

Lösung 13

Aufgabe 55

Wir werden nicht allzusehr auf die in der Analysis benötigten Voraussetzungen Rücksicht nehmen.

Allgemein ist die Fouriertransformierte $\hat{h} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ zu einer Funktion $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ gegeben durch

$$\hat{h}(y) = \int_{\mathbf{R}^n} h(x) \exp(-2\pi i x y^t) dx .$$

(1) Nach Einsetzen der Definitionen wird behauptet, daß

$$\int_{\mathbf{R}^n} \underbrace{\exp(-\pi i \tau^{-1} x x^t)}_{= f(x)} \exp(-2\pi i x y^t) dx \stackrel{!}{=} (-\tau i)^{n/2} \exp(\pi i \tau y y^t) .$$

Die linke Seite können wir umformen zu

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-\pi i \tau^{-1} x x^t) \exp(-2\pi i x y^t) dx &= \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-\pi i \tau^{-1} x x^t - 2\pi i x y^t) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-\pi i x (\tau^{-1} x + 2y)^t) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \prod_{j \in [1, n]} \exp(-\pi i x_j (\tau^{-1} x_j + 2y_j)) dx \\ &= \prod_{j \in [1, n]} \left(\int_{\mathbf{R}} \exp(-\pi i x_j (\tau^{-1} x_j + 2y_j)) dx_j \right) \end{aligned}$$

Die rechte Seite können wir umformen zu

$$(-\tau i)^{n/2} \exp(\pi i \tau y y^t) = \prod_{j \in [1, n]} \left((-\tau i)^{1/2} \exp(\pi i \tau y_j^2) \right) .$$

Also können wir $n = 1$ annehmen und haben zu zeigen, daß

$$\int_{\mathbf{R}} \exp(-\pi i (\tau^{-1} x^2 + 2xy)) dx \stackrel{!}{=} (-\tau i)^{1/2} \exp(\pi i \tau y^2) .$$

Beachte, daß für $a \in \mathbf{R}_{>0}$ und $\rho, \sigma \in \mathbf{C}$ mit $\arg \sigma \in (-\pi/4, +\pi/4)$ ein Wechsel des Integrationsweges zeigt, daß

$$\int_{\sigma \mathbf{R} + \rho} \exp(-\pi t^2) dt = \int_{\mathbf{R}} \exp(-\pi t^2) dt = 1 ;$$

letzteres, da ein positives Resultat zu erwarten ist, und da sich mit einer Polarkoordinatensubstitution folgendes ergibt.

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbf{R}} \exp(-\pi t^2) dt \right)^2 &= \int_{\mathbf{R}^2} \exp(-\pi(s^2 + t^2)) d(s, t) \\ &= \int_{[0, 2\pi]} \int_{\mathbf{R}_{\geq 0}} \exp(-\pi r^2) r dr d\varphi \\ &= \int_{\mathbf{R}_{\geq 0}} \exp(-\pi r^2) (2\pi r) dr \\ &= \int_{\mathbf{R}_{\geq 0}} \exp(-u) du \\ &= 1 . \end{aligned}$$

Die Substitution $\tilde{x} = (\tau/i)^{-1/2} x + (\tau i)^{1/2} y$ gibt nach einem Wechsel des Integrationswegs wie eben bemerkt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \exp(-\pi i (\tau^{-1} x^2 + 2xy)) dx &= \exp(\pi i \tau y^2) \int_{\mathbf{R}} \exp(-\pi i (\tau^{-1} x^2 + 2xy + \tau y^2)) dx \\ &= \exp(\pi i \tau y^2) \int_{\mathbf{R}} \exp(-\pi ((\tau/i)^{-1/2} x + (\tau i)^{1/2} y)^2) dx \\ &= \exp(\pi i \tau y^2) (\tau/i)^{1/2} \int_{(\tau/i)^{-1/2} \mathbf{R} + (\tau i)^{1/2} y} \exp(-\pi \tilde{x}^2) d\tilde{x} \\ &= \exp(\pi i \tau y^2) (\tau/i)^{1/2} , \end{aligned}$$

wobei hierzu $\arg((\tau/i)^{1/2}) \in (-\pi/4, +\pi/4)$ zu wählen ist.

Cf. (8.8).

(2) Sei $p(X) \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$. Wir zeigen zunächst, daß sich für $g_0(x) := p(x) \exp(-\pi i \tau^{-1} x x^t)$ die Fouriertransformierte zu

$$\widehat{g}_0(x) = (-\tau i)^{n/2} \cdot p\left(-\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_n}\right) \exp(\pi i \tau y y^t)$$

ergibt.

