

## Lösung 10

### Aufgabe 33.

- (1) Sei eine Zerlegung

$$A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_k$$

in eine direkte Summe von Idealen gegeben. Bezeichne  $A \xrightarrow{\pi_i} I_i$  die Projektion. Dies ist ein  $A$ - $A$ -Bimodulmorphismus. Die Inklusionsabbildung  $I_i \hookrightarrow A$  werde nicht notiert, d.h. wir schreiben auch  $A \xrightarrow{\pi_i} A$  für die Komposition  $A \xrightarrow{\pi_i} I_i \hookrightarrow A$ .

Sei  $\varepsilon_i := 1\pi_i$  für  $i \in [1, k]$ .

Dann ist  $\varepsilon_i^2 = (1\pi_i)(1\pi_i) = (1(1\pi_i))\pi_i = 1\pi_i^2 = 1\pi_i = \varepsilon_i$ .

Ähnlich erhalten wir für  $i \neq j$ , daß  $\varepsilon_i\varepsilon_j = (1\pi_i)(1\pi_j) = (1(1\pi_i))\pi_j = 1\pi_i\pi_j = 0$ .

Sei  $a \in A$ . Dann ist  $a\varepsilon_i = a(1\pi_i) = (a \cdot 1)\pi_i = (1 \cdot a)\pi_i = (1\pi_i)a = \varepsilon_i a$ .

Ferner ist  $1 = \sum_{i \in [1, k]} 1\pi_i = \sum_{i \in [1, k]} \varepsilon_i$ .

Somit liegt eine orthogonale Zerlegung  $1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$  in zentrale Idempotente vor.

Da  $I_i$  ein Ideal ist, das  $\varepsilon_i$  enthält, ist  $\varepsilon_i A \subseteq I_i$ . Sei umgekehrt  $a \in I_i$  gegeben. Dann ist  $a = a\pi_i = (a \cdot 1)\pi_i = a(1\pi_i) = a\varepsilon_i$ . Also ist  $\varepsilon_i A = I_i$ .

Sei eine ringdirekte Zerlegung

$$A = I_1 \times \cdots \times I_k$$

gegeben. Es gibt also eine orthogonale Zerlegung in zentrale Idempotente  $1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$  so, daß  $I_i = A\varepsilon_i = \varepsilon_i A$  stets. Dann ist  $I_i = A\varepsilon_i A$  ein Ideal. Ferner ist  $A = \sum_{i \in [1, k]} I_i$ , da jedes  $a \in A$  als  $a = \sum_{i \in [1, k]} a\varepsilon_i$  geschrieben werden kann.

Bleibt zu zeigen, daß eine direkte Summe vorliegt. Sei  $i \in [1, k]$ , und sei  $a \in I_i \cap \sum_{j \in [1, k] \setminus \{i\}} I_j$ . Schreibe  $a = b_i\varepsilon_i$  für ein  $b_i \in A$ , und schreibe  $a = \sum_{j \in [1, k] \setminus \{i\}} b_j\varepsilon_j$  für gewisse  $b_j \in A$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} a &= b_i\varepsilon_i \\ &= b_i\varepsilon_i^2 \\ &= a\varepsilon_i \\ &= \sum_{j \in [1, k] \setminus \{i\}} b_j\varepsilon_j\varepsilon_i \\ &= \sum_{j \in [1, k] \setminus \{i\}} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

So folgt in der Tat, daß stets  $I_i \cap \sum_{j \in [1, k] \setminus \{i\}} I_j = 0$ , i.e. daß die angegebene Summenzerlegung direkt ist, i.e.  $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_k$ .

- (2) Eine orthogonale Zerlegung
- $1 = \varepsilon'_1 + \cdots + \varepsilon'_\ell$
- in zentrale nichtverschwindende Idempotente heiße
- Verfeinerung*
- einer weiteren solchen
- $1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$
- , falls es eine monotone Surjektion
- $\varphi : [1, \ell] \rightarrow [1, k]$
- gibt mit
- $\varepsilon_i = \sum_{j \in \varphi^{-1}(i)} \varepsilon'_j$
- . Diese Verfeinerung heiße
- echt*
- , falls
- $\ell > k$
- .

