Übungen Darstellungstheorie Sommersemester 02

Lösung 11

Aufgabe 27.

a) Seien U und V endliche Gruppen. Ist φ ein irreduzibler Charakter von U und ψ ein irreduzibler Charakter von V, so ist $\chi : (u,v) \longmapsto \varphi(u)\psi(v)$ ein irreduzibler Charakter von $U \times V$, gehörend zum äußeren Tensorprodukt der Moduln. Irreduzibilität sieht man mit dem Skalarprodukt. Die so entstehenden Charaktere sind des weiteren paarweise orthogonal, und ihre Anzahl ist gleich dem Produkt der Anzahlen der Charaktere von U und von V. Da dies entsprechend für die Konjugationsklassen gilt, haben wir so alle irreduziblen Charaktere gefunden.

Hier sehen wir nun wegen $Z(G) = \langle \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \rangle$, daß $G = S \cdot Z(G)$ und $S \cap Z(G) = 1$. Da Elemente von $Z(G)$ dazuhin mit den Elementen von S kommutieren, ist $G = S \times Z(G)$.

Wir haben übrigens $|G| = 26 \cdot 24 \cdot 18$, also $|S| = 13 \cdot 3^3 \cdot 2^4 = 5616$.

b) Die irreduziblen Elemente von Grad ≤ 3 in $\mathbf{F}_3[X]$ sind

$$\begin{aligned}
&X \\
&X+1 \\
&X-1 \\
&X^2-X-1 \\
&X^2+X-1 \\
&X^2+1 \\
&X^3+X^2-1 \\
&X^3+X^2+X-1 \\
&X^3-X-1 \\
&X^3-X^2-X-1 \\
&X^3-X^2+1 \\
&X^3-X^2+X+1 \\
&X^3-X+1 \\
&X^3+X^2-X+1\,.
\end{aligned}$$

Wegen der direkten Zerlegung aus a) sind die Konjugationsklassen von S genau die vollen Konjugationsklassen von G, die bereits in S liegen. Wir sortieren die rationalen Normalformen nach Blockgestalt. Für die Zentralisatoren rät oder berechnet man gewisse zentralisierende Elemente und vergewissert sich hinterher anhand der Summe $|S| = 5616$ der Bahnenlängen, daß die Zentralisatoren nicht noch größer sein können, da sonst diese Summe nicht mehr $|S|$ ergäbe.

In S liegen alle Normalformen mit kostantem Koeffizienten -1 des charakteristischen Polynoms. Wir schreiben die Faktoren des charakteristischen Polynoms blockweise sortiert.

Repräsentant	Zentralisator	Klassenlänge	charakteristisches Polynom
$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	S	1	$(X-1)\cdot(X-1)\cdot(X-1)$
$a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$	117	$(X+1)\cdot(X+1)\cdot(X-1)$
$a_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\langle a_8 \rangle$	702	$(X^2-X-1)\cdot(X+1)$
$b_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\langle b_8 \rangle$	702	$(X^2+X-1)\cdot(X+1)$
$a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \mid (a,b) \neq (0,0)\}$	702	$(X^2+1)\cdot(X-1)$
$a_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\langle a_6 \rangle$	936	$(X+1)^2\cdot(X-1)$
$a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\langle a_3, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$	104	$(X-1)^2\cdot(X-1)$
$b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\langle b_3, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$	624	$(X-1)^3$
$a_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\langle a_{13} \rangle$	432	X^3+X^2-1
$b_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\langle b_{13} \rangle$	432	X^3+X^2+X-1
$c_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\langle c_{13} \rangle$	432	X^3-X-1
$d_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\langle d_{13} \rangle$	432	X^3-X^2-X-1

Wir fixieren die Anordnung a_1, a_2, a_3, b_3, a_4, a_6, a_8, b_8, a_{13}, b_{13}, c_{13}, d_{13}, bezüglich derer wir Charakterwerte auflisten.

Die Elemente können anhand von Ordnungen und charakteristischen Polynomen unterschieden werden, ausgenommen a_3 und b_3. Hier kann man sich $\mathrm{rg}(a_3 - I) = 1$ und $\mathrm{rg}(b_3 - I) = 2$ zunutze machen.

