G. Nebe, M. Künzer

Darstellungstheorie II, WS 06/07

Lösung 1

Aufgabe 1.

Wir folgen Benson.

Lemma. Ist $r \in \mathrm{J}(R)$, so gibt es ein $s \in R$ mit $(1-r)s = 1$.

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß $(1-r)R = R$. Wäre $(1-r)R \subsetneq R$, so wäre (dank Zorns Lemma) $(1-r)R$ in einem maximalen Rechtsideal I enthalten. Da aber auch $\mathrm{J}(R) \subseteq I$, folgte $1 = (1-r) + r \in I$, was absurd ist. □

Alternativ ist das Lemma auch ein Spezialfall der Aussage aus der Vorlesung, daß aus $r \in \mathrm{J}(R)$ folgt, daß $1 - r \in R^*$.

Zeigen wir nun die Aussage. Sei $(m_1, \ldots, m_n)$ ein erzeugendes Tupel von M über R minimaler Länge n. Wir haben $n = 0$ zu zeigen, denn dies ist gleichbedeutend mit $M = 0$. Sei $n \geq 1$ angenommen. Da $\mathrm{J}(R)M = M$, können wir $m_n = \sum_{i\in[1,n]} m_i r_i$ mit $r_i \in \mathrm{J}(R)$ schreiben. Das Lemma gibt uns ein $s \in R$ mit $(1 - r_n)s = 1$. Es folgt

$$m_n \;=\; \sum_{i\in[1,n-1]} m_i r_i s \;,$$

und folglich ist auch $(m_1, \ldots, m_{n-1})$ ein erzeugendes Tupel von M über R, im Widerspruch zur Minimalität von n.

Aufgabe 2.

(1) Sei $m \in \mathfrak{m} = \mathrm{J}(R)$. Sei I ein maximales Rechtsideal in A. Wir haben zu zeigen, daß $m \in I$. Es genügt zu zeigen, daß $m(A/I) = 0$. Nun ist $m(A/I)$ ein A-Teilmodul von A/I, und es ist A/I ein einfacher A/I-Modul. Bleiben also nur die beiden Möglichkeiten $m(A/I) = 0$ oder $m(A/I) = A/I$. Letzteres implizierte aber $\mathrm{J}(R)(A/I) = A/I$, und, da A und somit auch A/I endlich erzeugt über R ist, mit Aufgabe 1 also $A/I = 0$, was absurd wäre.

(2) Mit (1) wird $\mathrm{J}(A/\mathfrak{m}A) = \big(\mathrm{J}(A) + \mathfrak{m}A\big)/\mathfrak{m}A = \mathrm{J}(A)/\mathfrak{m}A$.

Aufgabe 3.

(1) Nach Vorlesung ist $\mathrm{J}(A)$ ein Nilideal. Ferner enthält $\mathrm{J}(A)$ nach Vorlesung jedes nilpotente Rechtsideal. Ist also ein Nilideal $N \subseteq A$ gegeben, so ist dies insbesondere ein nilpotentes Rechtsideal und also insbesondere in $\mathrm{J}(A)$ enthalten.

(2) Nach Definition als Schnitt über alle Annihilatoren einfacher Linksmoduln ist $\mathrm{J}(A) \subseteq I$. Da I ein Nilideal ist, ist nach (1) auch $\mathrm{J}(A) \supseteq I$. Also ist $\mathrm{J}(A) = I$.

Aufgabe 4.

(1) Wir haben einen Ringmorphismus

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}\mathcal{S}_2 & \xrightarrow{\omega} & \mathbf{Z} & \times & \mathbf{Z} \\ (1,2) & \longmapsto & (1 & , & -1) \end{array}$$

Dieser hat die $\mathbf{Z}$-lineare beschreibende Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ bezüglich der Gruppenbasis $\big(1, (1,2)\big)$ von $\mathbf{Z}\mathcal{S}_2$ und der Standardbasis $\big((1,0),\,(0,1)\big)$ von $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Da $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ ist, ist ω injektiv.

