

Lösung 7

Aufgabe 23.

Sei π ein Erzeuger des maximalen Ideals von R .

Ist M ein endlich erzeugter FH -Modul, so schreiben wir φ_M für seinen zugehörigen Brauercharakter; genauso über FG .

Ist X ein RH -Gitter, so schreiben wir χ_X für seinen gewöhnlichen Charakter und $\bar{X} := X/\pi X$; genauso über RG , etc.

Wir erinnern an $M|_F^G := M \otimes_{FH} FG \simeq M \otimes_{RH} RG$ und an $X|_F^G := X \otimes_{RH} RG$. Beachte, daß $X|_F^G \simeq \bar{X}|_F^G$ und $\overline{X \otimes_R Y} \simeq \bar{X} \otimes_F \bar{Y}$.

- (1) Sei M ein endlich erzeugter FG -Modul, sei $h \in H_{p'} \subseteq G_{p'}$. Wir behaupten, daß $\varphi_{M|_G}(h) = \varphi_M(h)$. Denn für die Berechnung beider Seiten als R -lineare Spur der Multiplikation mit h können wir das (bis auf Isomorphie eindeutige) $R\langle h \rangle$ -Gitter T verwenden, für welches $\bar{T} \simeq M|_{\langle h \rangle}$. Insbesondere ist $\varphi_{M|_H} := \varphi_{M|_H}$ wohldefiniert.

Wir schreiben $\varphi_{M|_H}$ und nicht $\varphi_{M|_{H_{p'}}$. Dennoch ist $\varphi_{M|_H}$ natürlich eine nur auf den p' -Elementen definierte Abbildung nach R .

- (2) Wir wollen das entsprechende Resultat im gewöhnlichen Fall auf den modularen Fall ausdehnen, um einen Exkurs in die Lineare Algebra zu vermeiden.

Sei χ ein Charakter von H . Sei $g \in G$. Wir erinnern an

$$\chi|_F^G(g) = \sum_{s \in G/H, g^s \in H} \chi(g^s).$$

Sei nun M ein endlich erzeugter FG -Modul. Sei $g \in G_{p'}$. Wir behaupten, daß

$$\varphi_{M|_F^G}(g) = \sum_{s \in G/H, g^s \in H} \varphi_M(g^s).$$

1. Betrachten wir den Fall $M \simeq \bar{X}$ für ein RG -Gitter X . Hier ist

$$\varphi_{M|_F^G}(g) = \varphi_{\bar{X}|_F^G}(g) = \chi_{X|_F^G}(g) = \chi_{X|_F^G}(g) = \sum_{s \in G/H, g^s \in H} \chi_X(g^s) = \sum_{s \in G/H, g^s \in H} \varphi_M(g^s).$$

2. Ist M ein endlich erzeugter FG -Modul mit einer Filtrierung

$$M = M_k \supseteq M_{k-1} \supseteq \cdots \supseteq M_0 = 0,$$

so ist

$$\varphi_M = \sum_{i \in [1, k]} \varphi_{M_i/M_{i-1}},$$

und daher

$$\varphi_{M|_F^G} = \sum_{i \in [1, k]} \varphi_{M_i|_F^G/M_{i-1}|_F^G} = \sum_{i \in [1, k]} \varphi_{(M_i/M_{i-1})|_F^G},$$

wozu wir beachten, daß $(-)|_F^G$ wegen FG frei über FH kurz exakte Sequenzen in ebensolche überführt.

Wenden wir dies auf eine Kompositionsreihe von M an, so sehen wir, daß $\varphi_{M|_F^G} := \varphi_{M|_F^G}$ wohldefiniert ist, da ein anderer Modul mit denselben Jordan-Hölder-Multiplizitäten dasselbe Ergebnis liefert.

3. Da, in den Standardbezeichnungen, $\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{H} = \mathbf{S}$, finden wir $a_i, b_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ so, daß $\varphi_M = \sum_i a_i \chi_{X_i}|_{H_{p'}} - \sum_j b_j \chi_{X'_j}|_{H_{p'}}$ mit RH -Gittern X_i und X'_j , welche über KH zu einfachen Moduln werden. Schreiben wir $X := \bigoplus_i a_i X_i$ und $X' := \bigoplus_j b_j X'_j$, so wird also

$$\varphi_{M \oplus \bar{X}'} = \varphi_M + \chi_{X'}|_{H_{p'}} = \chi_X|_{H_{p'}} = \varphi_{\bar{X}}$$

für gewisse RH -Gitter X' und X . Somit ist

$$\varphi_{M \oplus \bar{X}'} \uparrow^G(g) = \varphi_{\bar{X}} \uparrow^G(g).$$

Beachte, daß dies die unter 2. gefundene Beobachtung benötigt.

