G. Nebe, M. Künzer

Darstellungstheorie II, WS 06/07

Lösung 9

Aufgabe 29.

(1) Es operiert $c - 1 = d^{p^s} - 1 = (d-1)^{p^s}$ via X^{p^s} auf $U_k = F[X]/(X^k) = \langle X^0, \dots, X^k \rangle$ (auf die Kennzeichnung von Restklassen wurde verzichtet). Somit ist darin

$$\langle X^i \rangle_{FC} = \langle X^i, X^{i+p^s}, X^{i+2p^s}, \dots \rangle_F \ .$$

Es wird

$$U_k{\downarrow}_C \;=\; \bigoplus_{i \in [0, p^s - 1],\ i \leq k} \langle X^i \rangle_{FC} \ ,$$

da sich F-lineare Basen der Summanden zu einer F-linearen Basis von U_k zusammensetzen.

Sei $\ell(i) := 1 + \max\{z \in \mathbf{Z} \ : \ z \leq \frac{k-i-1}{p^s}\} = 1 + \lfloor \frac{k-i-1}{p^s} \rfloor$. Falls $\ell(i) \geq 1$, so ist $U'_{\ell(i)} \simeq \langle X^i \rangle_{FC}$ via $Y \longmapsto X^i$. Also ist

$$U_k{\downarrow}_C \;\simeq\; \bigoplus_{i \in [0, p^s - 1],\ \ell(i) \geq 1} U'_{\ell(i)}$$

eine Zerlegung in Unzerlegbare der gefragten Form.

Beachte noch, daß darin höchstens $p^s = [D : C]$ Summanden auftreten.

(2) Mit Mackey wird

$$U_k{\uparrow}^G{\downarrow}_D \;\simeq\; \bigoplus_{g \in D\backslash G/D} (U_k)^g{\downarrow}_{D^g \cap D}{\uparrow}^D \ .$$

Es zerfällt $(U_k)^g{\downarrow}_{D^g \cap D}$ genau wie $U_k{\downarrow}_{D \cap {}^gD}$ nach (1) in eine direkte Summe von höchstens $[D : D \cap {}^gD]$ Unzerlegbaren. Mit dem Greenschen Unzerlegbarkeitssatz aus Aufgabe 27 (5.ii) zerfällt also auch $(U_k)^g{\downarrow}_{D^g \cap D}{\uparrow}^D$ in eine Summe von höchstens $[D : D \cap {}^gD]$ Unzerlegbaren. Somit zerfällt $U_k{\uparrow}^G{\downarrow}_D$ in eine direkte Summe aus höchstens

$$\sum_{g \in D\backslash G/D} [D : D \cap {}^gD] \;=\; \sum_{g \in D\backslash G/D} |DgD| \;=\; [G : D]$$

Unzerlegbaren, da mit einer Betrachtung der Linksmultiplikationsoperation von D auf G/D mit dem Bahnenlemma

$$|DgD| \;=\; \frac{|D|}{|\mathrm{C}_D(gD)|} \;=\; \frac{|D|}{|D \cap {}^gD|}$$

folgt für alle $g \in G$.

(3) Zerlege $U_k{\uparrow}^G \;=\; \bigoplus_{i \in [1,m]} V_i$ mit V_i unzerlegbar stets. Zerlege $V_i{\downarrow}_D \;=\; \bigoplus_{j \in [1, n(i)]} W_{i,j}$ mit $W_{i,j}$ unzerlegbar stets, wobei $i \in [1, m]$. Es ist $n(i) \geq 1$ stets und also

$$m \;\leq\; \sum_{i \in [1,m]} n(i) \;=\; [G : D]$$

nach (2) unter Verwendung von Krull-Schmidt.

Folgendes Argument für (3), welches ohne (1) und (2) auskommt, kenne ich von A. Günther und M. Kirschmer.

Es operiert $d - 1$ auf U_k mit einem nilpotenten Jordanblock J. Also operiert $d - 1$ auf $U_k{\uparrow}^G$ mit $P \otimes J$ für eine bestimmte Permutationsmatrix P von Kantenlänge $[G : D]$. Da $P \otimes J$ nilpotent ist, hat sie das charakteristische Polynom $X^{|G|}$. Da ferner $\dim \mathrm{Kern}\left((P \otimes J)^i\right) = i \cdot [G : D]$ für $i \in [1, k]$ ist, erhalten wir $I \otimes J$ als Jordanform von $P \otimes J$, wobei I die Einheitsmatrix von Kantenlänge $[G : D]$ bezeichne. Zerfiele $U_k{\uparrow}^G$ in mehr als $[G : D]$ Summanden, so zerfiele die Jordanform $P \otimes J$ als Operationsmatrix eines Elementes des Gruppenrings in mehr als $[G : D]$ Blöcke. Da die Jordanform bis auf Permutation der Blöcke aber eindeutig festliegt, ist dies unmöglich.

Aufgabe 30.

(1) Die Implikationen von innen nach außen folgen direkt aus Satz 13.5.(i).

