

**Blatt 15**

Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Sei  $F$  ein Körper mit  $\text{char } F = p > 0$ , welcher Zerfällungskörper für  $G$  ist.

**Aufgabe 53 (6 Punkte).**

Sei  $B$  ein Block von  $FG$ . Sei vorausgesetzt, daß alle unzerlegbar projektiven  $B$ -Moduln uniserial (d.h. einreihig) sind.

Zeige, daß jeder (endlich erzeugte) unzerlegbare  $B$ -Modul  $V$  uniserial ist.

(Hinweis: Sei  $0 \neq W \subseteq V$  uniserial von maximaler Dimension. Sei  $X \subseteq W$  maximal mit  $X \cap W = 0$ . Daher ist  $\text{soc}(V/X)$  einfach. Als Teilmodul eines unzerlegbar Projektiven ist  $V/X$  uniserial. Sei  $P$  die projektive Decke von  $\text{head}(V/X)$ . Sei  $(P \xrightarrow{g} V \rightarrow V/X) = (P \xrightarrow{f} V/X)$ . Es ist  $Pg \subseteq V$  uniserial. Beachte  $Pg \rightarrow V/X$  epimorph und  $W \rightarrow V/X$  monomorph. Maximalität von  $\dim_F W$  zeigt, daß Isomorphismen vorliegen. Also  $V = Pg \oplus X$ .)

**Aufgabe 54 (2+2+4 Punkte).**

Sei  $B$  ein Block von  $FG$ . Sei vorausgesetzt, daß  $B$  eine Brauerbaumalgebra ist, wobei der Brauerbaum ein Stern mit  $e$  Kanten und Multiplizität  $m$  der mittleren Ecke sei. Schreibe  $q := em + 1$ . Aussagen über Eindeutigkeit von Moduln seien stets bis auf Isomorphie zu verstehen. Die Länge  $\ell(X)$  eines  $B$ -Moduls  $X$  bedeute die Länge einer Kompositionsreihe von  $X$ .

Durchlaufe  $V_0, \dots, V_{e-1}$  die einfachen Moduln entsprechend den Kanten im positiven Umlaufsinn. Sei noch  $V_i = V_{i+e}$  für alle  $i \in \mathbf{Z}$  gesetzt.

- (1) Zeige, daß es zu jedem  $i \in [0, e-1]$  und jedem  $s \in [1, q]$  genau einen unzerlegbaren Modul  $V_{i,s}$  der Länge  $s$  mit Kopf  $V_i$  gibt. Zeige, daß jeder unzerlegbare Modul von dieser Form ist. (Hinweis: Aufgabe 53.)
- (2) Sei  $X \xrightarrow{f} Y$  ein Epimorphismus von  $B$ -Moduln. Sei  $Y' \subseteq Y$  ein Teilmodul. Sei  $X' := f^{-1}(Y')$ . Zeige die Existenz einer kurz exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \oplus Y' \longrightarrow Y \longrightarrow 0.$$

(Hinweis: Hierfür wird nur benötigt, daß  $B$  ein Ring ist.)

- (3) Seien  $U$  und  $V$  zwei nichtverschwindende  $B$ -Moduln mit  $\ell(U) + \ell(V) \leq q$ . Zeige, daß die Restklassenabbildung  $\text{Hom}_B(U, V) \longrightarrow \overline{\text{Hom}}_B(U, V)$  ein Isomorphismus ist. (Hinweis: O.E.  $U$  und  $V$  unzerlegbar. Füge Bild von  $f$  ein. Wende (2) auf projektive Decke von  $V$  an.)