Übungen Darstellungstheorie Sommersemester 02

Blatt 1

Abgabe 23.04.02

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei K ein Körper.

(i) Zeige, daß KC_n isomorph zu $K[X]/(X^n - 1)$ ist.

(ii) Beschreibe die Ideale von KC_n unter Zuhilfenahme der Menge der Teiler von $X^n - 1$ in $K[X]$.

(iii) Ist p die Charakteristik von K und ist $n = p$, so zeige man, daß die Ideale in KC_p bezüglich der Inklusion eine Kette bilden.

(iv) Zeige, daß unter den Voraussetzungen von (iii) KC_p bis auf Isomorphie genau einen einfachen Modul besitzt und beschreibe diesen.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

(i) Sei G eine endliche Gruppe, und sei X eine endliche G-Menge, d.h. eine Menge X zusammen mit einem Gruppenmorphismus $G \longrightarrow \mathrm{Sym}(X)$, wobei $\mathrm{Sym}(X)$ die Gruppe der Permutationen von X bezeichne. Sei K ein Körper, und sei $V = KX = \langle v_x \mid x \in X \rangle$ der Permutationsmodul von G auf X über K. Zeige: teilt $\mathrm{char}\,(K)$ die Anzahl der Elemente $|X|$ nicht, so wird

$$KX \;=\; \langle \sum_{x \in X} v_x \rangle \;\oplus\; \langle v_x - v_y \mid x \in X \rangle$$

für $y \in X$ beliebig gewählt eine direkte Zerlegung in Teilmoduln.

(ii) Die Diedergruppe D_8 ist die Symmetriegruppe des Quadrates. Zerlege die komplexe Permutationsdarstellung von D_8 auf den Ecken des Quadrats in irreduzible Darstellungen. Gib von der dabei auftretenden zweidimensionalen Darstellung darstellende Matrizen auf Gruppenerzeugern an.

(iii) Finde weitere einfache Darstellungen, so daß mit (ii) zusammen insgesamt 5 paarweise nichtisomorphe irreduzible komplexe Darstellungen von D_8 vorliegen. (Wir werden später sehen, daß das alle sind.)