Eine Betrachtung der Potenzen mit zur jeweilgen Ordnung primen Exponenten ergibt, daß die Spalten a_1, a_2, a_3, b_3, a_4 und a_6 rational sind, da diese Potenzen dort in der selben Klasse liegen. Die anderen Spalten sind nicht rational (nicht einmal reell, da das Inverse in jeweils einer anderen Klasse liegt).

c) Der Permutationscharakter auf $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_3}$ ist gegeben durch $[13, 5, 4, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0]$, und dieser zerfällt in $\chi_1 + \chi_2$ wie unten in der Tafel von S angegeben.

d) Es wird

$$\begin{array}{rcl}
\chi{\uparrow}_V^U(u) & = & \frac{1}{|V|}\sum\limits_{x\in U\;,u^x\in V}\chi(u^x) \\
& = & \frac{1}{|V|}\sum\limits_{v\in \mathrm{Cl}(V)}\chi(v)\cdot|\{x\in U\mid u^x=v\}|\cdot|v^V| \\
& = & \frac{1}{|V|}\sum\limits_{v\in \mathrm{Cl}(V)}\chi(v)\cdot|\{x\in U\mid v^x=u\}|\cdot|v^V| \\
& = & \frac{1}{|V|}\sum\limits_{v\in \mathrm{Cl}(V)\cap u^U}\chi(v)\cdot|C_U(v)|\cdot|v^V| \\
& = & \sum\limits_{v\in \mathrm{Cl}(V)\cap u^U}\chi(v)\cdot\dfrac{|C_U(v)|}{|C_V(v)|} \\
& (= & \dfrac{|U|}{|V||u^U|}\sum\limits_{v\in \mathrm{Cl}(V)\cap u^U}\chi(v)\cdot|v^V|\;,
\end{array}$$

wenn man möchte).

e) Repräsentanten für die Konjugationsklassen von K, $|K|=24$, sind gemäß Vorlesung

Repräsentant	Klassenlänge	Stabilisatorordnung
$u_1=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	1	24
$u_2=\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$	1	24
$u_3=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	4	6
$v_3=\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	4	6
$u_4=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$	6	4
$u_6=\left(\begin{smallmatrix}-1&-1\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$	4	6
$v_6=\left(\begin{smallmatrix}-1&1\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$	4	6

Die fixierte Anordnung sei u_1, u_2, u_3, v_3, u_4, u_6, v_6.

Wir haben einen surjektiven Gruppenmorphismus $H\xrightarrow{\varphi}K$, $\left(\begin{smallmatrix}a&b&c\\d&e&f\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)\longmapsto\left(\begin{smallmatrix}a&b\\d&e\end{smallmatrix}\right)$, mit einem abelschen Kern N der Ordnung 9. Jedes Element aus H kann eindeutig in der Form nk geschrieben werden, $n\in N$, $k\in K$. Die Multiplikation ist gegeben durch

$$(nk)(n'k')\;=\;(nn'^{k^{-1}})(kk')$$

(es liegt ein sogenanntes semidirektes Produkt vor). Konjugiert wird gemäß

$$(nk)^{\nu\kappa}\;=\;\left(\nu^{-1}\nu^{k^{-1}}n\right)^{\kappa}\cdot k^{\kappa}\;.$$

Folglich ist faserweise

$$(nk)^H\cap\varphi^{-1}(k)\;=\;\underbrace{\{\left(\nu^{-1}\nu^{k^{-1}}n\right)^{\kappa}\mid\nu\in N,\;\kappa\in C_K(k)\}}_{=:\,N_{k,n}\,\subseteq\,N}\cdot k\;.$$

Dies setzt sich zusammen zu

$$(nk)^H\;=\;\bigcup_{\kappa\in C_K(k)\backslash K}(N_{k,n})^{\kappa}\cdot k^{\kappa}\;,$$

so daß man insbesondere $|(nk)^H| = |N_{k,n}| \cdot |k^K|$ erhält. In der Praxis ist es günstig, für jedes $k \in \mathrm{Cl}(K)$ Repräsentanten für die disjunkte Zerlegung von N in Mengen der Form $N_{k,n}$ zu bestimmen.