Es ist $\mathrm{Bild}(\omega) \subseteq \{(a,b) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \;:\; a \equiv_2 b\} =: \Lambda \subseteq \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

Da die Determinante der beschreibenden Matrix von ω gleich 2 ist, ist der Index von $\mathrm{Bild}(\omega)$ in $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ gleich 2. Da auch der Index von Λ in $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ gleich 2 ist, folgt, daß der Index von $\mathrm{Bild}(\omega)$ in Λ gleich 1 ist, d.h., daß $\mathrm{Bild}(\omega) = \Lambda$. In anderen Worten, wir haben einen Isomorphismus $\mathbf{Z}\mathcal{S}_2 \xrightarrow[\sim]{\omega} \Lambda$ (unter Mißbrauch der Bezeichnung ω).

(2) – Wir haben einen injektiven Ringmorphismus

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_2 & \xrightarrow{\omega_{(2)}} & \mathbf{Z}_{(2)} & \times & \mathbf{Z}_{(2)} \\ (1,2) & \longmapsto & (1 & , & -1) \end{array}$$

Dieser hat die $\mathbf{Z}_{(2)}$-lineare beschreibende Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ bezüglich der Gruppenbasis $\big(1, (1,2)\big)$ von $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_2$ und der Standardbasis $\big((1,0),\ (0,1)\big)$ von $\mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}$.

Es ist $\operatorname{Bild}(\omega_{(2)}) \subseteq \{(a,b) \in \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)} \ : \ a \equiv_2 b\} =: \Lambda_{(2)} \subseteq \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}$.

Da die Determinante der beschreibenden Matrix von $\omega_{(2)}$ gleich 2 ist, ist der Index von $\operatorname{Bild}(\omega_{(2)})$ in $\mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}$ gleich 2. Es folgt, daß $\operatorname{Bild}(\omega_{(2)}) = \Lambda_{(2)}$.

– Analog haben wir einen injektiven Ringmorphismus $\omega_{(3)}$. Es ist $\operatorname{Bild}(\omega_{(3)}) \subseteq \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}$. Da die Determinante der beschreibenden Matrix von $\omega_{(3)}$ gleich 2 ist, ist der Index von $\operatorname{Bild}(\omega_{(3)})$ in $\mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}$ gleich 1. Also ist $\operatorname{Bild}(\omega_{(3)}) = \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}$.

(3) Wir haben einen Ringisomorphismus

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{Z}\mathcal{S}_2 & \xrightarrow{\omega} & \mathbf{Z} & \times & \mathbf{Z}^{2\times 2} & \times & \mathbf{Z} \\ (1,2) & \longmapsto & (1 & , & \left(\begin{smallmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) & , & -1) \\ (2,3) & \longmapsto & (1 & , & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{smallmatrix}\right) & , & -1)\ , \end{array}$$

wie aus der Präsentation von $\mathcal{S}_3$ in Erzeugern und Relationen

$$\begin{array}{rcl} \langle s_1,\ s_2 \ : \ s_1^2,\ s_2^2,\ (s_1 s_2)^3 \rangle & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{S}_3 \\ s_1 & \longmapsto & (1,2) \\ s_2 & \longmapsto & (2,3) \end{array}$$

abgeleitet werden kann. Denn die angegebenen Bilder von $(1,2)$ und $(2,3)$ erfüllen diese Relationen. Dies liefert uns einen Gruppenmorphismus von $\mathcal{S}_3$ zur Einheitengruppe der rechten Seite, welcher stets eindeutig zu einem Ringisomorphismus von $\mathbf{Z}\mathcal{S}_3$ in die rechte Seite fortgesetzt werden kann.

