

Blatt 1**Aufgabe 4 (M, 4 Punkte).** Taschenrechner wird empfohlen.

- (1) Auf wieviele Arten kann man 7 Kugeln aus 6 Kugeln ziehen, wenn man jeweils wieder zurücklegt und auf die Reihenfolge achtet?
- (2) Auf wieviele Arten kann man 3 Kugeln aus 9 Kugeln ziehen, wenn man jeweils nicht wieder zurücklegt und auf die Reihenfolge achtet?
- (3) Auf wieviele Arten kann man 5 Kugeln aus 3 Kugeln ziehen, wenn man jeweils wieder zurücklegt und nicht auf die Reihenfolge achtet?
- (4) Auf wieviele Arten kann man 4 Kugeln aus 10 Kugeln ziehen, wenn man jeweils nicht wieder zurücklegt und nicht auf die Reihenfolge achtet?

Aufgabe 5 (M, 4 Punkte). (Wahrscheinlichkeiten beim Lotto).

Sei $T := \{1, \dots, 49\}$ (T wie in **T**opf). Sei $K \subseteq T$ eine Teilmenge mit $|K| = 6$ (K wie in ange**k**reuzt). Taschenrechner wird empfohlen.

- (1) Bestimme $|\{Z \subseteq T : |Z| = 6\}|$ (Z wie in **Z**iehung).
- (2) Bestimme $|\{Z \subseteq T : |Z| = 6, |Z \cap K| = 3\}|$.
- (3) Bestimme $|\{Z \subseteq T : |Z| = 6, |Z \cap K| = 5\}|$.
- (4) Bestimme $|\{(Z, z) \in \text{Pot}(T) \times T : |Z| = 6, z \notin Z, |Z \cap K| = 2, z \in K\}|$
(z wie in **Z**usatzzahl).

Aufgabe 6 (S, 2+2+2 Punkte).

Sind $a, b, m \in \mathbf{Z}$, so schreiben wir $a \equiv_m b$ oder $a \equiv b \pmod{m}$, falls $a - b$ ganzzahliges Vielfaches von m ist. In Worten, a ist kongruent zu b modulo m .

Sei p eine Primzahl.

- (1) Sei $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Zeige, daß $\binom{p}{k} \equiv_p 0$.
- (2) Sei $t \in \mathbf{Z}$. Zeige, daß $(t+1)^p - t^p \equiv_p 1$.
- (3) Sei $z \in \mathbf{Z}$. Zeige, daß $z^p \equiv_p z$.
(Hinweis: Zunächst den Fall $z \geq 0$. Wiederholte Anwendung von (2).)

Aufgabe 7 (S, 2+2 Punkte).Wir erinnern an das Element $i \in \mathbf{C}$ mit $i^2 = -1$. Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl.

- (1) Berechne $(1+i)^{8n} \in \mathbf{C}$ (so weit wie möglich).
- (2) Zeige, daß

$$|\{M \subseteq \{1, \dots, 8n\} : |M| \equiv_4 0\}| = 2^{8n-2} + 2^{4n-1}$$

(Hinweis: $(1+i)^{8n}$ und $(1+1)^{8n} + (1-1)^{8n}$ mit binomischer Formel auswerten.)