

## Lösung 9

## Aufgabe 28.

- (1) (i) Wir lösen jeweils in erster Variablen auf.

Wir lösen  $\mathbf{Z}/p^l$  projektiv auf und erhalten  $\text{PRes}(\mathbf{Z}/p^l) \simeq (\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{p^l} \mathbf{Z})$  in  $\text{K}(\mathbf{Z}\text{-Mod})$ .

Anwenden von  $\mathbf{z}(-, \mathbf{Z}/p^m)$  gibt  $(\dots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbf{Z}/p^m \xleftarrow{p^l} \mathbf{Z}/p^m)$ .

Wir erhalten also  $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^k(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq 0$  für  $k \geq 2$ , und

$$\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^k(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z}/p^m & \text{für } l \geq m \\ \mathbf{Z}/p^l & \text{für } l \leq m, \end{cases}$$

für  $k \in \{0, 1\}$ , wobei  $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^0(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq \mathbf{Z}/p^l \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p^m$ .

Anwenden von  $- \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p^m$  gibt  $(\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbf{Z}/p^m \xrightarrow{p^l} \mathbf{Z}/p^m)$ . Also erhalten wir  $\text{Tor}_k^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq 0$  für  $k \geq 2$ , und

$$\text{Tor}_k^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z}/p^m & \text{für } l \geq m \\ \mathbf{Z}/p^l & \text{für } l \leq m \end{cases}$$

für  $k \in \{0, 1\}$ , wobei  $\text{Tor}_0^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq \mathbf{Z}/p^l \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p^m$ .

- (ii) Wir lösen jeweils in zweiter Variablen auf.

Wir lösen  $\mathbf{Z}/p^m$  injektiv auf und erhalten  $\text{IRes}(\mathbf{Z}/p^m) \simeq (\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{p^m} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$  in  $\text{K}(\mathbf{Z}\text{-Mod})$ . Anwenden von  $\mathbf{z}(\mathbf{Z}/p^l, =)$  gibt  $(\mathbf{Z}/p^l \xrightarrow{p^m} \mathbf{Z}/p^l \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$ . Wir erhalten also  $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^k(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq 0$  für  $k \geq 2$ , und ferner

$$\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^k(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z}/p^l & \text{für } m \geq l \\ \mathbf{Z}/p^m & \text{für } m \leq l, \end{cases}$$

für  $k \in \{0, 1\}$ .

Für die Torsionsgruppen lösen wir  $\mathbf{Z}/p^m$  projektiv auf und erhalten  $\text{PRes}(\mathbf{Z}/p^m) \simeq (\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{p^m} \mathbf{Z})$  in  $\text{K}(\mathbf{Z}\text{-Mod})$ .

Anwenden von  $\mathbf{Z}/p^l \otimes_{\mathbf{Z}} =$  gibt  $(\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbf{Z}/p^l \xrightarrow{p^m} \mathbf{Z}/p^l)$ . Also erhalten wir  $\text{Tor}_k^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq 0$  für  $k \geq 2$ , und

$$\text{Tor}_k^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z}/p^l & \text{für } m \geq l \\ \mathbf{Z}/p^m & \text{für } m \leq l \end{cases}$$

für  $k \in \{0, 1\}$ .

- (iii) Nun wollen wir direkt die Definition verwenden, und die Erweiterungs- und Torsionsgruppen über einen Doppelkomplex berechnen.

Einsetzen der projektiven Auflösung von  $\mathbf{Z}/p^l$  aus (i) in die erste, und der injektiven Auflösung von  $\mathbf{Z}/p^m$  aus (ii) in die zweite Variable von  $\mathbf{z}(-,=)$  gibt den Doppelkomplex

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{p^m} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 p^l & & p^l & & & & \\
 \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{p^m} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

in  $\text{Ob CC}^-(\mathbf{Z}\text{-Mod})$ . Sein Totalkomplex in  $\text{Ob C}^+(\mathbf{Z}\text{-Mod})$  ergibt sich zu

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} p^m & p^l \end{pmatrix}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} p^l \\ -p^m \end{pmatrix}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Das zweite Differential ist epimorph, also verschwinden alle Homologiegruppen ab der zweiten. Die nullte Homologiegruppe ergibt sich zu  $\mathbf{Z}/p^l$  für  $l \leq m$ , und zu  $\mathbf{Z}/p^m$  für  $m \leq l$ .