Wir berechnen die $\mathbf{Z}$-lineare beschreibende Matrix von ω bezüglich der Gruppenbasis

$$\big(\operatorname{id},\ (1,2),\ (2,3),\ (1,3),\ (1,2,3),\ (1,3,2)\big)$$

der linken Seite und einer Standardbasis auf der rechten Seite zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante dieser Matrix ist $2^1 \cdot 3^3$. Es ist

$$\operatorname{Bild}(\omega) \ \subseteq\ \left\{ (a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^{2\times 2} \times \mathbf{Z} \ : \ a \equiv_2 f,\ d \equiv_3 0,\ a \equiv_3 b,\ e \equiv_3 f \right\} =: \Lambda \ \subseteq\ \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^{2\times 2} \times \mathbf{Z} =: \Gamma\ .$$

Der Index von $\operatorname{Bild}(\omega)$ in Γ ist gleich dieser Determinante, viz. $2^1 \cdot 3^3$. Vermittels einer $\mathbf{Z}$-linearen Basis von Λ erkennen wir, daß auch der Index von Λ in Γ gleich $2^1 \cdot 3^3$ ist. Folglich ist $\operatorname{Bild}(\omega) = \Lambda$. Wir haben daher einen Isomorphismus $\mathbf{Z}\mathcal{S}_3 \xrightarrow[\sim]{\omega} \Lambda$ (unter Mißbrauch der Bezeichnung ω).

(4) – Es ist

$$\operatorname{Bild}(\omega_{(2)}) \ \subseteq\ \left\{ (a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(2)} \ : \ a \equiv_2 f \right\} =: \Lambda_{(2)} \ \subseteq\ \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(2)} =: \Gamma_{(2)}\ .$$

Der Index von $\operatorname{Bild}(\omega_{(2)})$ in $\Gamma_{(2)}$ ist gleich 2^1. Vermittels einer $\mathbf{Z}_{(2)}$-linearen Basis von $\Lambda_{(2)}$ erkennen wir, daß auch der Index von $\Lambda_{(2)}$ in $\Gamma_{(2)}$ gleich 2^1 ist. Folglich ist $\operatorname{Bild}(\omega_{(2)}) = \Lambda_{(2)}$. Wir haben daher einen Isomorphismus $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_3 \xrightarrow[\sim]{\omega_{(2)}} \Lambda_{(2)}$.

– Es ist

$$\mathrm{Bild}(\omega_{(3)}) \;\subseteq\; \left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)} \;:\; d \equiv_3 0,\; a \equiv_3 b,\; e \equiv_3 f\right\} =: \Lambda_{(3)} \;\subseteq\; \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)} =: \Gamma_{(3)} \;.$$

Der Index von $\mathrm{Bild}(\omega_{(3)})$ in $\Gamma_{(3)}$ ist gleich 3^3. Vermittels einer $\mathbf{Z}_{(3)}$-linearen Basis von $\Lambda_{(3)}$ erkennen wir, daß auch der Index von $\Lambda_{(3)}$ in $\Gamma_{(3)}$ gleich 3^3 ist. Folglich ist $\mathrm{Bild}(\omega_{(3)}) = \Lambda_{(3)}$. Wir haben daher einen Isomorphismus $\mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3 \xrightarrow[\sim]{\omega_{(3)}} \Lambda_{(3)}$.

Aufgabe 5.

(1, 2) Sei $A := \{(a, b) \in \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)} \;:\; a \equiv_2 b\}$; vgl. Aufgabe 4 (2).

Wir wollen Aufgabe 3 (2) zur Bestimmung von $\mathrm{J}(A/2A)$, und sodann Aufgabe 2 (2) zur Bestimmung von $\mathrm{J}(A)$ verwenden. Letztere Aufgabe besagt, daß wir $\mathrm{J}(A)$ als Urbild von $\mathrm{J}(A/2A)$ unter $A \longrightarrow A/2A$ bestimmen können.