Nun wird

$$\varphi_{M \oplus \bar{X}'} \uparrow^G(g) = \varphi_M \uparrow^G(g) + \varphi_{\bar{X}'} \uparrow^G(g) = \varphi_M \uparrow^G(g) + \chi_{X'} \uparrow^G(g),$$

und analog

$$\varphi_{\bar{X}} \uparrow^G(g) = \chi_X \uparrow^G(g),$$

so daß

$$\varphi_M \uparrow^G(g) = \chi_X \uparrow^G(g) - \chi_{X'} \uparrow^G(g) = \sum_{s \in G/H, g^s \in H} (\chi_X(g^s) - \chi_{X'}(g^s)) = \sum_{s \in G/H, g^s \in H} \varphi_M(g^s),$$

wie behauptet.

- (3) Hier können wir wieder direkt argumentieren. Seien M und N endlich erzeugte FG -Moduln. Sei $g \in G_{p'}$. Sei X resp. Y das (bis auf Isomorphie eindeutige) $R\langle g \rangle$ -Gitter mit $\bar{X} \simeq M \downarrow_{\langle g \rangle}$ resp. $\bar{Y} \simeq N \downarrow_{\langle g \rangle}$. Dann ist

$$\overline{X \otimes_R Y} \simeq \bar{X} \otimes_F \bar{Y} \simeq M \downarrow_{\langle g \rangle} \otimes_F N \downarrow_{\langle g \rangle} = (M \otimes_F N) \downarrow_{\langle g \rangle}.$$

Nach Definition der Brauercharaktere und nach der Regel für das Tensorprodukt von gewöhnlichen Charakteren ist

$$\begin{aligned} \varphi_{M \otimes_F N}(g) &= \chi_{K \otimes_R (X \otimes_R Y)}(g) \\ &= \chi_{(K \otimes_R X) \otimes_K (K \otimes_R Y)}(g) \\ &= \chi_{K \otimes_R X}(g) \cdot \chi_{K \otimes_R Y}(g) \\ &= \varphi_M(g) \cdot \varphi_N(g). \end{aligned}$$

Man könnte auch wie in (2) argumentieren, unter Verwendung der Exaktheit des Tensorproduktes im vorliegenden Fall.

Aufgabe 24.

Sei π ein Erzeuger eines maximalen Ideals in R ; schreibe $\bar{X} := X/\pi X$ für ein RG -Gitter X .

- (1) Die Aussage ist richtig. Denn ein endlich erzeugter projektiver FG -Modul P ist bis auf Isomorphie ein direkter Summand von $FG^{(k)}$ (k -fache direkte Summe) für ein geeignetes $k \geq 1$. Da $\bar{FG} \downarrow_H$ isomorph zu $FH^{(\langle G:H \rangle)}$ ist, ist $P \downarrow_H$ also bis auf Isomorphie ein direkter Summand von $FH^{(k \cdot \langle G:H \rangle)}$, und also projektiv über FH . Ist also Φ der Brauercharakter von P , so ist $\Phi_{H_{p'}}$ der Brauercharakter des projektiven FH -Moduls $P \downarrow_H$.
- (2) Die Aussage ist falsch. Sei $p = 2$. Sei $G = \mathcal{S}_3$, sei $H = \mathcal{S}_2$. Betrachte den irreduziblen Charakter $\chi^{(2,1)} = (20-1)$ der \mathcal{S}_3 aus der Lösung zu Aufgabe 17 (4). Es ist $d(\chi^{(2,1)}) = 0$. Hingegen zerlegt sich $\chi_{\mathcal{C}_2}^{(2,1)} = (20) = (11) + (1-1)$, und diese beiden Summanden haben Defekt 1.
- (3) Die Aussage ist richtig. Sei χ ein irreduzibler Charakter von G . Nach Satz 10.4 (h) gibt es ein projektives RG -Gitter P so, daß χ der Charakter von P ist. Nach loc. cit. (b, g, g') ist \bar{P} ein einfacher FG -Modul.

Nach Aufgabe 10 (3) ist $\bar{P} \downarrow_H$ halbeinfach. Nach dem Beweis zu Aufgabe 10 (3) gibt es eine Zerlegung $\bar{P} \downarrow_H = \bigoplus_{i \in [1, k]} S_i$ mit $\dim_F S_i = \dim_F S_j$ für alle $i, j \in [1, k]$. In der Tat ist \bar{P} die Summe von einfachen gleicher Dimension. Nehmen wir einen solchen einfachen, heiße er S_1 . Ist $S_1 \subset \bar{P}$, so gibt

es noch einen weiteren einfachen Modul aus der genannten Summe, der nicht in S_1 enthalten ist, er heiße S_2 . Da S_2 einfach ist, ist dann $S_1 \cap S_2 = 0$. Also ist $S_1 \oplus S_2 \subseteq \bar{P}$. Ist nun $S_1 \oplus S_2 \subset \bar{P}$, so gibt es noch einen weiteren einfachen Modul aus der genannten Summe, der nicht in S_1 enthalten ist, er heiße S_3 . Da S_3 einfach ist, ist dann $(S_1 \oplus S_2) \cap S_3 = 0$, also $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \subseteq \bar{P}$. Usf.