Zeigen wir $W \mid V{\downarrow}_H \implies W \simeq f(V)$. Mit 13.5.(i) ist $V{\downarrow}_H \simeq f(V) \oplus U$ mit $U = \mathrm{O}(\mathcal{Y})$. Also ist $W \simeq f(V)$ oder $W \mid U$. Wir müssen also noch letzteres ausschließen. Letzteres führte aber zu $\mathrm{vx}(W) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{Y} = \mathcal{A} \cap \mathcal{X} = \emptyset$, was nicht geht.

Zeigen wir $V \mid W{\uparrow}^G \implies W \simeq f(V)$. Mit 13.5.(i) ist $W{\uparrow}^G \simeq f^{-1}(W) \oplus U'$ mit $U' = \mathrm{O}(\mathcal{X})$. Also ist $V \simeq f^{-1}(W)$ oder $V \mid U'$. Letzterenfalls wäre aber $\mathrm{vx}(V) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{X} = \emptyset$, was nicht geht.

(2) Sei die gegebene kurz exakte Sequenz von RH-Moduln mit $E = (0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\pi} X'' \longrightarrow 0)$ bezeichnet.

Zerfällt E, d.h. gibt es eine RH-lineare Abbildung $X'' \xrightarrow{\sigma} X$ mit $\sigma\pi = 1$, dann zerfällt wegen $\sigma{\uparrow}^G \pi{\uparrow}^G = 1{\uparrow}^G = 1$ auch $E{\uparrow}^G$.

Sei umgekehrt $E{\uparrow}^G$ zerfallend.

Sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha X} & X{\uparrow}^G{\downarrow}_H \\ x & \longmapsto & x \otimes 1\,. \end{array}$$

Genauso $\alpha X''$. Es sind αX und $\alpha X''$ beide RH-linear. Für $x \in X$ ist ferner $x(\alpha X)(\pi{\uparrow}^G{\downarrow}_H) = x\pi \otimes 1 = x\pi(\alpha X'')$, und somit ist $(\alpha X)(\pi{\uparrow}^G{\downarrow}_H) = \pi(\alpha X'')$.

Es ist α eine "Transformation vom Funktor $\mathrm{id}_{RH\text{-Mod}}$ zum Funktor $(-){\uparrow}^G{\downarrow}_H$ ".

Sei

$$\begin{array}{ccc} X{\uparrow}^G{\downarrow}_H & \xrightarrow{\beta X} & X \\ x \otimes g & \longmapsto & \begin{cases} x \cdot g & \text{if } g \in H \\ 0 & \text{if } g \notin H\,. \end{cases} \end{array}$$

Genauso $\beta X''$. Es sind βX und $\beta X''$ beide RH-linear. Für $x \in X$ und $g \in G$ ist ferner

$$(x \otimes g)(\pi{\uparrow}^G{\downarrow}_H)(\beta X'') = \left\{ \begin{array}{ll} x\pi \cdot g & \text{if } g \in H \\ 0 & \text{if } g \notin H \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} (x \cdot g)\pi & \text{if } g \in H \\ 0 & \text{if } g \notin H \end{array} \right\} = (x \otimes g)(\beta X)\pi\,,$$

wobei die mittlere Gleichheit sich aus der RH-Linearität von π ergibt.

Es ist β eine "Transformation vom Funktor $(-){\uparrow}^G{\downarrow}_H$ zum Funktor $\mathrm{id}_{RH\text{-Mod}}$ ".

Beachte noch, daß $(\alpha X'')(\beta X'') = 1$.

Sei nun $\rho(\pi{\uparrow}^G) = 1$. Dann ist $(\rho{\downarrow}_H)(\pi{\uparrow}^G{\downarrow}_H) = 1$. Also ist

$$\begin{array}{rcl} \big((\alpha X'')(\rho{\downarrow}_H)(\beta X)\big)\pi & = & (\alpha X'')(\rho{\downarrow}_H)(\pi{\uparrow}^G{\downarrow}_H)(\beta X'') \\ & = & (\alpha X'')(\beta X'') \\ & = & 1\,. \end{array}$$

Die Eigenschaft, daß α mit π vertauscht, haben wir nun doch nicht gebraucht.

(3) Wir schreiben die Multiplikation auf M^g als $m \cdot y^g := my$, wobei $y \in P$, und wobei my das Produkt auf M bezeichne.

Ein Isomorphismus ist gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} M{\uparrow}^G & \xrightarrow{\sim} & M^g{\uparrow}^G \\ m \otimes x & \longmapsto & m \otimes g^{-1}x \\ m \otimes gx & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & m \otimes x \end{array}$$

Sobald gezeigt ist, daß beide Abbildungen wohldefiniert sind, erkennen wir auch unmittelbar, daß sie sich gegenseitig invertieren und daß sie RG-linear sind.

Wir zeigen, daß $m\otimes x \longmapsto m\otimes g^{-1}x$ wohldefiniert ist. Sei $y \in P$. Dann ist $my\otimes x \longmapsto my\otimes g^{-1}x = m\cdot y^g \otimes g^{-1}x = m\otimes y^g g^{-1}x = m\otimes g^{-1}yx$, und andererseits auch $m\otimes yx \longmapsto m\otimes g^{-1}yx$.

Wir zeigen, daß $m\otimes gx \longleftarrow\!\shortmid\, m\otimes x$ wohldefiniert ist. Sei $y\in P$. Dann ist $m\cdot y^g\otimes x \longmapsto m\cdot y^g\otimes gx = my\otimes gx = m\otimes ygx = m\otimes gy^g x$, und andererseits auch $m\otimes y^g x \longmapsto m\otimes gy^g x$.