Der A-Modul A hat den A-Teilmodul $B := \{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \;:\; a \equiv_2 0,\; b \equiv_2 0\}$. Es ist A/B ein einfacher $A/2A$-Modul, da eindimensional über $\mathbf{F}_2$. Sein Annihilator in A ist gegeben durch B. Sein Annihilator in $A/2A$ ist daher gegeben durch $B/2A$. Wegen $B^2 \subseteq 2A$ (genauer gilt $B^2 = \{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \;:\; a \equiv_4 0,\; b \equiv_4 0\}$) ist $B/2A$ ein Nilideal in $A/2A$. Nach Aufgabe 3 (2) ist folglich

$$\mathrm{J}(A/2A) \;=\; B/2A \;,$$

und mit Aufgabe 2 (2) also vollends

$$\mathrm{J}(A) \;=\; B \;.$$

Es wurden schon berechnet

$$\mathrm{J}(A/2A)^2 \;=\; 0$$

und

$$\mathrm{J}(A)^2 \;=\; \{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \;:\; a \equiv_4 0,\; b \equiv_4 0\} \;.$$

Ferner ist $A/\mathrm{J}(A) \simeq (A/2A)/(\mathrm{J}(A)/2A) = (A/2A)/\mathrm{J}(A/2A) \simeq \mathbf{F}_2$ ein Schiefkörper. Daher sind A und $A/2A$ lokale Ringe.

(3, 4) Sei $A := \left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(2)} \;:\; a \equiv_2 f\right\}$; vgl. Aufgabe 4 (4).

Der A-Modul $X := \mathbf{Z}_{(2)} \times 0 \times 0 \subseteq A$ hat den Teilmodul $2X$, und $X/2X$ ist einfach, da $\dim_{\mathbf{F}_2} X/2X = 1$.

Der Annihilator von $X/2X$ in A ist $\left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(2)} \;:\; a \equiv_2 f \equiv_2 0\right\}$.

Der A-Modul $Y := 0 \times \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_{(2)} & \mathbf{Z}_{(2)} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \times 0 \subseteq A$ hat den Teilmodul $2Y$. Es ist $Y/2Y$ einfach über $\mathbf{F}_2^{2\times 2}$ (via Linearer Algebra), und also auch über A.

Der Annihilator von $Y/2Y$ in A ist $\left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(2)} \;:\; a \equiv_2 f,\; b \equiv_2 c \equiv_2 d \equiv_2 e \equiv_2 0\right\}$.

Wir behaupten, daß $\mathrm{J}(A)$ bereits der Schnitt dieser beiden Annihilatoren ist, d.h. daß

$$\mathrm{J}(A) \;\overset{!}{=}\; \left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(2)} \;:\; a \equiv_2 f \equiv_2 0,\, b \equiv_2 c \equiv_2 d \equiv_2 e \equiv_2 0\right\} \;=:\; I \;.$$

Dazu bleibt mit Aufgabe 2 (2) zu zeigen, daß $I/2A$ das Radikal von $A/2A$ ist. Dafür wiederum genügt es mit Aufgabe 3 (2) zu zeigen, daß eine Potenz von I in

$$2A \;=\; \left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), 2f) \in \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(2)} \;:\; a \equiv_4 f \equiv_2 0,\; b \equiv_2 c \equiv_2 d \equiv_2 e \equiv_2 0\right\}$$

liegt. Es wird aber bereits

$$I^2 \;=\; \left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(2)} \;:\; a \equiv_4 f \equiv_4 0,\; b \equiv_4 c \equiv_4 d \equiv_4 e \equiv_4 0\right\} \;\subseteq\; 2A$$

wie man anhand von Produkten von $\mathbf{Z}_{(2)}$-linearen Basiselementen feststellt.

Bereits berechnet wurden nun $\mathrm{J}(A)$, $\mathrm{J}(A/2A) = \mathrm{J}(A)/2A$, $\mathrm{J}(A)^2$, und es wurde festgestellt, daß $\mathrm{J}(A/2A)^2 = 0$.