Wir merken noch an, daß ein Ideal in  $RG$  gerade ein  $R(G \times G)$ -Teilmodul von  $RG$  ist. Ferner erinnern wir daran, daß ein unzerlegbarer Modul per Konvention nicht verschwindet.

Eine Blockzerlegung von  $RG$  ist nun per Definition eine orthogonale Zerlegung in zentrale Idempotente, welche keine echte Verfeinerung besitzt.

Über die Korrespondenz aus (1) zwischen orthogonalen Zerlegungen in zentrale Idempotente und direkten Zerlegungen in  $R(G \times G)$ -Teilmoduln entspricht eine Blockzerlegung einer Zerlegung in unzerlegbare  $R(G \times G)$ -Teilmoduln.

Denn wäre ein Summand  $I_i$  in einer einer Blockzerlegung entsprechenden Zerlegung

$$RG = I_1 \oplus \cdots \oplus I_{i-1} \oplus I_i \oplus I_{i+1} \oplus \cdots \oplus I_k$$

in  $R(G \times G)$ -Teilmoduln nicht unzerlegbar, sondern gälte  $I_i = I'_i \oplus I''_i$  mit nichtverschwindenden  $R(G \times G)$ -Moduln  $I'_i$  und  $I''_i$ , so lieferte die Zerlegung

$$RG = I_1 \oplus \cdots \oplus I_{i-1} \oplus I'_i \oplus I''_i \oplus I_{i+1} \oplus \cdots \oplus I_k$$

eine echte Verfeinerung der Blockzerlegung. Denn bezeichnet  $\pi'_i$  resp.  $\pi''_i$  die Projektion auf  $I'_i$  resp.  $I''_i$ , so ist  $1\pi_i = 1\pi'_i + 1\pi''_i$ . Und beide Idempotente  $\varepsilon'_i := 1\pi'_i$  und  $\varepsilon''_i := 1\pi''_i$  verschwinden wegen  $I'_i = \varepsilon'_i A$  und  $I''_i = \varepsilon''_i A$  nicht.

Ist umgekehrt eine Zerlegung

$$RG = I_1 \oplus \cdots \oplus I_{i-1} \oplus I_i \oplus I_{i+1} \oplus \cdots \oplus I_k$$

in unzerlegbare Teilmoduln gegeben, und ließe deren zugehörige orthogonale Zerlegung in zentrale Idempotente eine echte Verfeinerung zu, so gäbe es ein  $i \in [1, k]$  so, daß  $\varepsilon_i = \varepsilon'_i + \varepsilon''_i$  mit zentralen Idempotenten  $\varepsilon'_i \neq 0$  und  $\varepsilon''_i \neq 0$ , welche  $\varepsilon'_i \varepsilon''_i = 0$  erfüllen. Hierfür sind ggf. gewisse Idempotente der gegebenen Verfeinerung zu  $\varepsilon'_i$  resp.  $\varepsilon''_i$  aufzusummieren. Dann aber verifiziert man, daß  $A\varepsilon'_i \cap A\varepsilon''_i = 0$ , und also, daß  $I_i = A\varepsilon_i = A\varepsilon'_i \oplus A\varepsilon''_i$ , was nicht geht.

#### Aufgabe 34.

Zeige oder widerlege.

- (1) Die Aussage ist richtig. Es ist  $A \neq 0$ , da  $A$  lokal.

Nehmen wir an, es sei  $I_i \subseteq A$  für alle  $i \in [1, k]$ . Da in  $A$  das Jacobsonradikal das einzige maximale Ideal ist, ist somit  $I_i \subseteq J(A)$  stets, und also auch  $\sum_{i \in [1, k]} I_i \subseteq J(A)$ . Dies aber widerspricht der gemachten Voraussetzung  $\sum_{i \in [1, k]} I_i = A$ .

