

## Blatt 9

### Aufgabe 29 (6 Punkte).

Sei  $F$  ein Körper mit  $\text{char } F = p > 0$ . Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Sei  $D = \langle d \rangle \leq G$  eine zyklische Untergruppe von Ordnung  $p^r$  für ein  $r \geq 0$ .

Wir erinnern an  $FD \xrightarrow{\sim} F[X]/(X^{p^r})$ ,  $d \mapsto X + 1$ , und an den unzerlegbaren  $FD$ -Modul  $U_k := F[X]/(X^k)$ , wobei  $k \in [1, p^r]$ . Jeder unzerlegbare  $FD$ -Modul ist isomorph zu einem dieser Moduln.

- (1) Sei  $c := d^{p^s}$  für ein  $s \in [0, r]$ . Sei  $C := \langle c \rangle \leq D \leq G$ . Via  $FC \xrightarrow{\sim} F[Y]/(Y^{p^{r-s}})$ ,  $c \mapsto X + 1$  können wir den  $FC$ -Modul  $U'_\ell := F[Y]/(Y^\ell)$  definieren, wobei  $\ell \in [1, p^{r-s}]$ . Zerlege  $U_k|_C$  in eine direkte Summe von Moduln isomorph zu  $U'_\ell$  für gewisse  $\ell \in [1, p^{r-s}]$ , wobei  $k \in [1, p^r]$ .
- (2) Schätze die Zahl der Summanden in einer Zerlegung von  $U_k \uparrow^G|_D$  in eine direkte Summe unzerlegbarer Summanden nach oben ab. (Hinweis: Mackey.)
- (3) Zeige, daß  $U_k \uparrow^G$  in eine direkte Summe von höchstensfalls  $[G : D]$  unzerlegbaren Summanden zerfällt.

### Aufgabe 30 (6 Punkte).

Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Sei  $(K, R, F)$  ein  $p$ -modulares System. Sei  $P \leq N_G(P) \leq H \leq G$ , wobei  $P$  eine  $p$ -Gruppe sei. Seien  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  und  $\mathcal{A}$  wie in Vorlesung.

Sei  $f = f(G, H, P) : \text{Ind}(RG, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Ind}(RH, \mathcal{A})$  die Greenkorrespondenz.

- (1) Seien  $V \in \text{Ind}(RG, \mathcal{A})$  und  $W \in \text{Ind}(RH, \mathcal{A})$ . Zeige, daß

$$W \mid V|_H \iff W \simeq f(V) \iff V \mid W \uparrow^G$$

D.h. füge die Details zum Beweis von Satz 13.5.(ii) ein, unter Verwendung von 13.5.(i).

- (2) Sei  $E := (0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0)$  eine kurz exakte Sequenz von  $RH$ -Moduln. Zeige, daß  $E$  genau dann nicht zerfällt, wenn  $E \uparrow^G$  nicht zerfällt.
- (3) Sei  $M$  ein  $RP$ -Modul. Sei  $g \in G$ . Es ist  $M^g$  ein  $RP^g$ -Modul. Zeige, daß  $M \uparrow^G \simeq M^g \uparrow^G$ . Somit ist jede  $G$ -konjugierte Untergruppe zu einem Vertex eines Unzerlegbaren wieder ein Vertex.

### Aufgabe 31 (2+4 Punkte).

Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Sei  $F$  ein Körper mit  $\text{char } F = p > 0$ . Sei  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Sei  $H := N_G(P)$ . Sei  $P \cap P^g = 1$  für alle  $g \in G \setminus H$  (trivial intersection).

- (1) Zeige, daß  $P^g \cap H = 1$  für alle  $g \in G \setminus H$ . (In der Notation der Vorlesung: zeige  $\mathcal{Y} = \{1\}$ .)
- (2) Seien  $V_1$  und  $V_2$  unzerlegbare nichtprojektive  $FG$ -Moduln. Seien  $U_1$  und  $U_2$  ihre Greenkorrespondenten; dies sind insbesondere unzerlegbare nichtprojektive  $FH$ -Moduln. Es gebe eine nichtzerfallende kurz exakte Sequenz  $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V \rightarrow V_2 \rightarrow 0$ . Zeige, daß es eine nichtzerfallende kurz exakte Sequenz  $0 \rightarrow U_1 \rightarrow U \rightarrow U_2 \rightarrow 0$  gibt.

### Aufgabe 32 (4+2+2+2 Punkte).

Sei  $(K, R, F)$  ein  $p$ -modulares System, wobei  $p \geq 3$ . Sei  $G = \text{SL}_2(\mathbf{F}_p) = \text{SL}_2(p)$ . Sei  $\zeta_{p(p^2-1)} \in R$ . Bezeichnen  $V_i$  für  $i \in [1, p]$  die in Abschnitt 13.1 konstruierten  $FG$ -Moduln. (Hinweis: Alperin, S. 76.)

- (1) Bestimme die Anzahl der Konjugationsklassen und der  $p'$ -Konjugationsklassen in  $G$ .
- (2) Zeige, daß es für  $i \in [1, p-2]$  eine nichtzerfallende kurz exakte Sequenz mit Kern  $V_{p-i-1}$  und Cokern  $V_i$  gibt.
- (3) Zeige, daß es für  $i \in [2, p-1]$  eine nichtzerfallende kurz exakte Sequenz mit Kern  $V_{p-i+1}$  und Cokern  $V_i$  gibt.
- (4) Sei  $p = 5$ . Bestimme die  $p$ -modulare Charaktertafel von  $G$ . Bestimme die Zerlegungsmatrix so weit, wie dies aus  $\mathbf{D}^t \mathbf{D} = \mathbf{C}$  möglich ist.