Aufgabe 31.

(1) Sei $g \in G \setminus H$. Es ist $P^g \cap H$ eine p-Untergruppe von H. Da P eine normale p-Sylowuntergruppe in H ist, ist $P^g\cap H \subseteq P$, d.h. $P^g \cap H = P^g\cap H\cap P = 1$.

(2) Zunächst merken wir an, daß ein FG-Modul genau dann injektiv ist, wenn er projektiv ist. Denn sei P projektiv, i.e. Summand von $(FG)^k$ für geeignetes $k\geq 0$. Dann ist auch P^* projektiv, da Summand von $\big((FG)^k\big)^* \simeq FG^k$. Dann aber ist $P^{**}\simeq P$ injektiv. Analog, ist P injektiv, so ist P^* projektiv, und also ist auch $P^{**}\simeq P$ projektiv.

Seien M' und M'' zwei FG-Moduln.

Sei I ein injektiver FG-Modul. Sei eine kurz exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M\oplus I \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} s \\ t\end{smallmatrix}\right)} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

gegeben. Es ist t monomorph, und spaltet also auf. Isomorphe Ersetzung gibt

$$0 \longrightarrow M\oplus I \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} s_1 & s_2 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)} \tilde{M}\oplus I \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2\end{smallmatrix}\right)} M'' \longrightarrow 0$$

Da s_1 monomorph und I injektiv ist, faktorisiert

$$(M' \xrightarrow{s_2} I) \;=\; (M' \xrightarrow{s_1} \tilde{M} \xrightarrow{u} I)\,.$$

Wir erhalten folgenden Morphismus kurz exakter Sequenzen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "(1\,0)"'] & \tilde{M} \arrow[r, "w_1+uw_2"] \arrow[d, "(1\,u)"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'\oplus I \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} s_1 & s_2 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)"] & \tilde{M}\oplus I \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2\end{smallmatrix}\right)"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

In der Tat erkennen wir die nötigen Kommutativitäten. Ferner ist $s_1(w_1+uw_2) = s_1w_1+s_2w_2 = 0$. Ist umgekehrt $\tilde{m}\in\tilde{M}$ mit $\tilde{m}(w_1+uw_2) = 0$ gegeben, so wird $\left(\begin{smallmatrix}\tilde{m} & \tilde{m}u\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2\end{smallmatrix}\right) = 0$, und somit gibt es $m\in M$ und $i\in I$ mit $\left(\begin{smallmatrix}\tilde{m} & \tilde{m}u\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} m & i\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} s_1 & s_2 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\tilde{m} & \tilde{m}u\end{smallmatrix}\right)$, insbesondere ist $\tilde{m} = ms_1$.

Spaltet die obere kurz exakte Sequenz, so auch die untere.

Wir können also festhalten, daß es eine nichtspaltende kurz exakte Sequenz mit Kern M' und Cokern M'' gibt, falls es eine nichtspaltende kurz exakte Sequenz mit Kern $M'\oplus I$ und Cokern M'' gibt.

Mit dem hierzu dualen Argument sehen wir, daß es eine nichtspaltende kurz exakte Sequenz mit Kern $M'\oplus I$ und Cokern M'' gibt, falls es eine nichtspaltende kurz exakte Sequenz mit Kern $M'\oplus I$ und Cokern $M''\oplus P$ für einen projektiven FG-Modul P gibt.

Zusammengenommen gibt es also eine nichtspaltende kurz exakte Sequenz mit Kern M' und Cokern M'', falls es eine nichtspaltende kurz exakte Sequenz mit Kern $M'\oplus I$ und Cokern $M''\oplus P$ gibt.

Zur eigentlichen Aufgabe. Sei $0\to V_1\to V\to V_2\to 0$ eine nichtspaltende kurz exakte Sequenz. Dann ist $0\to V_1{\downarrow_H}\to V{\downarrow_H}\to V_2{\downarrow_H}\to 0$ nichtspaltend, da, wie in der Vorlesung bereits angemerkt, wegen der H-Projektivität aller RG-Modul auch die ursprüngliche kurz exakte Sequenz aufspalten würde. Nun ist aber $V_1\simeq U_1\oplus I$ mit einem injektiven – da projektiven – FH-Modul I; und $V_2\simeq U_2\oplus P$ mit einem projektiven FG-Modul P. Nach obigem gibt es auch eine nichtspaltende kurz exakte Sequenz mit Kern U_1 und Cokern U_2.

Für eventuellen späteren Gebrauch. Der Grund, warum (2) gilt, ist darin zu suchen, daß der Funktor Ext^1 auf FG-mod (in 2 Variablen, Werte in F-mod) über die stabile Kategorie $\underline{FG\text{-mod}}$ faktorisiert.

Aufgabe 32.

Wir schreiben $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$. Schreibe noch $\tilde{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$.

Es ist $|G| = |\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)| = p(p^2-1)$.

Bemerkung 1. *Sei $u \in \mathbf{F}_p^*$. Dann ist $\{x^2+uy^2 : x,\, y \in \mathbf{F}_p\} = \mathbf{F}_p$.*

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbf{F}_p^* \smallsetminus (\mathbf{F}_p^*)^2$.

