Übungen Darstellungstheorie Sommersemester 02

Lösung 1

Aufgabe 1.

(i) Ein Isomorphismus ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} K[X]/(X^n - 1) & \xrightarrow{\sim} & KC_n \\ X & \longmapsto & c\,, \end{array}$$

wobei c einen Erzeuger der Gruppe C_n bezeichnet, d.h. $C_n = \langle c \rangle$.

(ii) Die Ideale von $K[X]/(X^n - 1)$ sind gegeben durch die Bilder derjenigen Ideale von $K[X]$, die das Ideal $(X^n - 1)$ enhalten. Da $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist, ist, sind diese gegeben durch die Ideale $(g(X))$, wobei $g(X)$ die Teiler des Polynoms $X^n - 1$ in $K[X]$ durchläuft.

(iii) Ist p die Charakteristik von K, und ist $n = p$, so ist $X^p - 1 = (X - 1)^p$. Die Teiler von $(X-1)^p$ sind gegeben durch $(X-1)^i$ für $i \in [0, p]$. Wir erhalten nach isomorpher Substitution die Kette

$$KC_p \supset ((c-1)) \supset ((c-1)^2) \supset \cdots \supset ((c-1)^p) = 0\,.$$

(iv) Ein einfacher Modul M ist insbesondere zyklisch, d.h. es gibt einen Epimorphismus $KC_p \longrightarrow M$. Mit (iii) ist M also isomorph zu $K[X]/((X-1)^i)$ für ein $i \in [1, p]$. Von diesen ist allerdings nur der triviale Modul $K \simeq KC_p/((c-1)^1)$ einfach, die anderen haben den trivialen Modul K als echten Quotienten.

Aufgabe 2.

(i) Bezeichne $T := \langle \sum_{x\in X} v_x \rangle$, bezeichne $A := \langle v_x - v_y \mid x \in X \rangle$. Beide Untervektorräume T und A sind Teilmoduln von V. In der Tat ist A charakterisierbar als

$$A = \{\sum_{x\in X} s_x v_x \mid \sum_{x\in X} s_x = 0\}\,,$$

woraus man die Stabilität von A unter der Gruppenoperation ersieht. Die K-lineare Dimension von T ist 1, die K-lineare Dimension von A ist $|X| - 1$. Aus Dimensionsgründen genügt es für die direkte Zerlegung also $T \cap A = 0$ zu zeigen, i.e. $\sum_{x\in X} v_x \notin A$. Dies folgt aber mit obiger Charakterisierung von A aus $\sum_{x\in X} 1 = |X| \neq 0$ in K, nach Voraussetzung an die Charakteristik.

(ii) Seien die Ecken des Quadrates in positiver Richtung von 1 bis 4 durchnumeriert, so daß $D_8 = \langle (1,2,3,4), (2,4) \rangle \leq \mathcal{S}_4$. Der eindimensionale, insbesondere also einfache, triviale Summand $X_1 := \langle v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \rangle$ hat den Teilmodul $\langle v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_1 - v_4 \rangle$

von KX als Komplement. Darin liegt nun wiederum der einfache Modul $X_2 := \langle v_1 - v_2 + v_3 - v_4 \rangle$ mit dem Komplement $X_3 := \langle v_1 - v_3, v_2 - v_4 \rangle$.

Wir behaupten, daß X_3 ein einfacher Modul ist. Sei $\xi := s(v_1 - v_3) + t(v_2 - v_4)$ mit $(s,t) \neq (0,0)$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß ξ den Modul X_3 erzeugt, d.h. daß $\mathbf{C}D_8 \longrightarrow X_3$, $1 \longmapsto \xi$, surjektiv ist. Ist $t \neq 0$, so ist $(\xi, \xi(2,4))$ eine Basis von X_3, ist $t = 0$, so ist $(\xi, \xi(1,2,3,4))$ eine Basis von X_3.

Darstellende Matrizen auf X_3 sind $(1,2,3,4) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $(2,4) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

(Ein nützliches Kriterium, die Einfachheit von Darstellungen zu entscheiden, welches Spuren darstellender Matrizen, sogenannte *Charaktere,* verwendet, werden wir noch kennenlernen.)

X_1, X_2 und X_3 sind paarweise nichtisomorph. Eindimensionale Darstellungen sind bereits dann nicht isomorph, wenn Gruppenelemente unterschiedlich operieren. Einfache Darstellungen von unterschiedlicher Dimension sind ebenfalls nicht isomorph.

(iii) In Erzeugern und Relationen ist D_8 gegeben als

$$D_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle \ .$$

Also haben wir die weiteren einfachen eindimensionalen Darstellungen X_4, gegeben durch $a \longmapsto 1$, $b \longmapsto -1$, und X_5, gegeben durch $a \longmapsto -1$, $b \longmapsto -1$.

Scheinbedingungen: die Hälfte der Punkte aus den schriftlichen Abgaben und die aktive Teilnahme an den Übungen.