Übungen Darstellungstheorie Sommersemester 02

Lösung 9

Aufgabe 21.

a)

i) Es ist $p_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_3x_4) = s_1^2 - 2s_2$. Also ist $p_2^2 = s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 4s_2^2$.

ii) Es ist $h_{4,3} = x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + \cdots + x_4^3x_3$. Nach dem Algorithmus aus der Vorlesung ist $x_1^3x_2$ das größte Monom, wir haben also $s_1^2s_2$ zu subtrahieren. Dies liefert als Differenz

$$-2(x_1^2x_2^2 + \cdots) - 5(x_1^2x_2x_3 + \cdots) - 12x_1x_2x_3x_4 \ .$$

Nach Algorithmus ist nun $2s_2^2$ zu addieren. Es ergibt sich als Summe

$$-(x_1^2x_2x_3 + \cdots) \ .$$

Addiert man dementsprechend s_1s_3, so bleibt

$$4x_1x_2x_3x_4 \ = \ 4s_4 \ .$$

Insgesamt ist

$$h_{3,1} \ = \ s_1^2s_2 - 2s_2^2 - s_1s_3 + 4s_4 \ .$$

iii) Genauso wird

$$p_3 \ = \ s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 \ ,$$

und, iv),

$$p_4 \ = \ s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 2s_2^2 + 4s_1s_3 - 4s_4 \ .$$

Vgl. (d).

b)

i) Es ist

$$\begin{aligned} p_1s_{m-1} &= (x_1 + \cdots)(x_1 \cdots x_{m-1} + \cdots) \\ &= m(x_1 \cdots x_m + \cdots) + (x_1^2x_2 \cdots x_{m-1} + \cdots) \\ &= ms_m + h_{m,2} \ . \end{aligned}$$

Ferner ist für $i \in [2, m-1]$

$$\begin{aligned} p_is_{m-i} &= (x_1^i + \cdots)(x_1 \cdots x_{m-i} + \cdots) \\ &= m(x_1^ix_2 \cdots x_{m-i+1} + \cdots) + (x_1^{i+1}x_2 \cdots x_{m-i} + \cdots) \\ &= h_{m,i} + h_{m,i+1} \ . \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} p_{m-1}s_1 &= (x_1^{m-1} + \cdots)(x_1 + \cdots) \\ &= m(x_1^{m-1}x_2 + \cdots) + (x_1^m + \cdots) \\ &= h_{m,m-1} + p_m \ . \end{aligned}$$

c) Mit (b) wird

$$\begin{aligned}
& (-1)^{m+1} m s_m + \textstyle\sum_{i\in[1,m-1]} (-1)^{i+1} p_{m-i} s_i \\
= \; & (-1)^{m+1} m s_m + (h_{m,m-1} + p_m) \\
& + \textstyle\sum_{i\in[2,m-2]} (-1)^{i+1} (h_{m,m-i} + h_{m,m-i+1}) \\
& + (-1)^m (m s_m + h_{m,2}) \\
= \; & (-1)^{m+1} m s_m + (h_{m,m-1} + p_m) \\
& + \textstyle\sum_{i\in[2,m-2]} (-1)^{i+1} h_{m,m-i} \\
& + \textstyle\sum_{i\in[1,m-3]} (-1)^{i} h_{m,m-i} \\
& + (-1)^m (m s_m + h_{m,2}) \\
= \; & (-1)^{m+1} m s_m + (h_{m,m-1} + p_m) + ((-1)^{m+1} h_{m,2}) + (-h_{m,m-1}) + (-1)^m (m s_m + h_{m,2}) \\
= \; & p_m \; .
\end{aligned}$$

d) Die Formel ist richtig für $m = 1$. Mit dem einzigen Summanden $\lambda = (1)$ ist in der Tat $p_1 = 1 \cdot (-1)^{1+1} \frac{(1-1)!}{1!} \cdot s_{(1)} = s_1$.

Sei die Formel gezeigt für $m' < m$. Wir erhalten mit (c)

$$\begin{aligned}
& p_m \\
= \; & (-1)^{m+1} m s_m + \textstyle\sum_{i\in[1,m-1]} (-1)^{i+1} p_{m-i} s_i \\
= \; & (-1)^{m+1} m s_m + \textstyle\sum_{i\in[1,m-1]} (-1)^{i+1} \left((m-i) \sum_{\mu \vdash m-i} (-1)^{m-i+h(\mu)} \frac{(h(\mu)-1)!}{\prod_{j\geq 1} (\mu'_i - \mu'_{i+1})!} s_\mu \right) s_i \; .
\end{aligned}$$

Für $\lambda = (m)$ ist der Koeffizient von s_λ hierin in der Tat gleich $(-1)^{m+1} m$.