Die Urbilder der Konjugationsklassen von K zerfallen also wie folgt in Konjugationsklassen von H.

Repräsentant in K	Urbild zerfällt in Klassen repräsentiert von, konjugiert in S zu, Länge der Klasse in H
u_1	$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \sim a_1$, $1 \cdot 1$; $\begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \sim a_3$, $8 \cdot 1$
u_2	$\begin{pmatrix} -1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \sim a_2$, $9 \cdot 1$
u_3	$\begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \sim a_3$, $3 \cdot 4$; $\begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&1\\0&0&1 \end{pmatrix} \sim a_6$, $6 \cdot 4$
v_3	$\begin{pmatrix} 1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \sim a_3$, $3 \cdot 4$; $\begin{pmatrix} 1&-1&0\\0&1&1\\0&0&1 \end{pmatrix} \sim b_3$, $6 \cdot 4$
u_4	$\begin{pmatrix} 0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \sim a_4$, $9 \cdot 6$
u_6	$\begin{pmatrix} -1&-1&0\\0&-1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \sim a_6$, $9 \cdot 4$
v_6	$\begin{pmatrix} -1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \sim a_6$, $9 \cdot 4$

f) Sei χ ein Charakter von K, sei $s \in S$ gegeben, und sei $\chi\!\uparrow_H^S(s)$ gefragt. Nach (d) haben wir in der Tabelle in (e) die Elemente von $\mathrm{Cl}(H)$ zu betrachten, die in S zu s konjugiert sind und die entsprechende Linearkombination der Charakterwerte auf K zu bilden.

Sei zum Beispiel $s = a_3$. Wir erhalten mit (d) und der Tabelle in (e)

$$\chi\!\uparrow_H^S(a_3) \;=\; \chi(u_1) \cdot \frac{54}{27} + \chi(u_3) \cdot \frac{54}{18} + \chi(v_3) \cdot \frac{54}{18} \;=\; 2\chi(u_1) + 3\chi(u_3) + 3\chi(v_3)\ .$$

Insgesamt erhalten wir so die gesuchte Formel

$$\chi\!\uparrow_H^S \;=\; [26\chi(u_1), 2\chi(u_2), 2\chi(u_1) + 3\chi(u_3) + 3\chi(v_3), \chi(u_3) + \chi(v_3), 2\chi(u_4), \chi(u_6) + \chi(v_6), 0, 0, 0, 0, 0, 0]\ .$$

g) Induktion von $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$ liefert $[26, 2, 8, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0] = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$, mit χ_3 wie in Tafel unten.

Induktion von $[1, 1, 1, \zeta_3, \zeta_3^2, \zeta_3, \zeta_3^2]$ liefert $[26, 2, -1, -1, 2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] = \chi_8$ wie in Tafel unten.

Induktion von $[2, -2, 0, -\zeta_3, -\zeta_3^2, \zeta_3\zeta_3^2]$ liefert $[52, -4, 7, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] = \chi_3 + \chi_{12}$, mit χ_{12} wie in Tafel unten.

Induktion von $[3, 3, -1, 0, 0, 0, 0]$ liefert $[78, 6, 6, 0, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] = \chi_2 + \chi_{12} + \chi_{11}$, mit χ_{11} wie in Tafel unten.

Induktion von $[2, -2, 0, -1, -1, 1, 1]$ liefert $[52, -4, -2, -2, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0] =: \psi$. Skalarprodukte zeigen, daß ψ in zwei verschiedene Irreduzible zerfällt, die nicht in $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_8, \chi_{11}, \chi_{12}\}$ enthalten sind.

h) Die Werte in der Spalte von a_8 sind a priori enthalten in $\mathbf{Q}(\zeta_8)$. Es ist $a_8^3 \sim a_8$, also sind die Werte fix unter $\zeta_8 \longmapsto \zeta_8^3$, i.e. sie liegen in $\mathbf{Q}(\zeta_8 + \zeta_8^3) = \mathbf{Q}(i\sqrt{2})$. Es ist $a_8^{-1} \sim b_8$, also bildet die Einschränkung von $\zeta_8 \longmapsto \zeta_8^{-1}$ auf $\mathbf{Q}(i\sqrt{2})$ (in anderen Worten, die komplexe Konjugation) die Spalte a_8 auf die Spalte b_8 ab, und genauso die Spalte b_8 auf a_8.