Als Summand des projektiven FH -Moduls $\bar{P}|_H$ ist nun S_i projektiv für alle $i \in [1, k]$; cf. (1). Sei Q_i ein projektives RG -Gitter mit $\bar{Q}_i = S_i$. Es ist nun $Q_i \otimes_{RG} KG$ einfach über KG , denn sonst wäre \bar{Q}_i nicht einfach, da darin die Konstituenten von Gittern zu den einfachen Summanden von $Q_i \otimes_{RG} KG$ auftreten. Mit loc. cit. (h) ist der Charakter ψ_i zu Q_i von Defekt 0. Ferner ist $\psi_i|_{H_{p'}}$ der Brauercharakter zu $\bar{Q}_i = S_i$. Folglich ist $\chi|_{H|_{H_{p'}}} = \sum_{i \in [1, k]} \psi_i|_{H_{p'}}$. Da mit Satz 9.3 die Charakterwerte projektiver Gitter auf nicht- p' -Elementen verschwinden, folgt $\chi|_H = \sum_{i \in [1, k]} \psi_i$. Ferner ist $\psi_i(1) = \dim_F S_i$ von i unabhängig. Damit ist alles gezeigt.

- (4) Die Aussage ist richtig. Mit (3) ist $\chi|_H = \sum_{i \in [1, k]} \psi_i$, wobei ψ_i irreduzible Charaktere von H von Defekt 0 sind, d.h. deren Grad $\psi_i(1)$ durch $|H|[p] = |G|[p]$ geteilt wird. Da aber $\chi|_H(1) = |G|[p]$, folgt $k = 1$, wie zu zeigen war.
- (5) Die Aussage ist richtig. Wie in Lemma 9.9 schreiben wir $\eta_{\varphi, H}$ für die Klassenfunktion auf H , die auf einem p' -Element h den Wert $|H|[p] \cdot \varphi(h)$ annimmt, und 0 sonst. Analog, wir schreiben $\eta_{\psi, G}$ für die Klassenfunktion auf G , die auf einem p' -Element g den Wert $|G|[p] \cdot \psi(g)$ annimmt, und 0 sonst.

Da auf p' -Untergruppen Brauercharaktere und Charaktere dasselbe sind, können wir Lemma 9.9 anwenden, um zu schließen, daß $\eta_{\varphi, H}$ ein verallgemeinerter Charakter von H und $\eta_{\psi, G}$ ein verallgemeinerter Charakter von G ist. Beachte, daß $\eta_{\varphi, H}|^G = \eta_{\varphi|_G, G}$; cf. Aufgabe 23 (2).

Mit der Frobeniusreziprozitat aus der gewöhnlichen Darstellungstheorie folgt nun

$$\begin{aligned} (\varphi|_G, \psi)_{G_{p'}} &= |H|[p]^{-1} \cdot |G|[p]^{-1} \cdot (\eta_{\varphi|_G, H}, \eta_{\psi, G})_G \\ &= |H|[p]^{-1} \cdot |G|[p]^{-1} \cdot (\eta_{\varphi, H}|^G, \eta_{\psi, G})_G \\ &= |H|[p]^{-1} \cdot |G|[p]^{-1} \cdot (\eta_{\varphi, H}, \eta_{\psi, G}|_H)_H \\ &= (\varphi, \psi|_H)_{H_{p'}}. \end{aligned}$$

Man kommt auch ohne den Satz von Brauer, der hinter Lemma 9.9 steht, aus, wenn man sich klarmacht, daß Frobeniusreziprozitat für alle K -wertigen Klassenfunktionen gilt, da die Charaktere eine K -Basis der Klassenfunktionen bilden.

- (6) Die Aussage ist richtig. Siehe (5).

Für den in (6) angesprochenen Fall kann man auch die $\dim \text{Hom}$ -Interpretation aus Aufgabe 18 (3) und den Adjunktionsisomorphismus für Induktion und Restriktion verwenden, um die Aussage zu zeigen.

- (7) Die Aussage ist richtig. Sei ρ_G der reguläre Brauercharakter von G , i.e. derjenige zu FG ; analog ρ_H . Dann ist $\rho_G|_H = [G : H]\rho_H$. Und da jeder einfache FH -Modul ein Quotient von FH ist, enthält ρ_H jeden irreduziblen Brauercharakter von H als Konstituenten, und somit auch φ . Gäbe es nun keinen irreduziblen Brauercharakter von G , der nach Restriktion φ als Konstituenten enthielte, so gäbe es überhaupt keinen Brauercharakter, der nach Restriktion φ als Konstituenten enthielte. Gibt es aber eben doch, z.B. ρ_G .

- (8) Die Aussage ist falsch. Sei $p = 2$, sei $G = S_5$, sei $H = A_5$. In den Bezeichnungen der weiter unten angefuhrten Lösung zu Aufgabe 25 (4.i) ist Ψ_1 der unzerlegbar projektive zum irreduziblen Brauercharakter ψ_1 der S_5 . Jedoch ist $\Psi_1|_{A_5} = 2\Phi_1$, mit Φ_1 unzerlegbar projektiv, wohingegen $\psi_1|_{A_5} = \varphi_1$ irreduzibel wird.