Falls  $m \geq l$ , dann errechnet sich der Kern des zweiten Differentials zu

$$\mathbf{Z}/p^l \oplus \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} p^{-l} & 0 \\ p^{m-l} & 1 \end{pmatrix}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

worüber das erste Differential vermöge  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & p^l \end{pmatrix}} \mathbf{Z}/p^l \oplus \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  faktorisiert. Es ergibt sich die erste Homologiegruppe  $\mathbf{Z}/p^l$ .

Falls  $l \geq m$ , dann errechnet sich der Kern des zweiten Differentials zu

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^m \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & p^{l-m} \\ 0 & p^{-m} \end{pmatrix}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

worüber das erste Differential vermöge  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} p^m & 0 \end{pmatrix}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^m$  faktorisiert. Es ergibt sich die erste Homologiegruppe  $\mathbf{Z}/p^m$ .

Einsetzen der projektiven Auflösung von  $\mathbf{Z}/p^l$  aus (i) in die erste, und der projektiven Auflösung von  $\mathbf{Z}/p^m$  aus (ii) in die zweite Variable von  $\mathbf{z}(-,=)$  gibt den Doppelkomplex

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \dots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \mathbf{Z} & \xleftarrow{p^m} & \mathbf{Z} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 p^l & & p^l & & & & \\
 \mathbf{Z} & \xleftarrow{p^m} & \mathbf{Z} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots
 \end{array}$$

Sein Totalkomplex ergibt sich zu

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -p^m & -p^l \end{pmatrix}} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -p^l \\ p^m \end{pmatrix}} \mathbf{Z}$$

Da das zweite Differential (von rechts gesehen) monomorph ist, verschwinden alle Torsionsgruppen ab der zweiten.

Die nullte Homologiegruppe ergibt sich zu  $\mathbf{Z}/p^l$ , falls  $l \leq m$ , und zu  $\mathbf{Z}/p^m$ , falls  $m \leq l$ .

Der Kern des ersten Differentials ergibt sich zu  $\mathbf{Z} \xrightarrow{(p^{m-l} \ 1)} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ , falls  $l \leq m$ , und zu  $\mathbf{Z} \xrightarrow{(1 \ p^{l-m})} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ , falls  $m \leq l$ .

Im ersten Fall faktorisiert das zweite Differential über diesen Kern via  $\mathbf{Z} \xrightarrow{-p^l} \mathbf{Z}$ , im zweiten Fall via  $\mathbf{Z} \xrightarrow{-p^m} \mathbf{Z}$ .

Die erste Homologiegruppe ergibt sich also zu  $\mathbf{Z}/p^l$ , falls  $l \leq m$ , und zu  $\mathbf{Z}/p^m$ , falls  $m \leq l$ . Dies stimmt mit der Berechnung der Torsionsgruppen in (i) und (ii) überein.

(2) (i) Wir lösen jeweils in zweiter Variablen auf.

Als injektive Auflösung von  $\mathbf{Z}/p$  diene uns

$$\mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p^2} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^3 \longrightarrow \dots$$

(vgl. Aufgabe 25 (1)). Anwenden von  $\mathbf{z}_{/p^3}(\mathbf{Z}/p^2, =)$  liefert

$$\mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^2 \longrightarrow \dots,$$

und so insbesondere

$$\text{Ext}_{\mathbf{Z}/p^3}^2(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p) \simeq \mathbf{Z}/p.$$

Als projektive Auflösung von  $\mathbf{Z}/p$  können wir

$$\dots \longrightarrow \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p^2} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^3$$

verwenden. Anwenden von  $\mathbf{Z}/p^2 \otimes_{\mathbf{Z}/p^3} =$  gibt

$$\dots \longrightarrow \mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^2$$

und so insbesondere

$$\text{Tor}_2^{\mathbf{Z}/p^3}(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p) \simeq \mathbf{Z}/p.$$

Diese beiden Gruppen verschwinden über dem Grundring  $\mathbf{Z}$ , wie in (1) gesehen.

