Übungen Darstellungstheorie Sommersemester 02

Blatt 11

Abgabe 16.07.02

Aufgabe 27 (10 Punkte). Berechne die Charaktertafel von $G := \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_3)$.

(a) Mit $S := \mathrm{SL}_3(\mathbf{F}_3)$ ist $G = S \times Z(G)$. Gib an, wie aus den Tafeln der direkten Faktoren die Tafel eines direkten Produktes gewonnen werden kann. Damit können wir uns auf die Tafel von S beschränken.

(b) Gib eine Liste der irreduziblen Elemente von Grad ≤ 3 in $\mathbf{F}_3[X]$ an. Verwende die rationale Normalform für eine Liste von Repräsentanten der Konjugationsklassen $a_1, a_2, a_3, b_3, a_4, a_6, a_8, b_8, a_{13}, b_{13}, c_{13}, d_{13}$ (die Indizes bezeichnen die Ordnungen), inklusive Zentralisatoren. Es ist nützlich, sich jeweils die charakteristischen Polynome zu notieren. Welche Spalten der Tafel von S haben rationale Einträge?

(c) S operiert auf $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_3}$, der Menge der eindimensionalen Unterräume von $\mathbf{F}_3^3$. Zerlege den zugehörigen Permutationscharakter in Irreduzible $\chi_1 + \chi_2$, wobei χ_1 den trivialen Charakter bezeichne.

(d) Ist V eine Untergruppe der endlichen Gruppe U, und ist χ ein Charakter von V, so ist für $u \in U$

$$\chi{\uparrow}_V^U(u) \;=\; \sum_{v \in \mathrm{Cl}(V) \cap u^U} \chi(v) \frac{|C_U(v)|}{|C_V(v)|}\,,$$

wobei $\mathrm{Cl}(V)$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von V bezeichne.

(e) Sei $H := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid \det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & e \end{smallmatrix}\right) = 1 \right\} \leq S$. Bestimme die Konjugationsklassen von H samt Längen.

(f) H bildet auf $K := \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ ab, was deren irreduzible Charaktere nach H fortsetzt. Ist χ ein Charakter von K, so bezeichne $\chi{\uparrow}_H^S$ den induzierten Charakter dieser Fortsetzung. Gib eine Formel für die Charakterwerte von $\chi{\uparrow}_H^S$ in Termen von Charakterwerten von χ auf Konjugationsklassen von K an.

(g) Zerlege den nach S hochinduzierten ersten irreduziblen Charakter von K (in der Tafel der Vorlesung) in Irreduzible $\chi_1 + \chi_2 + \chi_3$. Der zweite liefert so χ_8, der sechste $\chi_3 + \chi_{12}$, und der vierte $\chi_2 + \chi_{11} + \chi_{12}$. Der fünfte liefert einen Charakter ψ, der in zwei verschiedene noch unbekannte irreduzible Charaktere zerfällt.

(h) $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_8, \zeta_{13})/\mathbf{Q})$ operiert auf den Spalten der Tafel von S mit Bahnlängen $1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4$ (potenziere die Klassenrepräsentanten und betrachte die Klassen der Potenzen), also auch auf den Zeilen, mit denselben Bahnenlängen. Die Bahn der Länge 4 heiße $\{\chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_7\}$, die Bahn der Länge 2 heiße $\{\chi_9, \chi_{10}\}$. Von den Irreduziblen, in welche der rationalwertige Charakter ψ zerfällt, kann keiner aus $\{\chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_7\}$ stammen.

(i) Berechne unter Zuhilfenahme des regulären Charakters die Summe $\chi_4+\chi_5+\chi_6+\chi_7$.

(j) Gib die Werte von $\chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_7, \chi_9, \chi_{10}$ auf den rationalen Spalten an.

(k) Seien $x = \chi_4(a_8)$, $y = \chi_9(a_8)$, sei $y' = \chi_{10}(a_8)$. Diese Werte sind fix unter $\zeta_8 \longmapsto \zeta_8^3$, und also in $\mathbf{Q}(i\sqrt{2})$, da $i\sqrt{2} = \zeta_8 + \zeta_8^3$. Wir haben $y + y' = 0$, sowie $4|x|^2 + 2|y|^2 + 4 = 8$. Vervollständige die Spalten a_8, b_8 der Tafel von S. Vervollständige mit der horizontalen Orhogonalität die Charakterwerte von χ_9 und χ_{10}.

(l) Es ist $t := \chi_4(a_{13})$ fix unter $\zeta_{13} \longmapsto \zeta_{13}^3$. Also liegt $t \in \mathbf{Q}(\vartheta)$, wobei $\vartheta = \zeta_{13}+\zeta_{13}^3+\zeta_{13}^9$. Die Spalte a_{13} bestimmt die Spalten b_{13}, c_{13}, d_{13}. Also sind $\chi_4(a_{13})$, $\chi_5(a_{13})$, $\chi_6(a_{13})$, $\chi_7(a_{13})$ genau vier verschiedene Konjugierte von t unter $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\vartheta)/\mathbf{Q})$.

(m) Sei $\sigma : \zeta_{13} \longmapsto \zeta_{13}^2$. Sei

$$t \;=\; \alpha_0\vartheta^{\sigma^0} + \alpha_1\vartheta^{\sigma^1} + \alpha_2\vartheta^{\sigma^2} + \alpha_3\vartheta^{\sigma^3}$$

angesetzt, mit $\alpha_i \in \mathbf{Z}$. Aus $(\chi_4, \chi_4) = 1$ bekommen wir

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \;=\; 10\,.$$

Diagonalisiere via $S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und folgere, daß nur ein α_i nicht verschwindet, und dies gleich ± 1 ist. Setze o.E. $t = \pm\vartheta$. Bestimme das Vorzeichen mit horizontaler Orthogonalität. Vervollständige die Tafel von S.