

## Lösung 9

Durchgehend ist  $L \subseteq \mathbf{R}^{1 \times n}$  ein volles Gitter mit  $\min L = 1$ . Wir schreiben  $S(L) = T \sqcup (-T)$  und  $s := |T|$ .

### Aufgabe 36

Es ist  $f \in \mathbf{R}[X]$  und  $\rho \in O_n(\mathbf{R})$ . Wir wollen zeigen, daß  $\Delta \rho f = \rho \Delta f$ .

Schreibe  $f_{X_i}(X) := \frac{\partial}{\partial X_i} f(X)$  für  $i \in [1, n]$ . Insbesondere bezeichnet  $f_{X_i}(X\rho)$  die Ableitung von  $f$  nach  $X_i$ , in welche statt  $X$  nun  $X\rho$  eingesetzt wird (erst ableiten, dann einsetzen). Dies ist von  $\frac{\partial}{\partial X_i} f(X\rho)$  zu unterscheiden – damit wird die Ableitung des Polynoms  $f(X\rho)$  nach  $X_i$  bezeichnet (erst einsetzen, dann ableiten).

Schreibe ferner  $\rho = (\rho_{i,j})_{i,j}$ . Es bezeichne  $\partial_{i,j}$  das Kroneckerdelta.

Für  $i \in [1, n]$  wird mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_i} f(X\rho) &= \sum_{j \in [1, n]} f_{X_j}(X\rho) \cdot (X_1 \rho_{1,i} + \cdots + X_n \rho_{n,i})_{X_i} \\ &= \sum_{j \in [1, n]} f_{X_j}(X\rho) \cdot \rho_{i,j} . \end{aligned}$$

Damit wird dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} f(X\rho) &= \sum_{j \in [1, n]} \frac{\partial}{\partial X_i} (f_{X_j}(X\rho)) \cdot \rho_{i,j} \\ &= \sum_{j \in [1, n]} \left( \sum_{k \in [1, n]} f_{X_j, X_k}(X\rho) \cdot \rho_{i,k} \right) \cdot \rho_{i,j} , \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned} \Delta \rho f &= \Delta(f(X\rho)) \\ &= \sum_{i \in [1, n]} \sum_{j \in [1, n]} \left( \sum_{k \in [1, n]} f_{X_j, X_k}(X\rho) \cdot \rho_{i,k} \right) \cdot \rho_{i,j} \\ &= \sum_{j \in [1, n]} \sum_{k \in [1, n]} f_{X_j, X_k}(X\rho) \cdot \sum_{i \in [1, n]} \rho_{i,k} \rho_{i,j} \\ &= \sum_{j \in [1, n]} \sum_{k \in [1, n]} f_{X_j, X_k}(X\rho) \cdot \partial_{k,j} \\ &= \sum_{j \in [1, n]} f_{X_j, X_j}(X\rho) \\ &= \rho \Delta f . \end{aligned}$$

Cf. (6.11).

### Aufgabe 37

Es sind  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ .

- (1) Sei  $L$  stark eutaktisch. Mit (6.22) und (6.23) ist  $\sum_{x \in T} (x\alpha^t)^2 = \frac{s}{n} \alpha \alpha^t$  für alle  $\alpha \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ . Setzen wir in diese Gleichung  $\xi\alpha + \eta\beta$  für  $\alpha$  ein, wobei  $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ , so ergibt sich

$$\xi^2 \left( \sum_{x \in T} (x\alpha^t)^2 \right) + 2\xi\eta \left( \sum_{x \in T} (x\alpha^t)(x\beta^t) \right) + \eta^2 \left( \sum_{x \in T} (x\alpha^t)^2 \right) = \frac{s}{n} (\xi^2 \alpha \alpha^t + 2\xi\eta \alpha \beta^t + \eta^2 \beta \beta^t) .$$

