G. Nebe, M. Künzer

Darstellungstheorie II, WS 06/07

Lösung 15

Aufgabe 53.

Sei $W \subseteq V$ uniseriell von maximaler Dimension. Es ist $W \neq 0$, da z.B. ein einfacher Teilmodul uniseriell ist. Sei $X \subseteq W$ maximal mit $X \cap W = 0$.

Wir *behaupten,* daß $\mathrm{soc}(V/X)$ einfach ist. Wäre $\mathrm{soc}(V/X)$ nicht einfach, so gäbe es $X \subseteq X' \subseteq V$ und $X \subseteq X'' \subseteq V$ mit X'/X einfach, X''/X einfach, aber $X'/X \neq X''/X$ als Teilmoduln von V/X, und also $X' \cap X'' = X$. Nun haben wir einen Monomorphismus $W \cap X' \longrightarrow X'/X$, da sein Kern $W \cap X$ verschwindet. Also ist W isomorph zu einem Teilmodul eines einfachen Moduls, und verschwindet nicht. Folglich ist $W \cap X'$ einfach. Genauso ist auch $W \cap X''$ einfach. Da W uniseriell ist, folgt nun aber $W \cap X' = W \cap X'' \neq 0$, und also

$$0 \neq W \cap X' = (W \cap X') \cap (W \cap X'') = W \cap (X' \cap X'') = W \cap X = 0\,,$$

und wir haben einen Widerspruch.

Nun ist die injektive Hülle von V/X die injektive Hülle von $\mathrm{soc}(V/X)$, und daher unzerlegbar projektiv, und nach Voraussetzung deswegen uniseriell. Somit ist auch V/X uniseriell. Speziell ist sein Kopf $\mathrm{head}(V/X)$ einfach. Die projektive Decke P von V/X ist auch die projektive Decke von $\mathrm{head}(V/X)$, und damit nach Voraussetzung uniseriell.

Da P projektiv und die Restklassenabbildung $V \xrightarrow{r} V/X$ epimorph ist, gibt es ein $P \xrightarrow{g} V$ mit $gr = f$. Da P uniseriell ist, gilt dies auch für den Teilmodul $Pg \subseteq V$. Es ist $Pgr = Pf = V/X$. In anderen Worten, die Restklassenabbildung schränkt zu einem Epimorphismus

$$Pg \longrightarrow V/X$$

ein.

Ferner ist die eingeschränkte Restklassenabbildung

$$W \longrightarrow V/X$$

monomorph, da ihr Kern $W \cap X$ verschwindet.

Es folgt $\dim_F W \leq \dim_F V/X \leq \dim_F Pg$. Nun sind W und Pg beides uniserielle Teilmoduln von V. Da W unter diesen maximale Dimension hatte, folgt sogar $\dim_F W = \dim_F V/X = \dim_F Pg$, und mithin

$$\begin{array}{ccc} Pg & \xrightarrow{\sim} & V/X \\ W & \xrightarrow{\sim} & V/X \end{array}$$

Dem ersten Isomorphismus entnehmen wir $Pg \cap X = 0$ wegen seiner Injektivität und $Pg + X = V$ wegen seiner Surjektivität; insgesamt also $V = Pg \oplus X$. Beiden Isomorphismen entnehmen wir, daß aus $W \neq 0$ folgt, daß $Pg \neq 0$. Da V unzerlegbar ist, folgt $V = Pg$. Insbesondere ist mit Pg auch V uniseriell.

Diese Aufgabe stammt aus Feit, *Representation Theory of Finite Groups,* S. 61, Th. 16.14.

Aufgabe 54.

(1) Die unzerlegbar projektiven B-Moduln sind uniseriell von Länge q. Der Quotient modulo dem Teilmodul von Länge $q - s$ ist ein uniserieller, und insbesondere unzerlegbarer Modul von Länge s, mit demselben Kopf wie der gewählte unzerlegbar projektive. Also gibt es einen unzerlegbaren Modul $V_{i,s}$ der Länge s mit Kopf V_i für alle $i \in [0, e-1]$.

Sei $\tilde{V}$ ein weiterer Modul von Länge s und Kopf V_i. Mit Nakayama ist $\tilde{V}$ Quotient der projektiven Decke von V_i. Da $\tilde{V}$ dieselbe Länge wie $V_{i,s}$ hat, folgt aus der Uniserialität dieser projektiven Decke, daß $\tilde{V} \simeq V_{i,s}$.