Die Werte in der Spalte von a_{13} sind a priori enthalten in $\mathbf{Q}(\zeta_{13})$. Es ist $a_{13}^3 \sim a_{13}$, also sind die Werte fix unter $\zeta_{13} \longmapsto \zeta_{13}^3$, i.e. sie liegen in $\mathbf{Q}(\vartheta)$ mit $\vartheta := \zeta_{13} + \zeta_{13}^3 + \zeta_{13}^9$. Es ist $a_{13}^6 \sim b_{13}$, $b_{13}^6 \sim c_{13}$, $c_{13}^6 \sim d_{13}$, $d_{13}^6 \sim a_{13}$. Auf $\mathbf{Q}(\vartheta)$ schränken $\zeta_{13} \longmapsto \zeta_{13}^6$ und $\zeta_{13} \overset{\sigma}{\longmapsto} \zeta_{13}^2$ gleich ein. Also bildet σ die Spalte a_{13} auf die Spalte b_{13} ab usf.

Die übrigen Spalten sind rational, also fix unter Galoiskonjugation. Damit haben wir eine Operation von $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_8, \zeta_{13})/\mathbf{Q}) = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_8)/\mathbf{Q}) \times \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{13})/\mathbf{Q})$ $(\simeq (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/13\mathbf{Z})^* \simeq C_2 \times C_2 \times C_{12})$ auf den Spalten der Tafel von S, mit den Bahnenlängen $1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4$.

G operiert auch auf den Zeilen, da Galoiskonjugierte irreduzibler Charaktere wieder irreduzible Charaktere sind. Die Voraussetzung aus Lemma (3.9) ist deswegen gegeben, weil die Operation durch eine Operation auf den *Einträgen* definiert ist. Also hat auch die Operation auf den Zeilen die Bahnenlängen $1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4$. Die Bahn der Länge 4 heiße $\{\chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_7\}$, die Bahn der Länge 2 heiße $\{\chi_9, \chi_{10}\}$. In der Zerlegung von ψ in Irreduzible kann kein Charakter aus der Bahn der Länge 4 vorkommen, da ansonsten der rationalwertige Charakter ψ nicht stabil unter Galoiskonjugation wäre – man wähle eine Konjugation, die den auftretenden Charakter aus $\{\chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_7\}$ auf einen nicht auftretenden Charakter hieraus schickt und verwende, daß irreduzible Charaktere linear unabhängig sind.

i) Der reguläre Charakter $[5616, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ ist nach Wedderburn die Summe aller irreduziblen Charaktere, jeweils multipliziert mit ihrem Grad. Die Grade von χ_9 und χ_{10} sind gleich $\psi(1)/2 = 26$. Damit erhalten wir

$$\chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_7 \;=\; [64, 0, -8, 4, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1]\,.$$

j) Auf den rationalen Spalten haben galoiskonjugierte Charaktere denselben Wert, nämlich den der Bahnsumme, geteilt durch die Bahnlänge. Siehe Tafel unten.

k) Aus der vertikalen Orthogonalität der Spalten a_6 und a_8 folgt $y + y' = 0$. Aus dem Skalarprodukt der Spalte a_8 mit sich selbst folgt $4|x|^2 + 2|y|^2 + 4 = 8$, und also $2|x|^2 + |y|^2 = 4$, da in $\mathbf{Q}(i\sqrt{2})$ konjugierte Elemente den selben Betrag haben. Da x und y ganzalgebraisch sind, liegen sie in $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ (Vorsicht, hierzu ist eine kleine Überlegung notwendig!).

Es ist $|\alpha i\sqrt{2} + \beta|^2 = 2\alpha^2 + \beta^2$ für $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$.

Fall $|x| = 1$ und $|y| = 0$. Dann ist $x = \pm 1$. Die Summe $(\chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_7)(a_8)$ von Konjugierten von x soll aber den Wert Null haben. Also geht dies nicht.