Ist $H \trianglelefteq G$, so gilt immerhin noch folgendes. Es impliziert $\Phi|_H$ unzerlegbar projektiv, daß $\varphi|_H$ einfach ist. Denn sei Φ der Brauercharakter des unzerlegbar projektiven FG -Moduls P ; sei φ der Brauercharakter des einfachen Moduls S . Wir haben einen Epimorphismus $P \twoheadrightarrow S$. Also haben wir auch einen Epimorphismus $P|_H \twoheadrightarrow S|_H$. Mit Clifford aus Aufgabe 10 (3) ist $S|_H$ halbeinfach, wird also von $J(FH)$ annulliert. Folglich haben wir auch einen Epimorphismus $P|_H/P|_H J(FH) \twoheadrightarrow S|_H$. Da das Startobjekt einfach ist, ist es auch das Zielobjekt.

Aufgabe 25.

Schreibe $\eta := \zeta_3 := \zeta_{15}^5$ und $\xi := \zeta_5 := \zeta_{15}^3$.

- (1) (i) Die gewöhnliche Charaktertafel von \mathcal{A}_4 hat folgende Gestalt.

	id	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	η	η^2
χ_3	1	1	η^2	η
χ_4	3	-1	0	0

Der zugehörigen Brauercharaktere $\varphi_1 := \chi_1|_{(\mathcal{A}_4)_3}$, ist wegen Grad 1 irreduzibel. Ferner ist χ_4 von Defekt 0, und also auch $\varphi_2 := \chi_4|_{(\mathcal{A}_4)_3}$ irreduzibel. Wir erhalten die folgende 3-modulare Charaktertafel.

	id	(1, 2)(3, 4)
φ_1	1	1
φ_2	3	-1

- (ii) Die 3-modulare Charaktertafel von \mathcal{S}_4 entnehmen wir Aufgabe 20 (3).

	id	(1, 2)	(1, 2, 3, 4)	(1, 2)(3, 4)
ψ_1	1	1	1	1
ψ_2	1	-1	-1	1
ψ_3	3	-1	1	-1
ψ_4	3	1	-1	-1

Die Multiplizitäten der einfachen in den eingeschränkten Brauercharakteren schreiben wir in folgende Tafel.

	φ_1	φ_2
$\psi_1 _{\mathcal{A}_4}$	1	0
$\psi_2 _{\mathcal{A}_4}$	1	0
$\psi_3 _{\mathcal{A}_4}$	0	1
$\psi_4 _{\mathcal{A}_4}$	0	1

- (iv) Die Zerlegungsmatrix von \mathcal{A}_4 bei 3 ist $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Cartanmatrix von \mathcal{A}_4 bei 3 ergibt sich

also zu $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die (hier nicht unbedingt erforderlichen) zentralen Charaktere haben auf den 3'-Klassen folgende Werte.

	id	(1, 2)(3, 4)
ω_1	1	3
ω_2	1	3
ω_3	1	3
ω_4	1	-1

Kongruenzen modulo 3 liefern, daß χ_1, χ_2 und χ_3 zum ersten Block B_1 gehören; und χ_4 zum zweiten Block B_2 . Der Zerlegungsmatrix entnehmen wir, daß φ_1 zum ersten, und φ_2 zum zweiten Block gehört.

Es wird $\mathbf{D}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $\mathbf{C}_{B_1} = (3)$. Ferner ist $d(B_1) = 1$.

Es wird $\mathbf{D}_{B_2} = (1)$, und $\mathbf{C}_{B_2} = (1)$. Ferner ist $d(B_2) = 0$.

- (a) Es hat $\mathbf{C}_{B_1} = (3)$ den Elementarteiler $3^{d(B_1)} = 3$ mit Vielfachheit 1.
Es hat $\mathbf{C}_{B_2} = (1)$ den Elementarteiler $3^{d(B_2)} = 1$ mit Vielfachheit 1.

- (b) Es ist $|\text{Irr}(B_1)| = 3 \leq 1 + 3^{2d(B_1)}/4 = 13/4$.
 Es ist $|\text{Irr}(B_1)| = 3 \leq 3^{d(B_1)} = 3$, es gilt also sogar die Brauersche Vermutung.
 Es ist $|\text{Irr}(B_2)| = 1 \leq 1 + 3^{2d(B_2)}/4 = 5/4$.
 Es ist $|\text{Irr}(B_2)| = 1 \leq 3^{d(B_2)} = 1$, es gilt also sogar die Brauersche Vermutung (wie bei allen Blöcken von Defekt 0).
- (c) In der Tat gibt es keinen Block von Defekt $\neq 1$, welcher einen Charakter von Defekt 1 enthält.
- (2) (i) Die gewöhnliche Charaktertafel von \mathcal{A}_5 hat folgende Gestalt.

	id	(1,2)(3,4)	(1,2,3)	(1,2,3,4,5)	(1,2,3,5,4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	$-\xi - \xi^4$	$-\xi^2 - \xi^3$
χ_3	3	-1	0	$-\xi^2 - \xi^3$	$-\xi - \xi^4$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

Aus Grad- resp. Defektgründen sind $\varphi_1 := \chi_1|_{(\mathcal{A}_5)_{3'}}$, $\varphi_2 := \chi_2|_{(\mathcal{A}_5)_{3'}}$ und $\varphi_3 := \chi_3|_{(\mathcal{A}_5)_{3'}}$ irreduzibel.