Für $\lambda \vdash m$ mit $h(\lambda) \geq 2$ ergibt sich der Koeffizient von s_λ hierin als

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{i\in[1,m-1]} (-1)^{i+1} (m-i) (-1)^{m-i+(h(\lambda)-1)} \frac{(h(\lambda)-2)!}{\prod_{j\geq 1} (\lambda'_j - \lambda'_{j+1})!} (\lambda'_i - \lambda'_{i+1}) \\
= \; & (-1)^{m+h(\lambda)} \frac{(h(\lambda)-2)!}{\prod_{j\geq 1} (\lambda'_j - \lambda'_{j+1})!} \textstyle\sum_{i\in[1,m-1]} (m-i)(\lambda'_i - \lambda'_{i+1}) \\
= \; & (-1)^{m+h(\lambda)} \frac{(h(\lambda)-2)!}{\prod_{j\geq 1} (\lambda'_j - \lambda'_{j+1})!} (m h(\lambda) - m) \\
= \; & m \cdot (-1)^{m+h(\lambda)} \frac{(h(\lambda)-1)!}{\prod_{j\geq 1} (\lambda'_j - \lambda'_{j+1})!} \; ,
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen.

e) Sei X eine zu χ gehörende Darstellung von $\mathbf{C}G$, von Dimension n. Seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ die Eigenwerte der Operation von g auf X.

Beachte, daß die Formel von (d) für $n < m$ richtig bleibt in dem Sinne, daß $s_i = 0$ zu setzen ist für $i > n$ – verwende die Formel für $n = m$ und setze $x_i = 0$ für $i \in [n+1, m]$.

Es ist nun

$$\chi(g^m) \; = \; p_m(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

und

$$\chi^{[1^l]}(g) \; = \; s_l(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \; .$$

In der Tat ist $\varepsilon^{[1^l]} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sigma\varepsilon_\sigma \in \mathbf{C}\mathcal{S}_n$ das zum alternierenden Modul $S_{\mathbf{C}}^{(1^n)}$ gehörende zentralprimitive Idempotent. Man schreibt auch

$$(x_{i_1}\otimes x_{i_2}\otimes\cdots\otimes x_{i_l})\varepsilon^{[1^l]} \;=:\; x_{i_1}\wedge x_{i_2}\wedge\cdots\wedge x_{i_l}$$

für $x_j \in X$, und zuweilen auch $\Lambda^l\chi := \chi^{[1^l]}$.

Also ist eine Basis von $X^{\otimes l}$ gegeben durch $\{e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_l} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_l\}$ wenn $\{e_1,\ldots,e_n\}$ eine Basis von X ist, und es gilt

$$e_{i_{1\sigma}}\wedge e_{i_{2\sigma}}\wedge\cdots\wedge e_{i_{l\sigma}} \;=\; e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_l}\varepsilon_\sigma\;,$$

d.h. eine Permutation σ der Faktoren ist unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens ε_σ möglich.

Wählt man eine Diagonalbasis für die Operation von g, so wird $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_l}$ unter g auf $\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\cdots\zeta_{i_l}\cdot e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_l}$ geschickt. Daraus die Formel für $\chi^{[1^l]}$.

Mit (c) sieht man per Induktion über m, daß $\chi(g^m)$ ein ganzzahliges Polynom in den $\chi^{[1^l]}(g)$ ist. Mit (d) erhält man die Formel

$$\chi(g^m) \;=\; m\cdot\sum_{\lambda\vdash m}(-1)^{m+h(\lambda)}\frac{(h(\lambda)-1)!}{\prod_{i\geq 1}(\lambda_i'-\lambda_{i+1}')!}\cdot\prod_{j\in[1,h(\lambda)]}\chi^{[1^{\lambda_j}]}(g)\;.$$

Aufgabe 22.

a) Nach dem Satz von Molien ist

$$\Phi_G(z) \;=\; \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\det(I-z(g\rho))^{-1}$$

zu berechnen. Wir lassen die Summe über die von 1, $i^2 = j^2$ i, j und ij indizierten Konjugiertenklassen der Längen 1, 1, 2, 2, 2 laufen und fügen jeweils die Multiplizität an. Es wird

$$\begin{aligned}\Phi_{Q_8}(z) &= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{(1-z)^2}+\tfrac{1}{(1+z)^2}+\tfrac{2}{1+z^2}+\tfrac{2}{1+z^2}+\tfrac{2}{1+z^2}\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1+z^2}{(1-z^2)^2}+\tfrac{3}{1+z^2}\right)\\ &= \tfrac{z^4-z^2+1}{(z^4-1)(z^2-1)}\;.\\ &= \tfrac{z^6+1}{(1-z^4)^2}\;.\end{aligned}$$

