G. Nebe, M. Künzer Abgabe am Freitag, dem 13.07.07.

Gitter und Codes, SS 07

Blatt 13

Wir schreiben $\mathbf{H} := \{z \in \mathbf{C} \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$.

Aufgabe 55 (10 Punkte)

Sei $n \geq 1$. Sei $\tau \in \mathbf{H}$. Wähle $\arg\big((\tau/\mathrm{i})^{1/2}\big) \in (-\pi/4, +\pi/4)$.

(1) Definiere eine Funktion $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ durch $f(x) := \exp(-\pi\mathrm{i}\tau^{-1}xx^{\mathrm{t}})$. Zeige, daß sich ihre Fouriertransformierte $\hat{f} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ ergibt zu

$$\hat{f}(y) \;=\; (-\tau\mathrm{i})^{n/2}\exp\big(\pi\mathrm{i}\tau yy^{\mathrm{t}}\big) \ .$$

(2) Sei $\xi \in \mathbf{C}^n$ mit $\xi\xi^{\mathrm{t}} = 0$ gegeben. Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Definiere eine Funktion $g : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ durch $g(x) := (\xi x^{\mathrm{t}})^k \exp(-\pi\mathrm{i}\tau^{-1}xx^{\mathrm{t}})$. Zeige, daß sich ihre Fouriertransformierte $\hat{g} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ ergibt zu

$$\hat{g}(y) \;=\; (-\tau\mathrm{i})^{n/2}(-\tau)^k(\xi y^{\mathrm{t}})^k\exp\big(\pi\mathrm{i}\tau yy^{\mathrm{t}}\big) \ .$$

Aufgabe 56 (2+3+4 Punkte)

Sei L ein volles Gitter in $\mathbf{R}^{24}$. Bestimme die geraden unimodularen Obergitter von L. Es genüge, in jeder Bahn unter $\operatorname{Aut} L$ jeweils wenigstens einen Repräsentanten anzugeben.

(1) $L = \mathrm{A}_{12}^{\perp 2}$.

(2) $L = \mathrm{A}_{6}^{\perp 4}$.

(3) $L = \mathrm{E}_{7}^{\perp 2} \perp \mathrm{D}_{10}$.

Aufgabe 57 (3 Punkte)

Bezeichne $\mathcal{A}$ die Menge der Abbildungen von $\mathbf{H}$ nach $\mathbf{C}$. Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Zeige, daß

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \times & \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \Big(f & , & \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\Big) & \longmapsto & \Big(z \longmapsto (cz+d)^{-k} f\big(\tfrac{az+b}{cz+d}\big)\Big) \end{array}$$

eine Gruppenoperation von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ auf $\mathcal{A}$ definiert.