Fall $u \notin (\mathbf{F}_p^*)^2$. Wir verwenden $\mathbf{F}_p = \{0\} \sqcup (\mathbf{F}_p^*)^2 \sqcup \varepsilon(\mathbf{F}_p^*)^2$.

Fall $u \in (\mathbf{F}_p^*)^2$. Ohne Einschränkung ist $u = 1$. Dank Multiplikation mit $(\mathbf{F}_p^*)^2$ genügt es zu zeigen, daß $\{x^2+y^2 : x,\, y \in \mathbf{F}_p\} \cap \varepsilon(\mathbf{F}_p^*)^2 \neq \emptyset$. Wäre dem nicht so, so wäre mit $\xi \in \{0\}\sqcup(\mathbf{F}_p^*)^2$ auch $\xi+1 \in \{0\}\sqcup(\mathbf{F}_p^*)^2$. Mit Induktion folgte $\mathbf{F}_p \subseteq \{0\} \sqcup (\mathbf{F}_p^*)^2$, was nicht der Fall ist. $\square$

Bemerkung 2. *Ist $A \in G$, so ist $\det\big(\mathrm{C}_{\tilde{G}}(A)\big)$ eine Untergruppe von $\mathbf{F}_p^*$. Ihre Ordnung d ist ein Teiler von $p-1$. Es ist $|A^G| = |A^{\tilde{G}}| \cdot \dfrac{d}{p-1}$. Insbesondere, ist $d = p-1$, so ist $A^G = A^{\tilde{G}}$.*

Beweis. Es ist

$$|A^G| \;=\; \frac{|G|}{|\mathrm{C}_G(A)|} \;=\; \frac{|\tilde{G}|}{|\mathrm{C}_{\tilde{G}}(A)|} \cdot \frac{[\mathrm{C}_{\tilde{G}}(A) : \mathrm{C}_G(A)]}{[\tilde{G} : G]} \;=\; |A^{\tilde{G}}| \cdot \frac{d}{p-1}\;.$$

$\square$

(1) Wir suchen zu jedem Element A in $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ einen Repräsentanten. Es ist $\chi_A(X) = X^2+aX+1$ mit $a \in \mathbf{F}_p$.

Fall X^2+aX+1 irreduzibel. Es gibt nach rationaler Normalformtheorie in diesem Fall nur eine Ähnlichkeitsklasse, und diese wird repräsentiert von $A_0 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a \end{smallmatrix}\right)$. Wir berechnen

$$\mathrm{C}_{\tilde{G}}(A_0) \;=\; \{\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ -v & u+av \end{smallmatrix}\right) \;:\; u,\, v \in \mathbf{F}_p\,,\; u^2+auv+v^2 \neq 0\}\;.$$

Da die Determinante eines solchen Elements gleich $u^2+auv+v^2 = (u+\frac{a}{2}v)^2 + (\frac{a^2}{4}+1)v^2$ ist, ist $|\det\big(\mathrm{C}_{\tilde{G}}(A_0)\big)| = p-1$, und also $A_0^G = A_0^{\tilde{G}}$ nach Bemerkung 2. Es liegt eine p'-Klasse vor, denn als Element von $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_{p^2})$ betrachtet, ist A_0 diagonalisierbar.

Fall $X^2+aX+1 = (X-b)(X-b^{-1})$ für ein $b \in \mathbf{F}_p^*$ mit $b^2 \neq 1$. Es gibt z.B. nach Jordanformtheorie in diesem Fall nur eine Ähnlichkeitsklasse, und diese wird repräsentiert von $A_0 := \left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{smallmatrix}\right)$. Wir berechnen

$$\mathrm{C}_{\tilde{G}}(A_0) \;=\; \{\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right) \;:\; u,\, x \in \mathbf{F}_p\,,\; ux \neq 0\}\;.$$

Da $|\det\big(\mathrm{C}_{\tilde{G}}(A_0)\big)| = p-1$, ist $A_0^G = A_0^{\tilde{G}}$ nach Bemerkung 2. Es liegt eine p'-Klasse vor.

Fall $X^2+aX+1 = (X-b)^2$ für ein $b \in \{-1,+1\}$. Es gibt nach Jordanformtheorie in diesem Fall zwei Ähnlichkeitsklassen.

Ähnlichkeitsklasse repräsentiert von $A_0 := \left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$. Hier ist $A_0^G = A_0^{\tilde{G}}$ einelementig. Es liegt eine p'-Klasse vor.

Ähnlichkeitsklasse repräsentiert von $A_1 := \left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$. Wir berechnen

$$\mathrm{C}_{\tilde{G}}(A_1) \;=\; \{\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right) \;:\; u,\, v \in \mathbf{F}_p\,,\; u \neq 0\}\;.$$

Somit ist $\det\big(\mathrm{C}_{\tilde{G}}(A_1)\big) = (\mathbf{F}_p^*)^2$. Also ist $|A_1^G| = \frac{1}{2}|A_1^{\tilde{G}}|$ nach Bemerkung 2. Es liegt keine p'-Klasse vor.