Der Übergang von einem Grundring zu einem Quotienten dieses Grundrings ist also i.a. nicht durch entsprechende Quotientenbildung von Erweiterungs- resp. Torsionsgruppe zu erreichen.

(ii) Wir lösen jeweils in erster Variablen auf.

Anwenden von  $\mathbf{z}_{/p^3}(-, \mathbf{Z}/p)$  auf die projektive Auflösung

$$\dots \longrightarrow \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p^2} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p^2} \mathbf{Z}/p^3$$

von  $\mathbf{Z}/p^2$  gibt

$$\dots \longleftarrow \mathbf{Z}/p \xleftarrow{0} \mathbf{Z}/p \xleftarrow{0} \mathbf{Z}/p \xleftarrow{0} \mathbf{Z}/p,$$

und so erneut

$$\text{Ext}_{\mathbf{Z}/p^3}^2(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p) \simeq \mathbf{Z}/p.$$

Anwenden von  $- \otimes_{\mathbf{Z}/p^3} \mathbf{Z}/p$  auf die eben angeführte projektive Auflösung von  $\mathbf{Z}/p^2$  gibt

$$\dots \longrightarrow \mathbf{Z}/p \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/p \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/p \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/p$$

und so erneut

$$\text{Tor}_2^{\mathbf{Z}/p^3}(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p) \simeq \mathbf{Z}/p.$$

### Aufgabe 29.

Es ist eine  $R$ -Algebra  $A = (A, \varphi)$  gegeben. In der Regel schreibt man  $ra := \varphi(r)a$  für  $r \in R$  und  $a \in A$ .

(i) Betrachten wir die Erweiterungsgruppen.

Wir wollen auf  ${}_A(X, Y)$  eine  $R$ -Modulstruktur erklären. Für  $h \in {}_A(X, Y)$  und  $r \in R$  sei  $rh$  erklärt durch  $x(rh) := r(xh) = (rx)h$ .

In anderen Worten, man verwendet die  $R$ -Rechtsmodulstruktur auf  $X$ , um  ${}_A(X, Y)$  zu einem  $R$ -Linksmodul zu machen, oder wahlweise die  $R$ -Rechtsmodulstruktur auf  $Y$ , um  ${}_A(X, Y)$  zu einem  $R$ -Rechtsmodul und also einem  $R$ -Linksmodul zu machen; alles unter starker Benutzung dessen, daß  $R$  kommutativ ist.

Seien  $A$ -lineare Abbildungen  $X' \xrightarrow{f} X$  und  $Y \xrightarrow{g} Y'$  gegeben. Die induzierte Abbildung  ${}_A(X, Y) \xrightarrow{f(-)g} {}_A(X', Y')$  ist  $R$ -linear. So erhalten wir einen biadditiven Funktor  ${}_A(-, =)$  mit Werten in  $R$ -Mod.

Komponiert mit dem exakten Vergißfunktoren  $R\text{-Mod} \xrightarrow{V} \mathbf{Z}\text{-Mod}$  erhalten wir den biadditiven Funktor, dessen rechtsabgeleitete Funktoren per Definition die Erweiterungsgruppen darstellen. Sei  $i \geq 0$ . Da  $V$  exakt ist, ist  $V \circ H^i = H^i \circ K(V)$ . In anderen Worten, der  $i$ -te Rechtsabgeleitete des biadditiven Funktors  ${}_A(-, =)$  mit Werten in  $R$ -Mod ergibt nach Komposition mit  $V$  den Funktor  $\text{Ext}_A^i(-, =)$ , wie verlangt. Unter Mißbrauch der Notation schreiben wir für den vorgenannten Rechtsabgeleiteten mit Werten in  $R$ -Mod ebenfalls  $\text{Ext}_A^i(-, =)$ .