Wir dürfen $p(X) = X^\ell$ annehmen, wobei ℓ ein Multiindex sei. Es wird

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^n} \overbrace{x^\ell \exp(-\pi i \tau^{-1} x x^t)} \exp(-2\pi i x y^t) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-\pi i \tau^{-1} x x^t) (-2\pi i)^{-|\ell|} \frac{\partial}{\partial y^\ell} \exp(-2\pi i x y^t) dx \\ &= (-2\pi i)^{-|\ell|} \frac{\partial}{\partial y^\ell} \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-\pi i \tau^{-1} x x^t) \exp(-2\pi i x y^t) dx \\ &\stackrel{(1)}{=} (-2\pi i)^{-|\ell|} \frac{\partial}{\partial y^\ell} ((-\tau i)^{n/2} \exp(\pi i \tau y y^t)) \\ &= (-\tau i)^{n/2} (-2\pi i)^{-|\ell|} \frac{\partial}{\partial y^\ell} \exp(\pi i \tau y y^t) . \end{aligned}$$

Wenden wir dies nun für $p(X) = (\xi_1 X_1 + \dots + \xi_n X_n)^k$ an. Wir erhalten als Fouriertransformierte

$$\begin{aligned} & \widehat{g}(y) \\ &= (-\tau i)^{n/2} \cdot (-1)^k \cdot \left(\frac{\xi_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \frac{\xi_n}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^k \exp(\pi i \tau y y^t) \\ &= (-\tau i)^{n/2} \cdot (-1)^k \cdot \left(\frac{\xi_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \frac{\xi_n}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{k-1} \tau \cdot \xi y^t \exp(\pi i \tau y y^t) \\ &= (-\tau i)^{n/2} \cdot (-1)^k \cdot \tau \cdot \left(\frac{\xi_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \frac{\xi_n}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{k-1} \xi y^t \exp(\pi i \tau y y^t) \\ &= (-\tau i)^{n/2} \cdot (-1)^k \cdot \tau \cdot \left(\frac{\xi_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \frac{\xi_n}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{2\pi i} \xi \xi^t + \xi y^t \cdot \tau \cdot \xi y^t\right) \exp(\pi i \tau y y^t) \\ &= (-\tau i)^{n/2} \cdot (-1)^k \cdot \tau^2 \cdot \left(\frac{\xi_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \frac{\xi_n}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{k-2} (\xi y^t)^2 \exp(\pi i \tau y y^t) \\ &= (-\tau i)^{n/2} \cdot (-1)^k \cdot \tau^2 \cdot \left(\frac{\xi_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \frac{\xi_n}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{k-3} \left(\frac{1}{2\pi i} \cdot 2(\xi \xi^t)(\xi y^t) + (\xi y^t)^2 \cdot \tau \cdot \xi y^t\right) \exp(\pi i \tau y y^t) \\ &= (-\tau i)^{n/2} \cdot (-1)^k \cdot \tau^3 \cdot \left(\frac{\xi_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \frac{\xi_n}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{k-3} (\xi y^t)^3 \exp(\pi i \tau y y^t) \\ &= \dots \\ &= (-\tau i)^{n/2} \cdot (-1)^k \cdot \tau^k \cdot (\xi y^t)^k \exp(\pi i \tau y y^t) . \end{aligned}$$

Cf. (8.25).

Aufgabe 56

Für ein ein volles Gitter L in \mathbf{R}^{24} sollen wir die geraden unimodularen Obergitter von L bestimmen. Es genügt hierbei, in jeder Bahn von $\text{Aut } L$ jeweils wenigstens einen Repräsentanten anzugeben.

Allgemeine Vorbemerkung. Ist M unimodular mit $L \subseteq M$, so ist $L \subseteq M = M^\# \subseteq L^\#$. Wir können also M als Gitter zwischen L und $L^\#$ suchen. Daher genügt es, die Untergruppe M/L von $L^\#/L$ zu bestimmen.

Wir können eine \mathbf{Q}/\mathbf{Z} -wertige Bilinearform auf $L^\#/L$ definieren durch

$$\begin{aligned} L^\#/L \times L^\#/L &\longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (x+L, y+L) &\longmapsto (x, y) + \mathbf{Z} , \end{aligned}$$

was wegen $(x, y) \in \mathbf{Z}$ für $x \in L^\#$ und $y \in L$ wohldefiniert ist.

Sei $L \subseteq M \subseteq L^\#$ ein Zwischengitter. Wir behaupten, daß $(M/L)^\perp = M^\#/L$. Sei hierzu $x \in L^\#$. Es ist $x+L$ genau dann in der linken Seite enthalten, wenn $(x+L, m+L) = 0 + \mathbf{Z}$ ist für alle $m \in M$; i.e. genau dann, wenn $(x, M) \subseteq \mathbf{Z}$; i.e. genau dann, wenn $x \in M^\#$. Dies zeigt die Behauptung.