- (2) Die Aussage ist falsch. Sei hierzu  $p$  prim,  $G \neq 1$  eine  $p$ -Gruppe, und  $R = \mathbf{F}_p$ . Seien  $g_1, \dots, g_k$  Repräsentanten der Konjugationsklassen von  $G$ ; sei hierunter  $g_1 = 1$ . Es wird

$$RG = \bigoplus_{i \in [1, k]} R(g_i^G).$$

Insbesondere tritt für  $i = 1$  der triviale Modul  $R$  in Erscheinung. Dieser aber ist nicht projektiv. Somit kann auch  $RG$  nicht projektiv sein.

#### Aufgabe 35.

- (1) Wir folgen Alperin, *Local representation theory*, S. 98.

Es ist  $B|_{S \times S} | RG|_{S \times S}$ .

Es ist  $RG|_{S \times S} = \bigoplus_{t \in S \setminus G/S} RStS$ , und es ist  $RStS \simeq R|_{S(t)}^{S \times S}$  mit  $S(t) = \{(s, s^t) : s \in S \cap {}^tS\}$ . Es ist  $R|_{S(t)}^{S \times S}$  unzerlegbar mit Vertex  $S(t)$ . Andererseits hat aber  $B|_{S \times S}$  einen Summanden mit Vertex  $\Delta(D)$ . Vgl. Satz 14.4. und Vorbereitungen dazu.

Also gibt es  $r, s \in S$  und ein  $t \in G$  mit  $\Delta(D)^{(r,s)} = S(t)$ . Halten wir zunächst fest, daß daher  $|D| = |\Delta(D)| = |S(t)| = |S \cap {}^tS|$ .

Es folgt  $d^{rt} = d^s$  für alle  $d \in D$ , also  $c^{-1} := rts^{-1} \in C_G(D)$ . Nach Voraussetzung ist  $D \leq S$ , und also auch  $D = D^c \leq S^c$ , insgesamt also  $D \leq S \cap S^c$ . Bleibt uns zu zeigen, daß  $|D| = |S \cap S^c|$ . In der Tat ist

$$|S \cap S^c| = |S \cap S^{st^{-1}r^{-1}}| = |S^r \cap S^{st^{-1}}| = |S \cap S^{t^{-1}}| = |S \cap {}^tS|.$$

- (2) Sei  $T$  eine  $p$ -Sylowgruppe in  $N_G(D)$ . Sei  $S$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$ , die  $T$  (und also auch  $D$ ) enthält. Mit (1) finden wir ein  $c \in C_G(D)$  so, daß  $D = S \cap S^c$ . Nun ist aber auch  $D \leq T$ , und also  $D = D^c \leq T^c$ , insgesamt also

$$D \leq T \cap T^c \leq S \cap S^c = D.$$

Nun ist aber auch  $T^c \leq N_G(D)$ , sich mit  $t \in T$  und  $d \in D$  wegen  $c \in C_G(D)$  und wegen  $d^t \in D$  ergibt, daß  $d^{t^c} = d^{tc} = d^t \in D$ . Also ist  $D$  sogar der Schnitt zweier  $p$ -Sylowgruppen in  $N_G(D)$ . Da  $D$  als  $p$ -Normalteiler in  $N_G(D)$  aber in jeder  $p$ -Sylowgruppe von  $N_G(D)$  liegt, ist  $D$  der Schnitt all dieser, und somit der eindeutige maximale  $p$ -Normalteiler darin.

- (3) Gäbe es einen irreduziblen Charakter von  $\mathcal{S}_6$  von Defekt 1, so wäre sein Block in  $\mathbf{Z}_3\mathcal{S}_6$  von Defekt 1; cf. Satz 11.4.(c). (Wer die Aussage, daß  $\mathbf{Z}_p$  hinreichen groß ist für  $\mathcal{S}_n$ , nicht verwenden möchte, verwende eine Erweiterung davon.) Es gäbe also eine Defektgruppe  $D$  von Ordnung 3. Es gibt bis auf Konjugation 2 Untergruppen von  $\mathcal{S}_6$  von Ordnung 3.

