G. Nebe, M. Künzer Abgabe am 18.06.07.

Gitter und Codes, SS 07

Blatt 9

Sei $n \geq 2$. Sei $\mathbf{R}[X] = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Sei $L \subseteq \mathbf{R}^{1\times n}$ ein volles Gitter. Sei (o.E.) $\min L = 1$. Sei $\mathrm{S}(L) = T \sqcup (-T)$. Schreibe $s := |T|$.

Aufgabe 36 (4 Punkte)
Sei $f \in \mathbf{R}[X]$. Sei $\rho \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. Zeige, daß $\Delta\rho f = \rho\Delta f$.

Aufgabe 37 (6 Punkte)
Seien $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}^{1\times n}$. Zeige.

(1) Ist L stark eutaktisch, so ist $\sum_{x\in T}(x\alpha^{\mathrm{t}})(x\beta^{\mathrm{t}}) = \frac{s}{n}\alpha\beta^{\mathrm{t}}$.

(2) Ist L stark perfekt, so ist $\sum_{x\in T}(x\alpha^{\mathrm{t}})^3(x\beta^{\mathrm{t}}) = \frac{3s}{n(n+2)}(\alpha\alpha^{\mathrm{t}})(\alpha\beta^{\mathrm{t}})$.

(3) Ist L stark perfekt, so ist $\sum_{x\in T}(x\alpha^{\mathrm{t}})^2(x\beta^{\mathrm{t}})^2 = \frac{s}{n(n+2)}\big((\alpha\alpha^{\mathrm{t}})(\beta\beta^{\mathrm{t}}) + 2(\alpha\beta^{\mathrm{t}})^2\big)$.

Aufgabe 38 (8 Punkte)
Sei $G := \big(\mathrm{Spur}(x^{\mathrm{t}}xy^{\mathrm{t}}y)\big)_{x,y\in T} \in \mathbf{R}^{s\times s}$. Schreibe $r := \mathrm{rk}\, G$. Sei $J := (1)_{x,y\in T} \in \mathbf{R}^{s\times s}$.

(1) Sei $A \in \mathrm{Sym}_n^{>0}(\mathbf{R})$ positiv definit. Sei $k \geq 0$, und sei $M \in \mathbf{R}^{k\times n}$. Zeige, daß $\mathrm{rk}(MAM^{\mathrm{t}}) = \mathrm{rk}\, M$. Folgere, daß L genau dann perfekt ist, wenn $r = n(n+1)/2$.

(2) Sei L stark eutaktisch. Zeige, daß $GJ = JG = \frac{s}{n}J$.

(3) Sei L stark perfekt. Zeige, daß $G^2 = \frac{s}{n(n+2)}(2G + J)$. (Hinweis: Aufgabe 37 (3).)

(4) Sei L stark perfekt. Bestimme die Eigenwerte von G mitsamt Multiplizitäten in Abhängigkeit von r. Folgere, daß L perfekt ist.
(Hinweis: Diagonalisiere simultan. Dann Spur. Dann (1).)

Aufgabe 39 (6 Punkte)
Sei $2^{1/2}L$ ein ganzes Gitter. Sei L stark eutaktisch. Operiere $\mathrm{Aut}\, L$ transitiv auf $\mathrm{S}(L)$.

(1) Sei $\ell \geq 1$. Berechne $\sum_{x,\, y\, \in\, \mathrm{S}(L)}(xy^{\mathrm{t}})^{2\ell}$ in Abhängigkeit von ℓ, s und n.

(2) Sei $n = 8$, und sei L stark perfekt. Berechne s. Ist $\mathrm{S}(L)$ ein 6-Design?

(3) Sei $n = 6$, und sei L stark perfekt. Berechne s. Ist $\mathrm{S}(L)$ ein 6-Design?

Aufgabe 40 (6 Punkte)
Sei $n = 3$. Gib eine zerlegungsangepaßte Basis von $\mathcal{F}_{3,4} = \mathrm{Harm}_{3,4} \perp \omega\mathrm{Harm}_{3,2} \perp \omega^2\mathrm{Harm}_{3,0}$ an.

Aufgabe 41 (4 Punkte)

(1) Sei $f(X) \in \mathbf{R}[X]$, und sei $f(x) = f(y)$ für alle $x,\ y \in \mathbf{R}^{1\times n}$ mit $xx^{\mathrm{t}} = yy^{\mathrm{t}}$. Zeige, daß $f(X) \in \mathbf{R}[\omega] \subseteq \mathbf{R}[X]$.

(2) Sei $e \in \mathbf{R}^{1\times n} \smallsetminus \{0\}$ gegeben. Sei $f(X) \in \mathbf{R}[X]$, und sei $f(x) = f(y)$ für alle $x,\ y \in \mathrm{S}^{n-1}$ mit $xe^{\mathrm{t}} = ye^{\mathrm{t}}$. Zeige, daß $f(X) \in \mathbf{R}[\rho_e, \omega]$.