Ist $|L^\# / L| \equiv_2 1$, so *behaupten* wir, daß aus L gerade und $L \subseteq M \subseteq M^\# \subseteq L^\#$ folgt, daß M gerade ist. Sei $m \in M$. Es gibt ein $s \in \mathbf{Z}$ mit $s \equiv_2 1$ und $s(m + L) = 0 + L$, i.e. $sm \in L$. Also wird $s^2(m, m) = (sm, sm) \in 2\mathbf{Z}$, und, da $(m, m) \in \mathbf{Z}$, also auch $(m, m) \in 2\mathbf{Z}$. Dies zeigt die *Behauptung*.

- (1) Es ist $L = A_{12}^{\perp 2}$. Es ist $L^\# / L \simeq \mathbf{F}_{13} \oplus \mathbf{F}_{13}$; vgl. Bem. vor (1.15). Die Bilinearform hat ihr Bild in $\frac{1}{13}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$, was wir mit \mathbf{F}_{13} identifizieren qua Multiplikation eines Repräsentanten mit 13. Als Grammatrix bezüglich der Standardbasis entsteht so I_2 .

Wir suchen Vektoren $(1 \ a) \in \mathbf{F}_{13}^{1 \times 2}$ mit $1 + a^2 = 0$. Es folgt $a \in \{\pm 5\}$. Somit finden wir 2 Gitter, das Urbild von $\langle (1 \ 5) \rangle_{\mathbf{F}_{13}}$ und das Urbild von $\langle (1 \ -5) \rangle_{\mathbf{F}_{13}}$ unter $L^\# \rightarrow L^\# / L$. Letzteres ist das Bild des ersteren unter dem Automorphismus von $L = A_{12} \perp A_{12}$, der die Einträge der beiden Summanden vertauscht, da $\langle (1 \ -5) \rangle_{\mathbf{F}_{13}} = \langle (5 \ 1) \rangle_{\mathbf{F}_{13}}$.

- (2) Es ist $L = A_6^{\perp 4}$. Es ist $L^\# / L \simeq \mathbf{F}_7^{\oplus 4}$; vgl. Bem. vor (1.15). Die Bilinearform hat ihr Bild in $\frac{1}{7}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$, was wir mit \mathbf{F}_7 identifizieren. Als Grammatrix bezüglich der Standardbasis entsteht so I_4 .

Wir suchen zweidimensionale Teilräume von $\mathbf{F}_{13}^{1 \times 4}$, auf die die Bilinearform zur Nullform eingeschränkt. Da $S_4 \leq \text{Aut } L = \text{Aut } A_6^{\perp 4}$, können wir nach Gaußvereinfachung und Spaltenvertauschung eine Basis eines solchen Teilraums als von den Zeilen von $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$ gegeben annehmen, für gewisse $a, b, c, d \in \mathbf{F}_7$.

Wegen der Orthogonalität der Zeilen zueinander gibt es ein $\lambda \in \mathbf{F}_7$ mit $c = -\lambda b$ und $d = \lambda a$. Da $a^2 + b^2 = -1$ und $(-\lambda b)^2 + (\lambda a)^2 = -1$, folgt $\lambda \in \{\pm 1\}$.

Die Rollen von a und b sind wegen $\text{Aut } L$ vertauschbar.

Fall $\lambda = +1$. Wir erhalten die möglichen Basen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm 2 & \pm 3 \\ 0 & 1 & \mp 3 & \pm 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm 2 & \mp 3 \\ 0 & 1 & \pm 3 & \pm 2 \end{pmatrix}.$$

Fall $\lambda = -1$. Wir erhalten die möglichen Basen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm 2 & \pm 3 \\ 0 & 1 & \mp 3 & \mp 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm 2 & \mp 3 \\ 0 & 1 & \mp 3 & \mp 2 \end{pmatrix}.$$

- (3) Es ist $L = E_7^{\perp 2} \perp D_{10}$.

Es ist $D_{10}^\# / D_{10} \simeq \mathbf{F}_2^{\oplus 2}$; vgl. Bem. vor (1.15). Schreiben wir

$$D_{10} = \left\{ \sum_{i \in [1, 10]} a_i e_i : a_i \in \mathbf{Z}, \sum_{i \in [1, 10]} a_i \equiv_2 0 \right\} \subseteq \mathbf{R}^{10},$$

so ist mit $h := \frac{1}{2} \sum_{i \in [1, 10]} a_i e_i$ eine Basis von $D_{10}^\# / D_{10}$ gegeben durch

$$(h + D_{10}, h + e_1 + D_{10}).$$

Bezüglich dieser Basis haben wir nach Identifikation von $\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ mit \mathbf{F}_2 als Grammatrix I_2 .

Es werden $(h, h) = 5/2$ und $(h + e_1, h + e_1) = 9/2$.