Wir behaupten, daß $A_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in A^{\tilde{G}} \smallsetminus A^G$. In der Tat ergibt sich aus $\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right) A_1 = A_2 \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right)$ die Bedingung $w = 0$ und $u = \varepsilon x$, und somit die Determinante $\varepsilon x^2 \neq 1$. Wir berechnen

$$\mathrm{C}_{\tilde{G}}(A_2) \;=\; \{\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right) \;:\; u,\, v \in \mathbf{F}_p\,,\; u \neq 0\}\;.$$

Somit ist $\det\big(\mathrm{C}_{\tilde{G}}(A_2)\big) = (\mathbf{F}_p^*)^2$. Also ist $|A_2^G| = \frac{1}{2}|A_2^{\tilde{G}}|$ nach Bemerkung 2. Es liegt keine p'-Klasse vor.

Wir haben insgesamt $p+4$ Konjugationsklassen in $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ gefunden. Die Anzahl der p'-Klassen unter diesen beträgt p.

(2, 3) Schreibe $g := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Sei $\mathbf{F}_p^* = \langle \alpha \rangle$. Schreibe $w := \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{smallmatrix}\right)$.

Sei $P = \langle g \rangle$. Sei $W = \langle w \rangle$. Es ist $H := \mathrm{N}_G(P) = \langle g \rangle \rtimes \langle w \rangle = P \rtimes W \simeq C_p \rtimes C_{p-1}$. Bezüglich G, H und P werden wir die Greenkorrespondenz anwenden.

Für $i \in [1, p-1]$ operiert g auf V_i via $X \longmapsto X + Y$ und $Y \longmapsto Y$. Es operiert w auf V_i via $X \longmapsto \alpha X$ und $Y \longmapsto \alpha^{-1} Y$.

Da $V_i\!\downarrow_P$ unzerlegbar ist, trifft dies auch auf $V_i\!\downarrow_H$ zu. Somit ist $V_i\!\downarrow_H$ bereits der Greenkorrespondent von V_i für $i \in [1, p-1]$. Schreibe $U_i := V_i\!\downarrow_H$.

Mit Aufgabe 31 (2) genügt es also, eine nichtzerfallende kurz exakte Sequenz von FH-Moduln anzugeben mit Kern U_{p-i-1} und Cokern U_i.

Wir folgen Alperin, *Local representation theory,* und klassifizieren zunächst die unzerlegbaren FH-Moduln. Schreibe $\otimes := \otimes_F$.

Bemerkung 1. *Sei A eine endlichdimensionale F-Algebra. Sei S ein einfacher A-Modul. Sei P der zugehörige unzerlegbar projektive A-Modul. Sei M ein (endlich erzeugter) A-Modul mit $M/M\mathrm{J}(A) \simeq S$. Dann gibt es einen Epimorphismus $P \longrightarrow M$.*

Beweis. Da P projektiv ist, gibt es einen Morphismus $P \longrightarrow M$ so, daß $\big(P \longrightarrow M \longrightarrow M/M\mathrm{J}(A)\big) = \big(P \longrightarrow P/P\mathrm{J}(P) \xrightarrow{\sim} M/M\mathrm{J}(A)\big)$. Mit Nakayama ist dieser epimorph. □

Bemerkung 2. *Sei A eine endlichdimensionale F-Algebra. Sei M ein A-Modul. Es ist $M\mathrm{J}(A)$ der Schnitt $\operatorname{rad} M$ aller maximalen echten Teilmoduln von A.*

Beweis. Sei $M' \subset M$ ein maximaler echter Teilmodul. Dann ist $(M/M')\mathrm{J}(A) = 0$, und also $M\mathrm{J}(A) \subseteq M'$. Somit ist $M\mathrm{J}(A) \operatorname{rad} \mathrm{M}$.

Es ist $M/M\mathrm{J}(A)$ als Modul über $A/\mathrm{J}(A)$ halbeinfach, und also dito über A. Also ist $\operatorname{rad}\big(M/M\mathrm{J}(A)\big) = 0$. Schreibe $M \xrightarrow{\varphi} M/M\mathrm{J}(A)$ für die Restklassenabbildung. Es ist $\operatorname{rad} M \subseteq \varphi^{-1}\big(\operatorname{rad}\big(M/M\mathrm{J}(A)\big)\big) = M\mathrm{J}(A)$. □

Lemma 3. *Sei M ein FH-Modul. Es ist $\mathrm{J}(FH) = \mathrm{J}(FP)FH = FH\mathrm{J}(FP) = FH(1-g) = (1-g)FH$.*

Beweis. Es ist $\mathrm{J}(FP)FH = FH\mathrm{J}(FP)$ ein Ideal in FH. Ferner ist $(\mathrm{J}(FP)FH)^k = \mathrm{J}(FP)^k FH$ für $k \geq 0$. Also ist $(\mathrm{J}(FP)FH)^k = 0$ für ein $k \geq 0$. Ferner ist $FH/FH\mathrm{J}(FP)\!\downarrow_P$ halbeinfach über FP. Da P eine p-Gruppe ist, ist folglich $FH/FH\mathrm{J}(FP)$ ein H/P-Modul. Da H/P eine p'-Gruppe ist, ist $FH/FH\mathrm{J}(FP)$ halbeinfach über $F(H/P)$, und somit auch halbeinfach über FH. Dies zeigt die ersten beiden Gleichheiten.