Ferner ist $A/\mathrm{J}(A) \simeq (A/2A)/\mathrm{J}(A/2A) \simeq \mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_2^{2\times 2}$ kein Schiefkörper. Also ist $A/2A$ nicht lokal.

(5, 6) Sei $A := \left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)} \;:\; d \equiv_3 0,\ a \equiv_3 b,\ e \equiv_3 f\right\}$; vgl. Aufgabe 4 (4).

Der A-Modul $X := \mathbf{Z}_{(3)} \times 0 \times 0 \subseteq A$ hat den Teilmodul $3X$, und $X/3X$ ist einfach, da $\dim_{\mathbf{F}_3} X/3X = 1$.

Der Annihilator von $X/3X$ in A ist $\left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)} \;:\; d \equiv_3 0,\ a \equiv_3 b \equiv_3 0,\ e \equiv_3 f\right\}$.

Der A-Modul $Y := 0 \times 0 \times \mathbf{Z}_{(3)} \subseteq A$ hat den Teilmodul $3Y$, und $Y/3Y$ ist einfach, da $\dim_{\mathbf{F}_3} Y/3Y = 1$.

Der Annihilator von $Y/3Y$ in A ist $\left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)} \;:\; d \equiv_3 0,\ a \equiv_3 b,\ e \equiv_3 f \equiv_3 0\right\}$.

Wir behaupten, daß $\mathrm{J}(A)$ bereits der Schnitt dieser beiden Annihilatoren ist, d.h. daß

$$\mathrm{J}(A) \overset{!}{=} \left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)} \;:\; d \equiv_3 0,\ a \equiv_3 b \equiv_3 0,\ e \equiv_3 f \equiv_3 0\right\} =: I\ .$$

Dazu bleibt mit Aufgabe 2 (2) zu zeigen, daß $I/3A$ das Radikal von $A/3A$ ist. Dafür wiederum genügt es mit Aufgabe 3 (2) zu zeigen, daß eine Potenz von I in

$$3A = \left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)} \;:\; c \equiv_3 0,\ d \equiv_9 0,\ a \equiv_9 b \equiv_3 0,\ e \equiv_9 f \equiv_3 0\right\}$$

liegt. Es wird

$$I^2 = \left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)} \;:\; a \equiv_9 0,\ d \equiv_9 0,\ b \equiv_3 c \equiv_3 e \equiv_3 0,\ f \equiv_9 0\right\}$$

wie man anhand von Produkten von $\mathbf{Z}_{(3)}$-linearen Basiselementen feststellt. Damit wird schließlich

$$I^3 = \left\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)} \;:\; a \equiv_{27} 0,\ b \equiv_9 d \equiv_9 e \equiv_9 0,\ c \equiv_3 0,\ f \equiv_{27} 0\right\} \subseteq 3A$$

Bereits berechnet wurden nun $\mathrm{J}(A)$, $\mathrm{J}(A/3A) = \mathrm{J}(A)/3A$ und $\mathrm{J}(A)^2$.

Eine $\mathbf{F}_3$-lineare Basis von $\mathrm{J}(A/3A)^2 = \big(\mathrm{J}(A)^2 + 3A\big)/3A$ ist übrigens gegeben durch

$$\Big((0, \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0) + 3A,\ (0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right), 0) + 3A,\ (0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0) + 3A,\ (0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0) + 3A\Big)\ .$$

Eine $\mathbf{F}_3$-lineare Basis von $\mathrm{J}(A/3A)^2 = \big(\mathrm{J}(A)^2 + 3A\big)/3A$ ist gegeben durch

$$\Big((0, \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0) + 3A,\ (0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right), 0) + 3A\Big)\ .$$

Ferner ist $A/\mathrm{J}(A) \simeq (A/3A)/\mathrm{J}(A/3A) \simeq \mathbf{F}_3 \times \mathbf{F}_3$ kein Schiefkörper. Also ist $A/3A$ nicht lokal.