*Fall  $D = \langle(1, 2, 3)\rangle$ .* Hier ist  $N_G(D) = \mathcal{S}_{\{1,2,3\}} \times \mathcal{S}_{\{4,5,6\}}$ . Insbesondere ist auch noch  $\langle(1, 2, 3), (4, 5, 6)\rangle$  ein Normalteiler in  $N_G(D)$ , im Widerspruch zu (2).

*Fall  $D = \langle(1, 2, 3)(4, 5, 6)\rangle$ .* Eine Permutation, die via Konjugation  $\langle(1, 2, 3)(4, 5, 6)\rangle$  in sich überführt, bildet jedenfalls  $\{1, 2, 3\}$  entweder nach  $\{1, 2, 3\}$  oder nach  $\{4, 5, 6\}$  ab; entsprechend bildet sie  $\{4, 5, 6\}$  in das jeweilige Komplement ab. Also führt sie auch  $\langle(1, 2, 3), (4, 5, 6)\rangle$  in sich über, im Widerspruch zu (2).

Dies ist ein Beispiel, wie die modulare Darstellungstheorie dazu verwandt werden kann, um Aussagen zu zeigen, in welchen keine modulare Darstellungstheorie mehr vorkommt. Hier z.B. hatten wir ein rein gruppentheoretisches Kriterium zu überprüfen, um (via modularer Darstellungstheorie) eine Aussage über die gewöhnlichen Darstellungen zu erhalten.

### Aufgabe 36.

Wir verwenden die Bezeichnungen von Aufgabe 32 und ihrer Lösung.

- (1) Es besitzt  $H$  folgende Konjugationsklassen.

$$\begin{aligned} &\{1\}, \{w^3\}, \\ &\{g, g^2, g^4\}, \{w^3g, w^3g^2, w^3g^4\}, \\ &\{g^3, g^5, g^6\}, \{w^3g^3, w^3g^5, w^3g^6\}, \\ &\{wg^0, wg^1, wg^2, wg^3, wg^4, wg^5, wg^6\}, \{w^4g^0, w^4g^1, w^4g^2, w^4g^3, w^4g^4, w^4g^5, w^4g^6\}, \\ &\{w^2g^0, w^2g^1, w^2g^2, w^2g^3, w^2g^4, w^2g^5, w^2g^6\}, \{w^5g^0, w^5g^1, w^5g^2, w^5g^3, w^5g^4, w^5g^5, w^5g^6\} \end{aligned}$$

Insbesondere liegen sechs  $p'$ -Klassen vor. Daher sind alle einfachen  $FH$ -Moduln bis auf Isomorphie gegeben durch  $A^{\otimes i}$  für  $i \in [0, 5]$ .

Nach Lemma 4 aus loc. cit. haben die unzerlegbar projektiven  $FH$ -Moduln folgende Radikalsubquotienten.

Sei  $P_i$  der projektive Deckel von  $A^{\otimes i}$  für  $i \in [0, 5]$ . Dann werden, gleich in 2 Blöcke sortiert,