Fall $|x| = 0$ und $|y| = 2$. Hieraus folgt $y = \pm i\sqrt{2}$, und o.E. $y = +i\sqrt{2}$. Daraus folgen die Werte in den Spalten a_8 und b_8 wie in der Tafel unten.

Nun liefern $(\chi_9, \chi_9) = 1$ und $(\chi_{10}, \chi_{10}) = 1$ den Wert 0 von χ_9 und χ_{10} auf den Spalten a_{13}, b_{13}, c_{13} und d_{13}.

l) Wären zwei der angeführten Werte gleich, so wäre die kompletten Charaktere gleich. Dies widerspräche der horizontalen Orthogonalität.

m) Berechne (χ_4, χ_4) mit t wie angesetzt unter Zuhilfenahme von maple und dem Paket with(numtheory).

Sei G die angeführte Grammatrix. Sei $\alpha := \left(\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\right)$, sei $\beta := 2\alpha S$, also ein ganzzahliger Vektor mit Koeffizientensumme teilbar durch 4. Mit $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 13 & & \\ & & 13 & \\ & & & 13 \end{pmatrix}$ ist $10 = \alpha S D S^{\mathrm{t}} \alpha^{\mathrm{t}}$, also

$$40 \;=\; \beta_0^2 + 13\beta_1^2 + 13\beta_2^2 + 13\beta_3^2\ .$$

Zunächst liegen die β_i mit $i \in \{1,2,3\}$ notwendigerweise in $\{-1,0,1\}$. Da β_0^2 ein ganzzahliges Quadrat ist, liegen sie sogar in $\{-1,1\}$, so daß auch $\beta_0 = \pm 1$. Mit der Kongruenz modulo 4 bleiben also 8 Möglichkeiten für den Vektor β.

Multiplikation mit S ist bijektiv. Diese 8 Möglichkeiten werden also bereits durch

$$\alpha \;\in\; \left\{\left(\pm1\,0\,0\,0\right), \left(0\,\pm1\,0\,0\right), \left(0\,0\,\pm1\,0\right), \left(0\,0\,0\,\pm1\right)\right\}$$

ausgeschöpft. O.E. dürfen wir damit $t \;=\; \pm\vartheta$ annehmen. Es ist $\mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}(\vartheta)/\mathbf{Q}}(\vartheta) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}(\zeta_{13})/\mathbf{Q}}(\zeta_{13}) = -1$, also folgt entweder mit horizontaler Orthogonalität von χ_4 und χ_1, oder aber mit der oben angeführten Summe $\chi_4+\chi_5+\chi_6+\chi_7$ (gemäß (l)), daß $t = +\vartheta$.

Mit (l) vervollständigt man nun die Tafel von S wie folgt.

Repräsentant	a_1	a_2	a_3	b_3	a_4	a_6	a_8	b_8	a_{13}	b_{13}	c_{13}	d_{13}
Länge	1	117	104	624	702	936	702	702	432	432	432	432
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	12	4	3	0	0	1	0	0	-1	-1	-1	-1
χ_3	13	-3	4	1	1	0	-1	-1	0	0	0	0
χ_4	16	0	-2	1	0	0	0	0	ϑ^{σ^0}	ϑ^{σ^1}	ϑ^{σ^2}	ϑ^{σ^3}
χ_5	16	0	-2	1	0	0	0	0	ϑ^{σ^1}	ϑ^{σ^2}	ϑ^{σ^3}	ϑ^{σ^0}
χ_6	16	0	-2	1	0	0	0	0	ϑ^{σ^2}	ϑ^{σ^3}	ϑ^{σ^0}	ϑ^{σ^1}
χ_7	16	0	-2	1	0	0	0	0	ϑ^{σ^3}	ϑ^{σ^0}	ϑ^{σ^1}	ϑ^{σ^2}
χ_8	26	2	-1	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0
χ_9	26	-2	-1	-1	0	1	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$	0	0	0	0
χ_{10}	26	-2	-1	-1	0	1	$-i\sqrt{2}$	$i\sqrt{2}$	0	0	0	0
χ_{11}	27	3	0	0	-1	0	-1	-1	1	1	1	1
χ_{12}	39	-1	3	0	-1	-1	1	1	0	0	0	0