

## Blatt 9

Abgabe 02.07.02

**Aufgabe 21 (4 Punkte).** Betrachte die elementarsymmetrischen Funktionen in  $n$  Variablen  $s_r = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$  über  $\mathbf{C}$ . Für  $m \in [1, n]$  sei  $p_m := \sum_{i \in [1, n]} x_i^m$ . Für eine Partition  $\lambda$  von  $m$  von Höhe  $h(\lambda) = \lambda'_1$  schreiben wir  $s_\lambda = \prod_{i \in [1, h(\lambda)]} s_{\lambda_i}$ . Für  $i \in [2, m-1]$  definieren wir noch Hilfspolynome  $h_{m,i} := \sum_{j \in [1, n]} x_j^i \sum_{k_1 < \dots < k_{m-i}, k_l \neq j} x_{k_1} \dots x_{k_{m-i}}$ .

- (a) Sei z.B.  $n = 4$ . Stelle  $p_2^2, h_{4,3}, p_3$  und  $p_4$  als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen dar.
- (b) Es ist  $p_1 s_{m-1} = m s_m + h_{m,2}$ . Ferner ist  $p_i s_{m-i} = h_{m,i} + h_{m,i+1}$  für  $i \in [2, m-2]$ . Schließlich ist  $p_{m-1} s_1 = h_{m,m-1} + p_m$ .
- (c) Es ist  $p_m = (-1)^{m+1} m s_m + \sum_{i \in [1, m-1]} (-1)^{i+1} p_{m-i} s_i$ .
- (d) Es ist

$$p_m = m \cdot \sum_{\lambda \vdash m} (-1)^{m+h(\lambda)} \frac{(h(\lambda) - 1)!}{\prod_{i \geq 1} (\lambda'_i - \lambda'_{i+1})!} \cdot s_\lambda.$$

(Hinweis: Induktion nach  $m$ .)

- (e) Sei  $\chi$  ein gewöhnlicher Charakter einer endlichen Gruppe  $G$ . Die Klassenfunktion  $g \mapsto \chi(g^m)$  ist ein ganzzahliges Polynom in den Charakteren  $\chi^{[l]}$ ,  $l \in [1, m]$ . Gib eine Formel an (der man die ganzzahligen Koeffizienten nicht notwendig ansehen muß).

**Aufgabe 22 (4 Punkte).** Betrachte die treue Darstellung der Quaternionengruppe  $Q_8$ , die durch

$$\begin{array}{ccc} Q_8 & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) \\ i & \mapsto & \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ j & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

gegeben ist.

- (a) Bestimme  $\Phi_{Q_8}(z)$ .
- (b) Gib primäre und sekundäre Invarianten an.
- (c) Ist  $(Q_8)\rho$  eine Spiegelungsgruppe?

**Aufgabe 23 (2 Punkte).** Sei  $H$  eine Untergruppe der endlichen Gruppe  $G$ . Sei  $W$  ein einfacher  $\mathbf{C}H$ -Modul mit Charakter  $\chi$ . Mit  $W|_s$  werde der  $H \cap H^s$ -Modul bezeichnet, auf welchem  $x \in H \cap H^s$  operiert als  $w \cdot x := w s x s^{-1}$ . Sei  $\chi|_s$  der Charakter von  $W|_s$ .

- (a)  $W \uparrow_H^G$  ist einfach genau dann, wenn für alle Doppelnebenklassenrepräsentanten  $s \in H \backslash G / H$ , die nicht in  $H$  liegen,  $(\chi|_s, \chi|_{H \cap H^s}) = 0$  ist.
- (b) Sei  $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ , und  $H$  die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Sei  $\chi_\omega : H \rightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbf{C})$ ,  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mapsto (a)\omega$  definiert durch  $\mathbf{F}_p^* \rightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbf{C})$ ,  $a \mapsto (a)\omega$ . Untersuche  $\chi_\omega \uparrow_H^G$  auf Irreduzibilität. (Hinweis: wähle Repräsentanten  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .)