

Blatt 1

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei R ein Ring. Sei M ein endlich erzeugter R -Modul.

Zeige, daß aus $J(R)M = M$ bereits $M = 0$ folgt (Lemma von Nakayama).

(Hinweis: Benson, Representations and Cohomology I, Lemmata 1.2.2, 1.2.3.)

Aufgabe 2 (2+1 Punkte).

Sei R ein lokaler kommutativer Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} . Sei A eine R -Algebra (d.h. ein Ring A zusammen mit einem Ringmorphismus $R \rightarrow Z(A)$). Wir unterscheiden in der Notation nicht zwischen Elementen von R und deren Bildern in A . Sei zudem A als R -Modul endlich erzeugt.

(1) Sei $m \in \mathfrak{m}$. Zeige, daß $m \in J(A)$.

(Hinweis: Sei I ein maximales Rechtsideal in A . Wende Aufgabe 1 auf A/I an.)

(2) Zeige, daß $J(A/\mathfrak{m}A) = J(A)/\mathfrak{m}A$.

Aufgabe 3 (2 Punkte).

Sei A ein artinscher Ring.

(1) Zeige, daß $J(A)$ das eindeutig bestimmte maximale Nilideal in A ist.

(2) Seien S_1, \dots, S_n einfache A -Moduln. Sei $I := \bigcap_{i \in [1, n]} \text{Ann}_A S_i$ ein Nilideal. Zeige, daß $I = J(A)$.

Aufgabe 4 (2+2+4+2 Punkte).

Die Komposition von Elementen in symmetrischen Gruppen werde rechts geschrieben. So sei z.B. $(1, 2)(2, 3) = (1, 3, 2)$.

(1) Gib einen Isomorphismus an von $\mathbf{Z}\mathcal{S}_2$ zum Teilring $\{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : a \equiv_2 b\}$ von $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

(2) Verwende (1) für eine Beschreibung von $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_2$ als Teilring von $\mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}$ und für eine Beschreibung von $\mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_2$ als Teilring von $\mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}$.

(3) Gib einen Isomorphismus an von $\mathbf{Z}\mathcal{S}_3$ zum Teilring

$$\left\{ (a, \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix}, f) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^{2 \times 2} \times \mathbf{Z} : a \equiv_2 f, d \equiv_3 0, a \equiv_3 b, e \equiv_3 f \right\}$$

von $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^{2 \times 2} \times \mathbf{Z}$. (Hinweis: $(1, 2) \mapsto \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $(2, 3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, \mathcal{S}_3 in Erzeugern und Relationen.)

(4) Verwende (3) für eine Beschreibung von $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_3$ als Teilring von $\mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}^{2 \times 2} \times \mathbf{Z}_{(2)}$ und für eine Beschreibung von $\mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3$ als Teilring von $\mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2 \times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)}$.

Aufgabe 5 (18 Punkte). Berechne $J(A)$ und $J(A)^2$. Ist A lokal?

(1) $A = \mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_2$

(2) $A = \mathbf{F}_2\mathcal{S}_2$.

(3) $A = \mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_3$

(4) $A = \mathbf{F}_2\mathcal{S}_3$.

(5) $A = \mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3$

(6) $A = \mathbf{F}_3\mathcal{S}_3$.