Da ferner jeder unzerlegbar projektive B-Modul uniseriell ist, folgt mit Aufgabe 53, daß jeder unzerlegbare B-Modul uniseriell ist. Mit dem eben auf $\tilde{V}$ angewandten Argument folgt nun, daß jeder unzerlegbare B-Modul von der Form $V_{i,s}$ ist für ein $i \in [0, e-1]$ und $s \in [1, q]$.

Setzen wir nun noch $V_{i,s} = V_{i+e,s}$ für alle $i \in \mathbf{Z}$.

(2) Nach Bezeichnung aller Morphismen haben wir ein kommutatives Viereck

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"'] & Y' \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} .$$

Darin sind f und g epimorph, und i und j monomorph.

Nach Konstruktion wissen wir, daß ein Element $x \in X$ mit $xf \in Y'j$ notwendig in $X'i$ liegt.

Setze

$$X' \xrightarrow{(\,i\ f'\,)} X \oplus Y' \xrightarrow{\binom{f}{-j}} Y .$$

Es ist $(\,i\ f'\,)\binom{f}{-j} = if - f'j = 0$.

Ferner ist $(\,i\ f'\,)$ monomorph, da i monomorph ist. Desweiteren ist $\binom{f}{-j}$ epimorph, da f epimorph ist.

Sei nun $(x, y') \in X \oplus Y'$ mit $0 = (x, y')\binom{f}{-j} = xf - y'j$ gegeben. Dann gibt es aber, wie schon erwähnt, ein $x' \in X'$ mit $x'i = x$. Aus $x'f'j = x'if = xf = y'j$ folgt mit j monomorph, daß $x'f = y'$ ist. Es folgt $x'(\,i\ f'\,) = (x'i, x'f) = (x, y')$.

(3) Wir haben zu zeigen, daß der Kern von $\mathrm{Hom}_B(U, V) \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}}_B(U, V)$ verschwindet. Sei $U \xrightarrow{f} V$ ein projektiver Morphismus. Wir haben $f = 0$ nachzuweisen. Sei angenommen, es ist $f \neq 0$.

Sei PV die projektive Decke von V, und $PV \xrightarrow{g} V$ der zugehörige Epimorphismus. Sei $(U \xrightarrow{f} V) = (U \xrightarrow{\bar{f}} X \xrightarrow{\dot{f}} V)$ die Faktorisierung von f über sein Bild. Nach Annahme ist $X \not\simeq 0$. Sei $X' := g^{-1}(X) = g^{-1}(Uf)$. Bezeichne $X' \xrightarrow{i} PV$ die Inklusion, und $X' \xrightarrow{h} X$ die Einschränkung von g. Da f projektiv ist, faktorisiert es über PV, $f = tg$. Da aber für $u \in U$ gilt, daß

$$uf \;=\; utg$$

ist, ist $ut \in g^{-1}(Uf) = X'$ enthalten. Also faktorisiert t über X', $t = si$. Aus $sh\dot{f} = sig = tg = \bar{f}\dot{f}$ folgt wegen $\dot{f}$ monomorph, daß $sh = \bar{f}$ ist.

Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr, "s"'] & X \arrow[r, "\dot{f}"] & V \\ & X' \arrow[u, "h"] \arrow[r, "i"'] & PV \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Darin sind alle Moduln uniseriell. Sei $U \simeq V_{i,\alpha}$. Als Quotient können wir daher $X \simeq V_{i,\beta}$ schreiben. Da X wiederum Teilmodul von V ist, können wir $V \simeq V_{i+\gamma,\,\beta+\gamma}$ schreiben. Somit ist $PV \simeq V_{i+\gamma,\,q}$. Mit (2) ist $X' \simeq V_{i,q-\gamma}$.

Da $\mathrm{head}(\bar{f})$ und $\mathrm{head}(h)$ isomorph sind, gilt dies auch für $\mathrm{head}(s)$. Mit Nakayama ist s folglich epimorph. Also ist $\alpha \geq q - \gamma$. Nach Voraussetzung an U und V ist aber $\alpha + \beta + \gamma \leq q$. Also folgt $q - \gamma \leq \alpha \leq q - \alpha - \beta$, und also $0 \leq -\beta$, und wir sind bei einem Widerspruch angelangt.

Alternativ kann man auch Lemma 21.3 aus Alperin, S. 151, bemühen.