Bleibt zu zeigen, daß $\mathrm{J}(FP)$ als Ideal von $(1-g)$ erzeugt wird. Da dieses Ideal $(1-g^i)$ für alle $i \in [1, p-1]$ enthält, hat es Codimension 1 in FP. Ferner ist wegen $(1-g)^p = 0$ auch $(FP(1-g))^p = 0$. □

Sei S_1 der triviale eindimensionale FH-Modul. Sei Q_1 der zugehörige unzerlegbar projektive Modul. Dank Lemma 3 ist $Q_1\!\downarrow_P$ der zu $S_1\!\downarrow_P$ gehörige unzerlegbar projektive Modul. Dank Lemma 3 ist Q_1 einreihig mit $Q_1\mathrm{J}(FH)^k/Q_1\mathrm{J}(FH)^{k+1}$ eindimensional für alle $k \geq 1$, da dies für $Q_1\!\downarrow_P$ zutrifft. Schreibe $T := Q_1\mathrm{J}(FH)/Q_1\mathrm{J}(FH)^2$ und $Z := Q_1/Q_1\mathrm{J}(FH)^2$. Wir haben eine kurz exakte Sequenz

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow T \longrightarrow Z \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0\,.$$

Hierin ist Z nicht halbeinfach, da dies nach $(-)\!\downarrow_P$ nicht zutrifft. Insbesondere spaltet $(*)$ nicht auf.

Z wie “von Länge zwei”, T wie “twist”.

Beachte, daß die Operation $T \otimes -$ auf den FH-Moduln wegen $T^* \otimes T \simeq S_1$ von $T^* \otimes -$ bis auf Isomorphismus invertiert wird.

Sei S ein einfacher FH-Modul; schreibe $d := \dim_F S$. Sei Q der zugehörige unzerlegbar projektive Modul. Es ist $Q\!\downarrow_P \simeq (FP)^{d'}$ für ein $d' \geq 0$. Lemma 3 gibt durch einen Vergleich der Radikalquotienten, daß $d' = d$. Ferner zeigt Lemma 3, daß $\dim_F \big(Q\mathrm{J}(FH)^i / Q\mathrm{J}(FH)^{i+1}\big) = d$ für alle $i \in [0, p-1]$.

Lemma 4. *Jeder unzerlegbar projektive FH-Modul ist einreihig. Genauer, ist Q der projektive Deckel (i.e. Hülle) des einfachen Moduls S, so ergibt sich $Q\mathrm{J}(FH)^i / Q\mathrm{J}(FH)^{i+1} \simeq T^i \otimes S$ für alle $i \in [0, p-1]$, und $Q\mathrm{J}(FH)^p = 0$.*

Beweis. Bemerken wir zunächst, daß ein Modul, dessen Radikalschichten alle einfach sind, notgedrungen einreihig ist.

Zum Zwecke dieses Beweises kürzen wir $\mathrm{J} = \mathrm{J}(FH)$ ab.

Tensoriere $(*)$ mit S. Nun ist $S \otimes Z$ nicht halbeinfach. Denn sei $z \in Z$ mit $z(g-1) \neq 0$ gegeben, was existiert, da Z nicht halbeinfach ist; cf. Lemma 3. Sei $s \in \mathbf{S} \smallsetminus \{0\}$. Da S einfach ist, ist $S\!\downarrow_P$ halbeinfach, und mithin $sg = s$. Es wird $(z \otimes s)(g-1) = zg \otimes sg - z \otimes s = z(g-1) \otimes s \neq 0$. Speziell ist $(S \otimes Z)\mathrm{J} = S \otimes T$ und $(S \otimes Z)\mathrm{J}^2 = 0$.

Wir erhalten nach Bemerkung 1 einen Epimorphismus von Q nach $Z \otimes S$, und also einen Epimorphismus von $Q\mathrm{J}^i$ nach $(Z \otimes S)\mathrm{J}^i$ für $i \geq 0$. Insbesondere erhalten wir einen Epimorphismus von $Q\mathrm{J}/Q\mathrm{J}^2$ nach $S \otimes T$. Da beide von Dimension d sind, liegt ein Isomorphismus vor.

Sei X ein FH-Modul mit $X/X\mathrm{J}(H) \simeq S$. Dann gibt es einen Epimorphismus von $Q\mathrm{J}/Q\mathrm{J}^2 \simeq S \otimes T$ nach $X\mathrm{J}/X\mathrm{J}^2$. Also ist letzterer Modul Null oder isomorph zu $S \otimes T$.

Wenden wir diese Tatsache auf $X = Q\mathrm{J}$ an, mit $S \otimes T$ anstelle von S und $Q \otimes T$ anstelle von Q, so erhalten wir, daß $Q\mathrm{J}^2/Q\mathrm{J}^3$ Null oder isomorph zu $S \otimes T^{\otimes 2}$ ist. Und so fort. Da die Dimension jeder Radikalschicht von P gleich d ist, und da es davon p Stück gibt, erhalten wir das behauptete Resultat. □

Lemma 5. *Jeder unzerlegbare FH-Modul ist einreihig.*

Beweis. Sei M ein unzerlegbarer FH-Modul. Sei $U \subseteq V \subseteq M$ Teilmoduln so, daß V/U einreihig ist, und unter diesen einreihigen Subquotienten einer mit maximaler (Jordan-Hölder-)Länge; diese beträgt mindestens 1.