b) Es sind 2 algebraisch unabhängige Primärinvarianten zu finden (da ρ von Grad 2). Hierbei ist $f(X,Y)$ invariant, falls

$$\begin{aligned}f(X,Y) &= f(iX,-iY)\\ f(X,Y) &= f(-Y,X)\;.\end{aligned}$$

Primärinvarianten sind etwa $\vartheta_1 = X^2Y^2$ und $\vartheta_2 = X^4+Y^4$, da diese algebraisch unabhängig sind (betrachte z.B. den Koeffizienten bei den Monomen der Form X^{4i} in einem

polynomialen Ausdruck $g(\vartheta_1, \vartheta_2)$, der zeigt, daß bei einem Verschwinden g in ϑ_2 konstant zu sein hat). Bezüglich dieser Primärinvarianten haben wir nun zwei Sekundärinvarianten zu finden, von Grad 0 und von Grad 6.

Den Reynoldsoperator auf ein Monom X^aY^b angewandt, ergibt Null für $a+b$ ungerade. Ist $a+b$ gerade, aber kein Vielfaches von 4, so ergibt sich Null, falls b gerade ist, und $(X^aY^b - X^bY^a)/2$, falls b ungerade ist. Ist $a+b$ Vielfaches von 4, so ergibt sich Null, falls b ungerade ist, und $(X^aY^b + X^bY^a)/2$, falls b gerade ist.

Damit erhalten wir das folgende $\mathbf{C}$-lineare Erzeugendensystem des Invariantenrings.

$$\{X^{2\alpha}Y^{2\beta} + X^{2\beta}Y^{2\alpha},\ X^{2\alpha+1}Y^{2\beta+1} - X^{2\beta+1}Y^{2\alpha+1} \mid \alpha+\beta \text{ gerade},\ \alpha,\beta \geq 0\}\ .$$

Es erzeugen nun $\eta_1 = 1$ und $\eta_2 = X^5Y - XY^5$ den Invariantenring als freie Modulerzeuger über $\mathbf{C}[\vartheta_1, \vartheta_2]$, da dies bis auf Skalar die einzigen Invarianten in den Graden 0 und 6 sind. In anderen Worten, es sind die gesuchten sekundären Invarianten.

c) Wäre $(Q_8)\rho$ eine Spiegelungsgruppe, so wäre $\Phi_{Q_8}(z)^{-1}$ von der Form $\prod_{j\in[1,k]}(1-z^{d_j})$, Da der Nenner $z^4 - z^2 + 1 = (z-\zeta_{12})(z-\zeta_{12}^5)(z-\zeta_{12}^7)(z-\zeta_{12}^{11})$ von $\Phi_{Q_8}(z)$ nicht im seinem Zähler $(z^4-1)(z^2-1) = (z-1)^2(z+1)^2(z-i)(z+i)$ aufgeht, ist dies nicht der Fall. Somit ist $(Q_8)\rho$ keine Spiegelungsgruppe.

Aufgabe 23.

a) $W{\uparrow}_H^G$ ist einfach genau dann, wenn $(\chi{\uparrow}_H^G, \chi{\uparrow}_H^G) = 1$ ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned}(\chi{\uparrow}_H^G, \chi{\uparrow}_H^G) &\overset{\text{Frobenius}}{=} (\chi, \chi{\uparrow}_H^G{\downarrow}_H^G)\\ &\overset{\text{Mackey}}{=} \textstyle\sum_{s\in H\backslash G/H}(\chi, \chi|_s{\uparrow}_{H\cap H^s}^H)\\ &\overset{\text{Frobenius}}{=} \textstyle\sum_{s\in H\backslash G/H}(\chi|_{H\cap H^s}, \chi|_s)\ .\end{aligned}$$

Da für $s=1$ sich $(\chi|_{H\cap H^1}, \chi|_1) = (\chi,\chi) = 1$ ergibt, ist diese Summe genau dann 1, wenn die anderen darin auftretenden Skalarprodukte verschwinden.

b) Zunächst ist $G = H \cup HsH$ mit $s = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ eine disjunkte Zerlegung in Doppelnebenklassen. Es ist $H \cap H^s$ die Untergruppe der Diagonalmatrizen. Es wird $\chi_\omega(\left(\begin{smallmatrix}a&\\&d\end{smallmatrix}\right)) = \omega(a)$, wohingegen $\chi_\omega|_s(\left(\begin{smallmatrix}a&\\&d\end{smallmatrix}\right)) = \omega(d)$. Dies sind zwei nicht isomorphe eindimensionale Darstellungen von $H \cap H^s$, es sei denn, es ist $\omega = 1$.

Also ist genau für $\omega \neq 1$ der Charakter $\chi_\omega{\uparrow}_H^G$ von G, von Grad $p+1 = [G:H]$, ein irreduzibler Charakter von G.