Damit kennen wir folgenden Teil der 3-modularen Charaktertafel.

	id	(1,2)(3,4)	(1,2,3,4,5)	(1,2,3,5,4)
φ_1	1	1	1	1
φ_2	3	-1	$-\xi - \xi^4$	$-\xi^2 - \xi^3$
φ_3	3	-1	$-\xi^2 - \xi^3$	$-\xi - \xi^4$
φ_4	*	*	*	*

Bezeichne allgemein Φ_i der zu φ_i gehörige unzerlegbar projektive Brauercharakter für $i \in [1, 4]$. Den fehlenden Charakter beschaffen wir uns über projektive Brauercharaktere. Die 3-modulare Charaktertafel von \mathcal{S}_5 entnehmen wir Aufgabe 20 (5).

	id	(1,2)	(1,2,3,4)	(1,2,3,4,5)	(1,2)(3,4)
ψ_1	1	1	1	1	1
ψ_2	1	-1	-1	1	1
ψ_3	4	2	0	-1	0
ψ_4	4	-2	0	-1	0
ψ_5	6	0	0	1	-2

Mittels der Zerlegungsmatrix von \mathcal{S}_5 bei 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

liefert dies die folgende 3-modulare projektive Charaktertafel von \mathcal{S}_5 .

	id	(1,2)	(1,2,3,4)	(1,2,3,4,5)	(1,2)(3,4)
Ψ_1	6	0	2	1	2
Ψ_2	6	0	-2	1	2
Ψ_3	9	3	-1	-1	1
Ψ_4	9	-3	1	-1	1
Ψ_5	6	0	0	1	-2

Hierbei gehöre jeweils Ψ_i zu ψ_i .

Einschränken nach \mathcal{A}_5 von Ψ_3 liefert den projektiven Brauercharakter $(9 - 1 - 1 1)$ von \mathcal{A}_5 . Wir berechnen, daß $(\Psi_3|_{\mathcal{A}_5}, \varphi_i)_{(\mathcal{A}_5)_{3'}} = 0$ für $i \in [1, 3]$. Also ist $\Psi_3|_{\mathcal{A}_5}$ ein Vielfaches von Φ_4 . Da $\Phi_4(1)$ durch 3 teilbar ist, bleiben die beiden Möglichkeiten $\Psi_3|_{\mathcal{A}_5} = \Phi_4$ oder $\Psi_3|_{\mathcal{A}_5} = 3\Phi_4$. Da die Charakterwerte von $\Psi_3|_{\mathcal{A}_5}$ nicht durch 3 teilbar sind, muß $\Psi_3|_{\mathcal{A}_5} = \Phi_4$ sein. Mit der in der Lösung zu 24 (8) angemerkten Implikation folgt nun, daß $\varphi_4 = \psi_3|_{\mathcal{A}_5} = (4 0 - 1 - 1)$.

Somit lautet die komplette 3-modulare Charaktertafel von \mathcal{A}_5 wie folgt.

	id	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3, 4, 5)	(1, 2, 3, 5, 4)
φ_1	1	1	1	1
φ_2	3	-1	$-\xi - \xi^4$	$-\xi^2 - \xi^3$
φ_3	3	-1	$-\xi^2 - \xi^3$	$-\xi - \xi^4$
φ_4	4	0	-1	-1

- (ii) Die 3-modulare Charaktertafel von \mathcal{S}_5 wurde in (i) angeführt. Die Multiplizitäten der einfachen in den eingeschränkten Brauercharakteren schreiben wir in folgende Tafel.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$\psi_1 _{\mathcal{A}_5}$	1	0	0	0
$\psi_2 _{\mathcal{A}_5}$	1	0	0	0
$\psi_3 _{\mathcal{A}_5}$	0	0	0	1
$\psi_4 _{\mathcal{A}_5}$	0	0	0	1
$\psi_5 _{\mathcal{A}_5}$	0	1	1	0

- (iii) Wir bezeichnen zwecks Unterscheidung die irreduziblen Brauercharaktere der \mathcal{A}_4 mit $\tilde{\varphi}_i$ statt mit φ_i .

Die irreduziblen Brauercharaktere der \mathcal{A}_5 behalten dagegen ihre Namen φ_i .