Da die $\det E_7 = 2$, ist $E_7^\# / E_7 \simeq \mathbf{Z}/2$.

Die Grammatrix von E_7 ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $E_7^\# / E_7$ erzeugt von $z := \frac{1}{2}(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)$. Es ist $(z, z) = 3/2$.

Schreibe z_1 für das z entsprechende Element im ersten Summanden E_7 von L , und z_2 für das im zweiten.

Nach Identifikation von $\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ mit \mathbf{F}_2 hat $E_7^\# / E_7$ als Grammatrix I_1 .

Insgesamt hat $L^\# / L \simeq \mathbf{F}_2^{1 \times 4}$ als Grammatrix I_4 .

Wir suchen nun einen zweidimensionalen Teilraum von $\mathbf{F}_2^{1 \times 4}$, auf den die Standardbilinearform auf die Nullform einschränkt.

Wir schreiben eine Basis dieses Teilraums als Zeilen einer Matrix in $\mathbf{F}_2^{2 \times 4}$. Diese dürfen wir als in Zeilenstufenform gegeben annehmen. Wir können alle Formen bis auf $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ ausschließen. Insbesondere tritt die Zeilenstufenform $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ nicht auf, da hier zwangsläufig $a = 1$ und $b = 1$ sein müßte, und dann aber die Zeilen nicht mehr orthogonal zueinander wären.

Da wir mittels eines Automorphismus von L auch noch die ersten beiden Spalten vertauschen dürfen, bleiben die folgenden beiden Möglichkeiten.

Fall $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir *behaupten*, daß das zugehörige Gitter gerade ist. Dazu müssen wir zeigen, daß alle Urbilder in $L^\#$ von Elementen unseres Teilraums von $L^\#/L$ gerade Quadratlänge haben.

Da das Urbild unseres Teilraums ganz (sogar unimodular) ist, genügt es, Urbilder eines \mathbf{Z} -linearen Erzeugendensystems unseres unimodularen Gitters als von gerader Quadratlänge nachzuweisen. Denn sind $x, y \in L^\#$ von gerader Quadratlänge und gehören demselben ganzen Gitter an, so wird $(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \in 2\mathbf{Z}$.

Ein solches Erzeugendensystem ist gegeben durch L , vereinigt mit je einem Urbild der beiden Zeilen unserer Matrix. Die Elemente von L haben gerade Quadratlänge.

Ein Urbild der ersten Zeile $(1 \ 0 \ 1 \ 0)$ ist durch $z_1 + h$ gegeben und hat

$$(z_1 + h, z_1 + h) = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 \equiv_2 0.$$

Ein Urbild der zweiten Zeile $(0 \ 1 \ 0 \ 1)$ ist durch $z_1 + (h + e_1)$ gegeben und hat

$$(z_1 + (h + e_1), z_1 + (h + e_1)) = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 6 \equiv_2 0.$$

Dies zeigt die *Behauptung*.

Fall $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Die zweite Zeile wird von $h + (h + e_1) \equiv_2 e_1$ repräsentiert, und $(e_1, e_1) = 1 \not\equiv_2 0$. Also ist das zugehörige unimodulare Gitter nicht gerade.

Aufgabe 57

Es bezeichnet \mathcal{A} die Menge der Abbildungen von \mathbf{H} nach \mathbf{C} . Gegeben ist $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$.

Wir wollen zeigen, daß

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) &\longrightarrow \mathcal{A} \\ \left(f, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \left(z \longmapsto (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \right) \end{aligned}$$

eine Gruppenoperation von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ auf \mathcal{A} definiert.

Da nicht $c = 0$ und $d = 0$ und da $c, d \in \mathbf{R}$, ist $cz + d \neq 0$ für alle $z \in \mathbf{H}$. Somit ist die Abbildung wohldefiniert.

Seien $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ gegeben. Es ist noch zu zeigen, daß das Resultat der Operation von

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

auf $f \in \mathcal{A}$ gleich dem der Operation von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, gefolgt von der Operation von $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ auf f ist.

Ersteres ist gleich

$$z \longmapsto ((ca' + dc')z + (cb' + dd'))^{-k} f\left(\frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}\right).$$

Um weiteres zu berechnen, lassen wir die Operation von $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ auf $\left(z \mapsto (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)$ los und erhalten in der Tat

$$\begin{aligned} z &\longmapsto (c'z + d')^{-k} \left(c \cdot \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d\right)^{-k} f\left(\frac{a \cdot \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \cdot \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d}\right) \\ &= (c(a'z + b') + d(c'z + d'))^{-k} f\left(\frac{a(a'z+b') + b(c'z+d')}{c(a'z+b') + d(c'z+d')}\right) \\ &= ((ca' + dc')z + (cb' + dd'))^{-k} f\left(\frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}\right). \end{aligned}$$