G. Nebe, M. Künzer

Diskrete Strukturen, SS 06

Lösung 1

Aufgabe 4.

(1) Man hat $6^7 = 279936$ Möglichkeiten.

(2) Man hat $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ Möglichkeiten.

(3) Man hat $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$ Möglichkeiten.

(4) Man hat $\binom{10}{4} = 210$ Möglichkeiten.

Aufgabe 5.

(1) Die Anzahl der 6-elementigen Teilmengen einer 49-elementigen Menge beträgt $\binom{49}{6} = 13983816$.

(2) Schreibe $Z = (Z \cap K) \sqcup (Z \cap (G \smallsetminus K))$. Hierbei sollen $Z \cap K$ und $Z \cap (G \smallsetminus K)$ dreielementig sein. Für $Z \cap K$ haben wir $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten. Für $Z \cap (G \smallsetminus K)$ haben wir $\binom{43}{3}$ Möglichkeiten. Insgesamt haben wir $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246820$ Möglichkeiten. (Lies: Die Wahrscheinlichkeit für einen Dreier beträgt $246820/13983816 \approx 0.018$.)

(3) Schreibe $Z = (Z \cap K) \sqcup (Z \cap (G \smallsetminus K))$. Hierbei sollen $Z \cap K$ fünf- und $Z \cap (G \smallsetminus K)$ einelementig sein. Für $Z \cap K$ haben wir $\binom{6}{5}$ Möglichkeiten. Für $Z \cap (G \smallsetminus K)$ haben wir $\binom{43}{1}$ Möglichkeiten. Insgesamt haben wir $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} = 6 \cdot 43 = 258$ Möglichkeiten. (Lies: Die Wahrscheinlichkeit für einen Fünfer beträgt $258/13983816 \approx 0.000018$.)

(4) Für Z haben wir wie in (2) oder (3) gerade $\binom{6}{2} \cdot \binom{43}{4}$ Möglichkeiten. Da z in $K \smallsetminus Z$ liegen soll, und da $|K \smallsetminus Z| = 4$, haben wir für z noch 4 Möglichkeit. Somit ergeben sich $\binom{6}{2} \cdot \binom{43}{4} \cdot 4 = 7404600$ Möglichkeiten für das Paar (Z, z). (Lies: Die Wahrscheinlichkeit für einen Zweier mit Zusatzzahl beträgt $7404600/\left(13983816 \cdot 43\right) \approx 0.012$.)

Aufgabe 6.

(1) Es ist $\binom{p}{k} = \frac{p\cdot(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$. Da $k \geq 1$ ist, tritt im Zähler der Faktor p auf. Da $k \leq p-1$ ist, tritt im Nenner der Faktor p nicht auf. Da p prim ist, ist dieser Ausdruck also wenigstens einmal durch p teilbar. In anderen Worten, es ist $\binom{p}{k} = 0$.

(2) Die binomische Formel gibt

$$\begin{array}{rcl} (t+1)^p & = & \binom{p}{0} t^p + \binom{p}{1} t^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1} t^1 + \binom{p}{0} t^0 \\ & = & t^p + 1 + \left(\binom{p}{1} t^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1} t^1\right) \\ & \equiv_p & t^p + 1 \end{array}$$

gemäß (1).

(3) Werde zunächst der Fall $z \geq 0$ betrachtet. Mit wiederholter Anwendung von (2) wird

$$z^p \ \equiv_p \ (z-1)^p + 1 \equiv_p (z-2)^p + 1 + 1 \equiv_p \cdots \equiv_p 0^p + 1 + \cdots + 1 \ = \ z\ .$$

Betrachten wir nun auch noch den Fall $z \leq 0$. Es ist dann $-z \geq 0$, i.e. für $-z$ können wir den bereits gezeigten Fall anwenden. Ist $p = 2$, so wird $z^2 = (-z)^2 \equiv_2 -z \equiv_2 z$ nach dem bereits gezeigten Fall. Ist p ungerade, so wird $z^p = -(-z)^p \equiv_p -(-z) = z$ nach dem bereits gezeigten Fall.

Aufgabe 7.

(1) Es ist $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$, also $(1+\mathrm{i})^8 = (2\mathrm{i})^4 = 2^4$, und somit $(1+\mathrm{i})^{8n} = 2^{4n}$ $(= 16^n)$.

(2) Zunächst halten wir fest, daß für $0 \leq k \leq 2n$

$$\big|\{M \subseteq \{1,\dots,8n\} \,:\, |M| = 4k\}\big| \;=\; \tbinom{8n}{4k}\;,$$

und also

$$\big|\{M \subseteq \{1,\dots,8n\} \,:\, |M| \equiv_4 0\}\big| \;=\; \sum_{k=0}^{2n} \tbinom{8n}{4k}\;.$$

Die binomische Formel gibt zusammen mit (1)

$$\begin{array}{rcl} 2^{4n} & = & (1+\mathrm{i})^{8n} \\ & = & \sum_{k=0}^{8n} \binom{8n}{k} 1^{8n-k}\mathrm{i}^k \\ & = & \sum_{k=0}^{2n} \binom{8n}{4k} - \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{8n}{4k+2} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\binom{8n}{4k+1} - \binom{8n}{4k+3}\right) \end{array}$$

Vergleich der Realteile liefert

$$(*) \qquad 2^{4n} \;=\; \sum_{k=0}^{2n} \tbinom{8n}{4k} - \sum_{k=0}^{2n-1} \tbinom{8n}{4k+2}\;.$$

Andererseits gibt die binomische Formel, zweimal angewandt, auch

$$\begin{array}{rcl} 2^{8n} & = & (1+1)^{8n} + (1-1)^{8n} \\ & = & \sum_{k=0}^{8n} \binom{8n}{k} + \sum_{k=0}^{8n} \binom{8n}{k} (-1)^k \\ & = & 2 \cdot \sum_{k=0}^{2n} \binom{8n}{4k} + 2 \cdot \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{8n}{4k+2}\;, \end{array}$$

und also

$$(**) \qquad 2^{8n-1} \;=\; \sum_{k=0}^{2n} \tbinom{8n}{4k} + \sum_{k=0}^{2n-1} \tbinom{8n}{4k+2}$$

Addition von $(*)$ und $(**)$ liefert

$$2^{4n} + 2^{8n-1} \;=\; 2 \cdot \sum_{k=0}^{2n} \tbinom{8n}{4k}\;.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\big|\{M \subseteq \{1,\dots,8n\} \,:\, |M| \equiv_4 0\}\big| \;=\; \sum_{k=0}^{2n} \tbinom{8n}{4k} \;=\; 2^{4n-1} + 2^{8n-2}\;.$$

Diese Formel stimmt für $n = 0$ nicht. Für $n \geq 1$ wurde in der Herleitung $(1-1)^{8n} = 0$ verwandt. Für $n = 0$ haben wir aber $(1-1)^{8\cdot 0} = 1$.