Zunächst führen wir die Werte der Induzierten von \mathcal{A}_4 nach \mathcal{A}_5 an.

	id	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3, 4, 5)	(1, 2, 3, 5, 4)
$\tilde{\varphi}_1 _{\mathcal{A}_5}$	5	1	0	0
$\tilde{\varphi}_2 _{\mathcal{A}_5}$	15	-1	0	0

Die Multiplizitäten der einfachen in den induzierten Brauercharakteren schreiben wir in folgende Tafel.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$\tilde{\varphi}_1 _{\mathcal{A}_5}$	1	0	0	1
$\tilde{\varphi}_2 _{\mathcal{A}_5}$	1	1	1	2

- (iv) Die Zerlegungsmatrix von \mathcal{A}_5 bei 3 ist

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Cartanmatrix bei 3 zu

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die (hier nicht unbedingt erforderlichen) zentralen Charaktere haben auf den 3'-Klassen folgende Werte.

	id	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3, 4, 5)	(1, 2, 3, 5, 4)
ω_1	1	15	12	12
ω_2	1	-5	$4(-\xi - \xi^4)$	$4(-\xi^2 - \xi^3)$
ω_3	1	-5	$4(-\xi^2 - \xi^3)$	$4(-\xi - \xi^4)$
ω_4	1	0	-3	-3
ω_5	1	3	0	0

Kongruenzen modulo 3 liefern folgende Blockeinteilung. Es gehören χ_1, χ_4 und χ_5 zum ersten Block B_1 ; es gehört χ_2 zum zweiten Block B_2 ; es gehört χ_3 zum dritten Block B_3 . Der Zerlegungsmatrix entnehmen wir, daß φ_1 und φ_4 zu B_1 ; φ_2 zu B_2 ; φ_3 zu B_3 gehören.

Es wird $\mathbf{D}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, und $\mathbf{C}_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ferner ist $d(B_1) = 1$.

Es sind B_2 und B_3 vom Defekt 0.

Für Blöcke von Defekt 0 treffen die Aussagen (a, b, c) a priori zu.

- (a) Es hat \mathbf{C}_{B_1} das Elementarteilertupel $(1, 3)$. Insbesondere tritt der Elementarteiler $3^{d(B_1)} = 3$ mit Vielfachheit 1 auf.
- (b) Es ist $|\text{Irr}(B_1)| = 3 \leq 1 + 3^{2d(B_1)}/4 = 13/4$.
Es ist $|\text{Irr}(B_1)| = 3 \leq 3^{d(B_1)} = 3$, es gilt also sogar die Brauersche Vermutung.
- (c) In der Tat gibt es keinen Block von Defekt $\neq 1$, welcher einen Charakter von Defekt 1 enthält.

- (3) (i) Die gewöhnliche Charaktertafel von \mathcal{A}_4 hat folgende Gestalt.

	id	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	η	η^2
χ_3	1	1	η^2	η
χ_4	3	-1	0	0

Die zugehörigen Brauercharaktere $\varphi_1 := \chi_1|_{(\mathcal{A}_4)_{3'}}$, $\varphi_2 := \chi_2|_{(\mathcal{A}_4)_{3'}}$ und $\varphi_3 := \chi_3|_{(\mathcal{A}_4)_{3'}}$ sind aus Gradgründen irreduzibel. Wir erhalten die folgende 2-modulare Charaktertafel.

	id	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)
φ_1	1	1	1
φ_2	1	η	η^2
φ_3	1	η^2	η

- (ii) Die 2-modulare Charaktertafel von \mathcal{S}_4 entnehmen wir Aufgabe 17 (5).

	id	(1, 2, 3)
ψ_1	1	1
ψ_2	2	-1

Die Multiplizitäten der einfachen in den eingeschränkten Brauercharakteren schreiben wir in folgende Tafel.

	φ_1	φ_2	φ_3
$\psi_1 _{\mathcal{A}_4}$	1	0	0
$\psi_2 _{\mathcal{A}_4}$	0	1	1

- (iv) Die Zerlegungsmatrix von \mathcal{A}_4 bei 2 ist

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Cartanmatrix zu

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die (hier nicht unbedingt erforderlichen) zentralen Charaktere haben auf den $2'$ -Klassen folgende Werte.

	id	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)
χ_1	1	4	4
χ_2	1	4η	$4\eta^2$
χ_3	1	$4\eta^2$	4η
χ_4	1	0	0

Kongruenzen modulo 2 liefern genau einen Block, namentlich $R\mathcal{A}_4$. Dieser hat den Defekt 2.

- (a) Es hat \mathbf{C} das Elementarteilertupel $(1, 1, 4)$. Insbesondere tritt der Elementarteiler $2^{d(B_1)} = 4$ mit Vielfachheit 1 auf.
- (b) Es ist $|\text{Irr}(R\mathcal{A}_4)| = 4 \leq 1 + 2^{2d(R\mathcal{A}_4)}/4 = 5$.
Es ist $|\text{Irr}(B_1)| = 4 \leq 2^{d(B_1)} = 4$, es gilt also sogar die Brauersche Vermutung.
- (c) In der Tat gibt es keinen Block von Defekt $\neq 1$, welcher einen Charakter von Defekt 1 enthält.