(ii) Betrachten wir die Torsionsgruppen.

Wir wollen auf  $X \otimes_A Y$  eine  $R$ -Modulstruktur erklären. Für  $r \in R$ ,  $x \in X$  und  $y \in Y$  sei  $r(x \otimes y) := (xr) \otimes y = x \otimes (ry)$ .

In anderen Worten, man verwendet die  $R$ -Linksmodulstruktur auf  $X$ , um  $X \otimes Y$  zu einem  $R$ -Linksmodul zu machen, oder wahlweise die  $R$ -Rechtsmodulstruktur auf  $Y$ , um  $X \otimes_A Y$  zu einem  $R$ -Rechtsmodul und also einem  $R$ -Linksmodul zu machen; alles unter starker Benutzung dessen, daß  $R$  kommutativ ist.

Seien  $A$ -lineare Abbildungen  $X \xrightarrow{f} X'$  und  $Y \xrightarrow{g} Y'$  gegeben. Die induzierte Abbildung  $X \otimes_A Y \xrightarrow{f \otimes_A g} X' \otimes_A Y'$  ist  $R$ -linear. So erhalten wir einen biadditiven Funktor  $- \otimes_A =$  mit Werten in  $R$ -Mod.

Komponiert mit dem exakten Vergißfunktoren  $R\text{-Mod} \xrightarrow{V} \mathbf{Z}\text{-Mod}$  erhalten wir den biadditiven Funktor, dessen linksabgeleitete Funktoren per Definition die Torsionsgruppen darstellen. Sei  $i \geq 0$ . Da  $V$  exakt ist, ist  $V \circ H_i = H_i \circ K(V)$ . In anderen Worten, der  $i$ -te Linksabgeleitete des biadditiven Funktors  $- \otimes_A =$  mit Werten in  $R$ -Mod ergibt nach Komposition mit  $V$  den Funktor  $\text{Tor}_A^i(-, =)$ , wie verlangt. Unter Mißbrauch der Notation schreiben wir für den vorgenannten Linksabgeleiteten mit Werten in  $R$ -Mod ebenfalls  $\text{Tor}_A^i(-, =)$ .

### Aufgabe 30.

Da  $I_3 = P_3$  bijektiv ist, werden

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbf{Q}} \text{Ext}_R^k(I_1, P_3) &= \dim_{\mathbf{Q}} \text{Ext}_R^k(I_2, P_3) = \dim_{\mathbf{Q}} \text{Ext}_R^k(I_3, P_3) \\ &= \dim_{\mathbf{Q}} \text{Ext}_R^k(I_3, P_2) = \dim_{\mathbf{Q}} \text{Ext}_R^k(I_3, P_1) = 0 . \end{aligned}$$

In der Tat verschwindet eine Erweiterungsgruppe, sobald in erster Variablen ein projektiver, oder aber in zweiter Variablen ein injektiver Modul steht (vgl. Aufgabe 26 (1)).

Berechnen wir  $\text{Ext}_R^k(I_1, P_1)$ . Eine injektive Auflösung von  $P_1$  ist nach Aufgabe 23 (3) gegeben durch  $I_3 \rightarrow I_2$  (um Nullen ergänzt). Die Diagramminterpretation aus Aufgabe 23 (2) zeigt, daß Anwenden von  $(I_1, =)$  den Komplex

$$0 \rightarrow 0,$$

und also  $\dim_{\mathbf{Q}} \text{Ext}_R^k(I_1, P_1) = 0$  für alle  $k \geq 0$

Berechnen wir  $\text{Ext}_R^k(I_1, P_2)$ . Eine projektive Auflösung von  $I_1$  ist nach Aufgabe 23 (3) gegeben durch  $P_2 \rightarrow P_3$ . Anwenden von  $(-, P_2)$  gibt den Komplex

$$\mathbf{Q} \leftarrow 0,$$

und also  $\dim \text{Ext}_R^k(I_1, P_2) = 0$  für  $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ , und  $\dim \text{Ext}_R^1(I_1, P_2) = 1$ .