$$\begin{array}{cccccc}
P_0 = P_0J(FH)^0 & P_2 = P_2J(FH)^0 & P_4 = P_4J(FH)^0 & P_1 = P_1J(FH)^0 & P_3 = P_3J(FH)^0 & P_5 = P_5J(FH)^0 \\
\left| \begin{array}{c} A^{\otimes 0} \\ P_0J(FH)^1 \\ A^{\otimes 4} \\ P_0J(FH)^2 \\ A^{\otimes 2} \\ P_0J(FH)^3 \\ A^{\otimes 0} \\ P_0J(FH)^4 \\ A^{\otimes 4} \\ P_0J(FH)^5 \\ A^{\otimes 2} \\ P_0J(FH)^6 \\ A^{\otimes 0} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} A^{\otimes 2} \\ P_2J(FH)^1 \\ A^{\otimes 0} \\ P_2J(FH)^2 \\ A^{\otimes 4} \\ P_2J(FH)^3 \\ A^{\otimes 2} \\ P_2J(FH)^4 \\ A^{\otimes 0} \\ P_2J(FH)^5 \\ A^{\otimes 4} \\ P_2J(FH)^6 \\ A^{\otimes 2} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} A^{\otimes 4} \\ P_4J(FH)^1 \\ A^{\otimes 2} \\ P_4J(FH)^2 \\ A^{\otimes 0} \\ P_4J(FH)^3 \\ A^{\otimes 4} \\ P_4J(FH)^4 \\ A^{\otimes 2} \\ P_4J(FH)^5 \\ A^{\otimes 0} \\ P_4J(FH)^6 \\ A^{\otimes 4} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} A^{\otimes 1} \\ P_1J(FH)^1 \\ A^{\otimes 5} \\ P_1J(FH)^2 \\ A^{\otimes 3} \\ P_1J(FH)^3 \\ A^{\otimes 1} \\ P_1J(FH)^4 \\ A^{\otimes 5} \\ P_1J(FH)^5 \\ A^{\otimes 3} \\ P_1J(FH)^6 \\ A^{\otimes 1} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} A^{\otimes 3} \\ P_3J(FH)^1 \\ A^{\otimes 1} \\ P_3J(FH)^2 \\ A^{\otimes 5} \\ P_3J(FH)^3 \\ A^{\otimes 3} \\ P_3J(FH)^4 \\ A^{\otimes 1} \\ P_3J(FH)^5 \\ A^{\otimes 5} \\ P_3J(FH)^6 \\ A^{\otimes 3} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} A^{\otimes 5} \\ P_5J(FH)^1 \\ A^{\otimes 3} \\ P_5J(FH)^2 \\ A^{\otimes 1} \\ P_5J(FH)^3 \\ A^{\otimes 5} \\ P_5J(FH)^4 \\ A^{\otimes 3} \\ P_5J(FH)^5 \\ A^{\otimes 1} \\ P_5J(FH)^6 \\ A^{\otimes 5} \end{array} \right. \\
0 = P_0J(FH)^7 & 0 = P_2J(FH)^7 & 0 = P_2J(FH)^7 & 0 = P_1J(FH)^7 & 0 = P_3J(FH)^7 & 0 = P_5J(FH)^7 .
\end{array}$$

Sortieren wir  $(P_0, P_2, P_4, P_1, P_3, P_5)$  und  $(A^{\otimes 0}, A^{\otimes 2}, A^{\otimes 4}, A^{\otimes 1}, A^{\otimes 3}, A^{\otimes 5})$ , so erhalten wir die Cartanmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Für die Zerlegungsmatrix des ersten Blocks  $B_1$  erhalten wir aus dem Zusammenhang mit der Cartanmatrix bis auf Permutation der Spalten die beiden Möglichkeiten  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Dito beim zweiten Block  $B_2$ .

Da aber gemäß der Anzahl der Konjugationsklassen insgesamt bis auf Isomorphie 10 einfache  $KG$ -Moduln vorliegen, muß der bei beiden Blöcken der erste Fall eintreten; i.e.

$$\mathbf{D}_{B_1} = \mathbf{D}_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Also insgesamt

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

- (2) Da die Cartanmatrizen der Blöcke beide ungleich (1) sind, haben beide nicht Defekt 0, und somit Defekt 1; cf. Satz 10.4. Die Defektgruppen sind also beide von Ordnung  $7^1$ . Somit sind beide Defektgruppen gleich der einzigen 7-Sylowgruppe von  $H$ , namentlich  $\langle g \rangle$ .