- (4) (i) Die gewöhnliche Charaktertafel von \mathcal{A}_5 hat folgende Gestalt.

	id	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3, 4, 5)	(1, 2, 3, 5, 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	$-\xi - \xi^4$	$-\xi^2 - \xi^3$
χ_3	3	-1	0	$-\xi^2 - \xi^3$	$-\xi - \xi^4$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

Aus Gradgründen ist $\varphi_1 := \chi_1|_{(\mathcal{A}_5)_{2'}}$ irreduzibel. Da \mathcal{A}_5 perfekt ist, und also nur triviale Morphismen in abelsche Gruppen zuläßt, haben alle anderen irreduziblen Brauercharaktere einen Grad ≥ 1 .

Bezeichne allgemein Φ_i der zu φ_i gehörige unzerlegbar projektive Brauercharakter für $i \in [1, 4]$. Die 2-modulare Charaktertafel von \mathcal{S}_5 ist nach Aufgabe 17 (6) von folgender Gestalt.

	id	(1, 2, 3)	(1, 2, 3, 4, 5)
ψ_1	1	1	1
ψ_2	4	1	-1
ψ_3	4	-2	-1

Die 2-modulare projektive Charaktertafel von \mathcal{S}_5 ist nach Aufgabe 17 (6) von folgender Gestalt.

	id	(1, 2, 3)	(1, 2, 3, 4, 5)
Ψ_1	24	0	4
Ψ_2	8	2	-2
Ψ_3	16	-2	1

Hierbei gehöre jeweils Ψ_i zu ψ_i .

Einschränken auf \mathcal{A}_5 liefert folgende projektiven Charaktere.

	id	(1, 2, 3)	(1, 2, 3, 4, 5)	(1, 2, 3, 5, 4)
$\Psi_1 _{\mathcal{A}_5}$	24	0	4	4
$\Psi_2 _{\mathcal{A}_5}$	8	2	-2	-2
$\Psi_3 _{\mathcal{A}_5}$	16	-2	1	1

Es sind

$$\begin{aligned} (\Psi_1|_{\mathcal{A}_5}, \psi_1|_{\mathcal{A}_5})_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} &= 2 \\ (\Psi_1|_{\mathcal{A}_5}, \psi_2|_{\mathcal{A}_5})_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} &= 0 \\ (\Psi_1|_{\mathcal{A}_5}, \psi_3|_{\mathcal{A}_5})_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} &= 0. \end{aligned}$$

Da $\psi_1|_{\mathcal{A}_5} = \varphi_1$, und da jeder irreduzible Brauercharakter ungleich φ_1 als Konstituent in $\psi_2|_{\mathcal{A}_5}$ oder in $\psi_3|_{\mathcal{A}_5}$ auftritt, können wir folgern, daß in $\Psi_1|_{\mathcal{A}_5}$ nur Φ_1 als unzerlegbar projektiver Brauercharakter auftritt, und dies mit Multiplizität 2; cf. Aufgabe 24 (7). Es ist also $\Psi_1 = 2\Phi_1$ mit $\Phi_1 = (12022)$.

Da $(\Phi_1, \chi_2|_{(\mathcal{A}_5)_{2'}})_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} = 1$, tritt φ_1 einmal als Konstituent in $\chi_2|_{(\mathcal{A}_5)_{2'}}$ auf. Aus Gradgründen ist $\varphi_2 := \chi_2|_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} - \varphi_1 = (2 - 1 \xi^2 + \xi^3 \xi + \xi^4)$ irreduzibel.

Da $(\Phi_1, \chi_3|_{(\mathcal{A}_5)_{2'}})_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} = 1$, tritt φ_1 einmal als Konstituent in $\chi_3|_{(\mathcal{A}_5)_{2'}}$ auf. Aus Gradgründen ist $\varphi_3 := \chi_3|_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} - \varphi_1 = (2 - 1\xi + \xi^4 \xi^2 + \xi^3)$ irreduzibel.

Da nun $\psi_3|_{\mathcal{A}_5} = \varphi_2 + \varphi_3$, muß der verbliebene irreduzible Brauercharakter φ_4 in $\psi_2|_{\mathcal{A}_5}$ auftreten; cf. Aufgabe 24 (7).

Da $\varphi_4(1) \geq 2$, und da $\psi_2|_{\mathcal{A}_5}$ nicht durch 2 teilbar ist, kann φ_4 nur einmal in $\psi_2|_{\mathcal{A}_5}$ auftreten. Nun ist

$$\begin{aligned} (\Psi_3|_{\mathcal{A}_5}, \psi_1|_{\mathcal{A}_5})_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} &= 0 \\ (\Psi_3|_{\mathcal{A}_5}, \psi_2|_{\mathcal{A}_5})_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} &= 0 \\ (\Psi_3|_{\mathcal{A}_5}, \psi_3|_{\mathcal{A}_5})_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} &= 2. \end{aligned}$$

Also ist $\Psi_3|_{\mathcal{A}_5} = 0 \cdot \Phi_1 + a \cdot \Phi_2 + b \cdot \Phi_3 + 0 \cdot \Phi_4$ mit $a + b = 2$. Da $\Psi_3|_{\mathcal{A}_5}$ nicht durch 2 teilbar ist, folgt $\Psi_3|_{\mathcal{A}_5} = \Phi_2 + \Phi_3$.