Sei $V' := V\mathrm{J}(FH)$. Da V/U nur einen maximalen echten Teilmodul hat, ist $U \subseteq V' \subseteq V$, und V/V' ist einfach; cf. Bemerkung 2. Sei Q der zu V/V' gehörige unzerlegbar projektive Modul. Mit Bemerkung 1 gibt es einen Epimorphismus $Q \longrightarrow V/U$. Wir heben diesen zu einem Morphismus $Q \longrightarrow V$; sei $\tilde{U}$ sein Bild. Es ist $\tilde{U}$ einreihig als epimorphes Bild von Q; cf. Lemma 4. Es ist

$$V/U \;\simeq\; (\tilde{U} + U)/U \;\simeq\; \tilde{U}/(\tilde{U} \cap U)\,.$$

Wäre $U \cap \tilde{U} \neq 0$, dann hätte $\tilde{U}$ größere Länge als V/U. Also ist $U \oplus \tilde{U} = V$. Es ist $\tilde{U}$ isomorph zu V/U und hat insbesondere dieselbe Länge. Also dürfen wir o.E. $U = 0$ voraussetzen.

Sei V'' der eindeutige minimale Teilmodul in V. Mit Bemerkung 2 ist $(V/V'')^* = V^*\mathrm{J}(FH)$, und also $V''^* = V^*/V^*\mathrm{J}(FH)$. Sei Q' der zum einfachen Modul V'' gehörige unzerlegbar projektive Modul. Bemerkung 1 liefert einen Epimorphismus $Q' \longrightarrow V^*$. Mit Q' projektiv heben wir diesen zu einem Morphismus $Q' \longrightarrow M^*$ und bezeichnen mit $(M/\tilde{V})^*$ sein Bild; dieses ist einreihig als epimorphes Bild von Q'; cf. Lemma 4. Es ist

$$V^* \;\simeq\; M^*/(M/V)^* \;\simeq\; \big((M/\tilde{V})^* + (M/V)^*\big)/(M/V)^* \;\simeq\; (M/\tilde{V})^*/\big((M/\tilde{V})^* \cap (M/V)^*\big)\,.$$

Wäre $(M/\tilde{V})^* \cap (M/V)^* \neq 0$, dann hätte $(M/\tilde{V})^*$ größere Länge als V^*. Also ist

$$M^* \;=\; (M/\tilde{V})^* \oplus (M/V)^*\,,$$

und folglich $\tilde{V} = 0$ und $V = M$. □

Der Beweis zu Lemma 5 zeigt, daß aus der Einreihigkeit aller unzerlegbar Projektiven (über einer Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe mit Koeffizienten in F, sagen wir) die Einreihigkeit aller Unzerlegbaren folgt.

Lemma 6. *Zu jedem einfachen FH-Modul S und jedem $\ell \in [1,p]$ gibt es bis auf Isomorphie genau einen unzerlegbaren Modul von Jordan-Hölder-Länge ℓ. Dieser ist Quotient des einreihigen projektiven Deckels von S. Alle unzerlegbaren FH-Moduln sind bis auf Isomorphie von dieser Gestalt.*

Beweis. Da mit Lemma 5 jeder unzerlegbare Modul einreihig ist, hat ein solcher insbesondere einen einfachen Kopf und ist somit Quotient eines unzerlegbar projektiven Moduls; cf. Bemerkung 1.

Umgekehrt ist bereits nach Lemma 4 jeder unzerlegbar projektive Modul einreihig von Länge p, und hat somit zu jedem $\ell \in [1,p]$ bis auf Isomorphie genau einen Quotienten von Länge ℓ. □

Zu (2). Es ist U_i unzerlegbar von (Jordan-Hölder-)Länge i, da $U_i{\downarrow}_P$ einreihig von Länge i ist; cf. Lemma 3. Sei U der Unzerlegbare mit demselben Kopf wie U_i. Da nach Lemma 6 beide Quotienten des projektiven Deckels dieses Kopfes sind, gibt es eine kurz exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow U \longrightarrow U_i \longrightarrow 0\,.$$

Da diese wegen U unzerlegbar nicht spaltet, bleibt zu zeigen, daß $X \simeq U_{p-1-i}$.

Nun ist der Kopf von U_i erzeugt von der Restklasse von X^{i-1}. Auf ihm operiert w also als α^{i-1} (und g trivial). Insbesondere ist der Kopf des Projektiven U_p der triviale eindimensionale Modul. In U_p operiert w auf $X^{p-2}Y$ via $\alpha^{p-3} = \alpha^{-2}$. Da Z von den Restklassen von X^{p-1} und $X^{p-2}Y$ erzeugt wird, operiert w also auf T via α^{-2}.

Sei A der eindimensionale Modul, auf welchem w via α operiert. Schreibe $A^* := A^{\otimes(-1)}$. Zum Beispiel ist $T \simeq A^{\otimes(-2)}$. Beachte, daß $A^{\otimes(p-1)} \simeq A^{\otimes 0}$ trivial ist.

