  $G * H$ . Somit ist ein Morphisimus  $G * H \longrightarrow T$  schon bestimmt, wenn man ihn auf  $G\iota_G$  und  $H\iota_H$  festlegt. Daraus ergibt sich die Eindeutigkeit von  $G * H \xrightarrow{u} T$  bezüglich  $\iota_G u = s$  und  $\iota_H u = t$ .

Da für  $G = H = \mathbf{Z}$  das Produkt  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  abelsch, das Coprodukt  $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$  aber isomorph zu einer freien Gruppe auf 2 Elementen und damit nichtabelsch ist, sind in diesem Fall Produkt und Coprodukt nicht isomorph. Mithin kann (Gruppen) keine additive Kategorie sein.

### Aufgabe 7.

- (1) Assoziativität kennen wir aus der Vorlesung. Beachte, daß wir, mangels Kenntnis der Kommutativität von  $(+)$ , den Matrixkalkül bislang nur mit der vorgeschriebenen Summandenreihenfolge verwenden dürfen.

Wir wollen zeigen, daß  $X \xrightarrow{0} Y$  ein neutrales Element ist. Es wird

$$\begin{aligned} f + 0 &= (f \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= f (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= f \cdot 1 \\ &= f, \end{aligned}$$

und dito  $0 + f = f$ .

Zeigen wir die Kommutativität. Seien  $X \xrightleftharpoons[f']{f} Y$  gegeben. Es wird, unter Verwendung der Neutralität der 0,

$$\begin{aligned} f + f' &= (1 \ 1) \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 1) \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= f' + f. \end{aligned}$$

Zeigen wir, daß  $f + (-1_X)f = 0$ . Es ist

$$f + (-1_X)f = (1 \ 1) \begin{pmatrix} f \\ (-1_X)f \end{pmatrix} = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ (-1_X) \end{pmatrix} f = 0f = 0.$$

- (2) Es wird unter Verwendung des Matrixkalküls

$$\begin{aligned} (f + f')(g + g') &= (1 \ 1) \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} (g \ g') \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 1) \begin{pmatrix} fg & f'g \\ f'g' & f'g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (fg + fg' \quad f'g + f'g') \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= fg + fg' + f'g + f'g'. \end{aligned}$$

- (3) Es ist  $(\text{End } X, +)$  mit (1) eine abelsche Gruppe. Es ist nach Definition Kategorie  $(\text{End } X, \cdot)$  ein Monoid (d.h.  $(\cdot)$  assoziativ, Existenz eines beidseitig neutralen Elements bezüglich  $(\cdot)$ ). Schließlich gilt nach (2) das Distributivgesetz.

Auf diese Weise treten Ringe in der Natur auf.

**Aufgabe 8.** Sei  $P \in \text{Ob } \mathcal{C}$  projektiv, und sei  $P \xrightarrow{(u \ v)} X \oplus Y$ . Wir haben zu zeigen, daß  $X$  projektiv ist. Sei  $T \xrightarrow{f} X$  ein Epimorphismus. Wir haben zu zeigen, daß es sich um eine Retraktion handelt.

Sei  $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} := (u \ v)^{-1}$ , i.e. seien  $(u \ v) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 1$  und  $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} (u \ v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Nun ist  $T \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} X \oplus Y$  ebenfalls ein Epimorphismus (wie alle direkten Summen zweier Epimorphismen), und somit ist  $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$  eine Retraktion.

Sei  $P \xrightarrow{(a \ b)} T \oplus Y$  eine zugehörige Coretraktion, i.e. sei  $afs + bt = 1_P$ . Dann ist  $s(afs + bt)u \stackrel{1.}{=} (sa)f \stackrel{2.}{=} s \cdot 1_P \cdot u = 1_X$ , mithin ist  $sa$  eine Coretraktion zu  $f$ .