Ferner ist

$$\begin{aligned} (\Psi_1|_{\mathcal{A}_5}, \psi_2|_{\mathcal{A}_5})_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} &= 0 \\ (\Psi_3|_{\mathcal{A}_5}, \psi_2|_{\mathcal{A}_5})_{(\mathcal{A}_5)_{2'}} &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $\varphi_4 = \psi_2|_{\mathcal{A}_5}$.

Die 2-modulare Charaktertafel von \mathcal{A}_5 hat also folgende Gestalt.

	id	(1, 2, 3)	(1, 2, 3, 4, 5)	(1, 2, 3, 5, 4)
φ_1	1	1	1	1
φ_2	2	-1	$\xi^2 + \xi^3$	$\xi + \xi^4$
φ_3	2	-1	$\xi + \xi^4$	$\xi^2 + \xi^3$
φ_4	4	1	-1	-1

- (ii) Die Zerlegung der Einschränkungen der irreduziblen Brauercharaktere der \mathcal{S}_5 nach \mathcal{A}_5 haben wir in (i) bereits durchgeführt. Die Multiplizitäten stehen in folgender Tafel.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$\psi_1 _{\mathcal{A}_5}$	1	0	0	0
$\psi_2 _{\mathcal{A}_5}$	0	0	0	1
$\psi_3 _{\mathcal{A}_5}$	0	1	1	0

- (iii) Wir bezeichnen zwecks Unterscheidung die irreduziblen Brauercharaktere der \mathcal{A}_4 mit $\tilde{\varphi}_i$ statt mit φ_i .

Die irreduziblen Brauercharaktere der \mathcal{A}_5 behalten dagegen ihre Namen φ_i .

Zunächst führen wir die Werte der Induzierten von \mathcal{A}_4 nach \mathcal{A}_5 an.

	id	(1, 2, 3)	(1, 2, 3, 4, 5)	(1, 2, 3, 5, 4)
$\tilde{\varphi}_1 _{\mathcal{A}_5}$	5	2	0	0
$\tilde{\varphi}_2 _{\mathcal{A}_5}$	5	-1	0	0
$\tilde{\varphi}_3 _{\mathcal{A}_5}$	5	-1	0	0

Insbesondere kann es also passieren, daß verschiedene irreduzibler Brauercharakter zu denselben Brauercharakteren hochinduzieren.

Die Multiplizitäten der einfachen in den induzierten Brauercharakteren schreiben wir in folgende Tafel.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$\tilde{\varphi}_1 _{\mathcal{A}_5}$	1	0	0	1
$\tilde{\varphi}_2 _{\mathcal{A}_5}$	1	1	1	0
$\tilde{\varphi}_3 _{\mathcal{A}_5}$	1	1	1	0

(iv) Die Zerlegungsmatrix von \mathcal{A}_5 bei 2 ist

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Cartanmatrix zu

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die (hier nicht unbedingt erforderlichen) zentralen Charaktere haben auf den $2'$ -Klassen folgende Werte.

	id	(1, 2, 3)	(1, 2, 3, 4, 5)	(1, 2, 3, 5, 4)
ω_1	1	20	12	12
ω_2	1	0	$4(-\xi - \xi^4)$	$4(-\xi^2 - \xi^3)$
ω_3	1	0	$4(-\xi^2 - \xi^3)$	$4(-\xi - \xi^4)$
ω_4	1	5	-3	-3
ω_5	5	-4	0	0

Kongruenzen modulo 2 zeigen, daß χ_1, χ_2, χ_3 und χ_5 zum ersten Block B_1 gehören; und daß χ_4 zum zweiten Block B_2 gehört. Die Zerlegungsmatrix zeigt dann, daß φ_1, φ_2 und φ_3 zum ersten Block B_1 gehören; und daß φ_4 zum zweiten Block B_2 gehört.

Es wird

$$\mathbf{D}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und

$$\mathbf{C}_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ferner ist $d(B_1) = 2$.

Es ist B_2 von Defekt 0.

Für den Block von Defekt 0 treffen die Aussagen (a, b, c) a priori zu.

- (a) Es hat \mathbf{C}_{B_1} das Elementarteilertupel $(1, 1, 4)$. Insbesondere tritt der Elementarteiler $2^{d(B_1)} = 4$ mit Vielfachheit 1 auf.
- (b) Es ist $|\text{Irr}(B_1)| = 4 \leq 1 + 2^{2d(R\mathcal{A}_4)}/4 = 5$.
Es ist $|\text{Irr}(B_1)| = 4 \leq 2^{d(B_1)} = 4$, es gilt also sogar die Brauersche Vermutung.
- (c) In der Tat gibt es keinen Block von Defekt $\neq 1$, welcher einen Charakter von Defekt 1 enthält.