Berechnen wir  $\text{Ext}_R^k(I_2, P_1)$ . Eine injektive Auflösung von  $P_1$  ist nach Aufgabe 23 (3) gegeben durch  $I_3 \rightarrow I_2$ . Anwenden von  $(I_2, -)$  gibt den Komplex

$$0 \rightarrow \mathbf{Q},$$

und also  $\dim \text{Ext}_R^k(I_2, P_1) = 0$  für  $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ , und  $\dim \text{Ext}_R^1(I_2, P_1) = 1$ .

Berechnen wir  $\text{Ext}_R^k(I_2, P_2)$ . Eine projektive Auflösung von  $I_2$  ist nach Aufgabe 23 (3) gegeben durch  $P_1 \rightarrow P_3$ . Anwenden von  $(-, P_2)$  gibt den Komplex

$$\mathbf{Q} \leftarrow 0,$$

und also  $\dim \text{Ext}_R^k(I_2, P_2) = 0$  für  $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ , und  $\dim \text{Ext}_R^1(I_2, P_2) = 1$ .

### Aufgabe 31.

Wir unterschlagen Indizes bei Morphismen.

Zum Zwecke der Notationsvereinfachung etwas allgemeiner formuliert, seien uns zwei Doppelkomplexe  $X$  (in der Anwendung  $F^{\text{CC}}(U, U')$ ) und  $Y$  (in der Anwendung  $F^{\text{CC}}(V, V')$ ) in  $\text{CC}^{\text{L}}(\mathcal{A})$  gegeben, ein Morphismus  $X \xrightarrow{f} Y$ , sowie ein Tupel von Morphismen  $(X^{i,j} \xrightarrow{h} Y^{i-1,j})_{i,j}$  (in der Anwendung  $(X^{i,j} \xrightarrow{h} Y^{i-1,j}) = (F(U^i, U'^j) \xrightarrow{F(h, 1_{U'^j})} F(V^{i-1}, V'^j))$  mit

$$\begin{aligned} f &= h\delta + \delta h \\ hd &= dh \end{aligned}$$

stets. Wir haben zu zeigen, daß  $tX \xrightarrow{tf} tY$  nullhomotop ist. Beachte noch, daß wegen  $Y^{-1,j} = 0$  noch

$$(X^{0,j} \xrightarrow{f} Y^{0,f}) = (X^{0,j} \xrightarrow{\delta} X^{1,j} \xrightarrow{h} Y^{0,j})$$

stets gilt.

Wir erinnern daran, daß  $(tX)^k = X^{0,k} \oplus X^{1,k-1} \oplus \dots \oplus X^{k,0}$  für  $k \geq 0$ , und  $(tX)^k = 0$  für  $k < 0$ .

Als Homotopie verwenden wir das Tupel

$$(tX)^k \xrightarrow{\quad} (tY)^{k-1}$$

Auf der einen Seite wird damit

$$\begin{pmatrix} d & \delta & & & \\ -d & -\delta & & & \\ & d & \delta & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & \\ +h & & & & \\ & -h & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \pm h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\delta h & & & & \\ -dh & +\delta h & & & \\ & -dh & +\delta h & & \\ & & -dh & +\delta h & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Auf der anderen Seite wird damit

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ +h & -h \\ & +h & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & \delta & & \\ -d & -\delta & & \\ & d & \delta & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ hd & h\delta \\ & hd & h\delta \\ & & hd & h\delta \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Die Summe gibt wie erwünscht

$$\begin{pmatrix} \delta h & & & \\ 0 & \delta h + h\delta & & \\ & 0 & \delta h + h\delta & \\ & & 0 & \delta h + h\delta \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & & & \\ & f & & \\ & & f & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \mathfrak{t}f.$$