Da auf dem Kopf von U_i und von U das Element w via α^{i-1} operiert, ist dieser Kopf isomorph zu $A^{\otimes(i-1)}$.

Der Kopf von X ist isomorph zu $U\mathrm{J}(FH)^i/U\mathrm{J}(FH)^{i+1}$ und nach Lemmata 4 und 6 somit isomorph zu

$$T^{\otimes i} \otimes A^{\otimes(i-1)} \;\simeq\; A^{\otimes -2i+(i-1)} \;\simeq\; A^{\otimes(p-i-1)-1}\,.$$

Da zudem die Länge von X gleich $p-1-i$ ist, ist in der Tat $X \simeq U_{p-1-i}$.

Es ist übrigens $U \simeq U_{p-1} \otimes A^{\otimes i}$.

Zu (3). Beachte, daß der Sockel von U_i von Y^{i-1} erzeugt wird, auf welchem w als α^{1-i} operiert. Somit ist der Sockel von U_i isomorph zu $A^{\otimes(1-i)}$.

Wir behaupten die Existenz einer kurz exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow U_{p+1-i} \xrightarrow{(f_1\ f_2)} \left(U_p \otimes A^{\otimes(i-1)}\right) \oplus A^{\otimes(1-i)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f_3 \\ -f_4\end{smallmatrix}\right)} U_i \longrightarrow 0$$

Daraus folgt dann die Behauptung, da der mittlere Term nicht zur Summe der äußeren beiden isomorph ist, wie man einer Betrachtung der Dimensionen der unzerlegbaren Summanden entnimmt.

Zu f_1. Da U_{p+1-i} und $U_p \otimes A^{\otimes(i-1)}$ denselben Sockel $A^{\otimes(i-1)}$ haben, gibt es einen Inklusionsmorphismus $U_{p+1-i} \xrightarrow{f_1} U_p \otimes A^{\otimes(i-1)}$.

Zu f_2. Da U_{p+1-i} den Kopf $A^{\otimes(1-i)}$ hat, gibt es einen Restklassenmorphismus $U_{p+1-i} \xrightarrow{f_2} A^{\otimes(1-i)}$.

Zu f_3. Da $U_p \otimes A^{\otimes(i-1)}$ und U_i denselben Kopf $A^{\otimes(i-1)}$ haben, gibt es einen Restklassenmorphismus $U_{p+1-i} \xrightarrow{f_3} U_i$.

Zu f_4. Da U_i den Sockel $A^{\otimes(1-i)}$ hat, gibt es einen Inklusionsmorphismus $A^{\otimes(1-i)} \xrightarrow{f_4} U_i$.

Beachte, daß $f_1 f_3 = f_2 f_4$, i.e. daß $(f_1\ f_2)\left(\begin{smallmatrix} f_3 \\ -f_4\end{smallmatrix}\right) = 0$. Da ferner f_1 monomorph ist, ist auch $(f_1\ f_2)$ monomorph; da f_3 epimorph ist, ist auch $\left(\begin{smallmatrix} f_3 \\ -f_4\end{smallmatrix}\right)$ epimorph. Aus Dimensionsgründen liegt also eine kurz exakte Sequenz vor. Diese spaltet nicht, da schon aus Dimensionsgründen keiner der unzerlegbaren Summanden des Mittelterms isomorph zu U_i ist.

(4) Repräsentanten der $5'$-Konjugationsklassen sind z.B. gegeben durch $g_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $g_2 := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$, $g_3 := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\end{smallmatrix}\right)$, $g_4 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ und $g_5 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$. Wir müssen die Eigenwerte ihrer Operationen von F nach R heben. Beachte, daß diese Eigenwerte der Operation von g_i immer $|\langle g_i\rangle|$-te Einheitswurzeln sind. Wir wählen uns primitive m-te Einheitswurzeln ζ_m in R so, daß $\zeta_m^d = \zeta_{m/d}$ für alle $d \mid m \mid |G|$.

Eine Rechnung ergibt folgende 5-modulare Charaktertafel von G, bezüglich der Anordnungen $(V_1, \dots, V_5)$ und $(g_1, \dots, g_5)$.

$$\mathbf{S} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Cartanmatrix ergibt sich nach Satz 13.13 bezüglich der Anordnungen $(P_1, \dots, P_5)$ und $(V_1, \dots, V_5)$ zu

$$\mathbf{C} \;=\; \begin{pmatrix} 2&0&1&0&0 \\ 0&3&0&1&0 \\ 1&0&3&0&0 \\ 0&1&0&2&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Wir haben also eine Einteilung in 3 Blöcke, $\{V_1, V_3\}$, $\{V_2, V_4\}$ und $\{V_5\}$, letzterer von Defekt 0. Aus $\mathbf{D}^{\mathrm{t}}\mathbf{D} = \mathbf{C}$, aus der Tatsache, daß die Einträge von $\mathbf{D}$ aus $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ sind und mit Beachtung der gefundenen Blockeinteilung ergibt sich bei geeigneter Anordnung der einfachen KG-Moduln

$$\mathbf{D} \;=\; \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Unter Zuhilfenahme einer gewöhnlichen Charaktertafel von G kann man so auch abermals die 5-modulare Charaktertafel verifizieren.