Dies ist eine Gleichung von Polynomen in  $\mathbf{R}[\xi, \eta]$ . Koeffizientenvergleich bei  $\xi\eta$  gibt

$$\sum_{x \in T} (x\alpha^t)(x\beta^t) = \frac{s}{n} \alpha \beta^t .$$

- (2, 3) Sei  $L$  stark perfekt. Mit (6.22) und (6.23) ist  $\sum_{x \in T} (x\alpha^t)^4 = \frac{3s}{n(n+2)} (\alpha \alpha^t)^2$  für alle  $\alpha \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ . Setzen wir in diese Gleichung  $\xi\alpha + \eta\beta$  für  $\alpha$  ein, wobei  $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\xi^4 \left( \sum_{x \in T} (x\alpha^t)^4 \right) + 4\xi^3\eta \left( \sum_{x \in T} (x\alpha^t)^3(x\beta^t) \right) + 6\xi^2\eta^2 \left( \sum_{x \in T} (x\alpha^t)^2(x\beta^t)^2 \right) \\ &+ 4\xi\eta^3 \left( \sum_{x \in T} (x\alpha^t)(x\beta^t)^3 \right) + \eta^4 \left( \sum_{x \in T} (x\beta^t)^4 \right) \\ &= \frac{3s}{n(n+2)} (\xi^4 (\alpha \alpha^t)^2 + 4\xi^2\eta^2 (\alpha \beta^t)^2 + \eta^4 (\beta \beta^t) + 4\xi^3\eta (\alpha \alpha^t)(\alpha \beta^t) + 4\xi\eta^3 (\alpha \beta^t)(\beta \beta^t) + 2\xi^2\eta^2 (\alpha \alpha^t)(\beta \beta^t)) . \end{aligned}$$

Dies ist eine Gleichung von Polynomen in  $\mathbf{R}[\xi, \eta]$ . Koeffizientenvergleich bei  $\xi^3\eta$  gibt

$$\sum_{x \in T} (x\alpha^t)^3 (x\beta^t) = \frac{3s}{n(n+2)} (\alpha\alpha^t)(\alpha\beta^t).$$

Koeffizientenvergleich bei  $\xi^2\eta^2$  gibt

$$\sum_{x \in T} (x\alpha^t)^2 (x\beta^t)^2 = \frac{s}{n(n+2)} ((\alpha\alpha^t)(\beta\beta^t) + 2(\alpha\beta^t)^2).$$

### Aufgabe 38

Wir schreiben  $G = (\text{Spur}(x^t x y^t y))_{x, y \in T} = ((xy^t)^2)_{x, y \in T}$  und  $r := \text{rk } G$ .

- (1) Sei  $A \in \text{Sym}_n^{>0}(\mathbf{R})$  positiv definit. Sei  $k \geq 0$ , und sei  $M \in \mathbf{R}^{k \times n}$ . Wir wollen zeigen, daß  $\text{rk}(MAM^t) = \text{rk } M$ . Hierzu zeigen wir, daß  $\text{Kern}(-)MAM^t = \text{Kern}(-)M$ . Es ist nur die Inklusion  $\subseteq$  zu zeigen. Sei  $xMAM^t = 0$ . Dann ist  $xMAM^t x^t = (xM)A(xM)^t = 0$ , und also, da  $A$  positiv definit ist,  $xM = 0$ .

Ist nun speziell  $A = I_s$  und  $M$  die Matrix, deren Zeilen die Koordinaten der Elemente von  $x^t x$  bezüglich einer Orthonormalbasis von  $\text{Sym}_n(\mathbf{R})$  enthält, wobei  $x$  die Menge  $T$  durchläuft, so wird  $G = MI_s M^t$ . Zu zeigen ist, daß  $L$  perfekt ist, was wiederum äquivalent ist zu  $\text{rk } M = n(n+1)/2$ . Mit der eben gemachten Beobachtung genügt es also,  $r = \text{rk } G = n(n+1)/2$  zu zeigen.

- (2) Es ist  $L$  stark eutaktisch. An Position  $(y, z) \in T \times T$  hat  $GJ$  den Eintrag  $\sum_{x \in T} (yx^t)^2$ . Da  $L$  stark eutaktisch ist, ist  $S(L)$  nach (6.29) ein 2-Design, so daß mit (6.22)

$$\sum_{x \in T} (yx^t)^2 = \frac{s}{n} y y^t = \frac{s}{n}$$

ist, wobei wir von  $y \in S(L)$  und  $\min L = 1$  Gebrauch gemacht haben. Es folgt  $GJ = \frac{s}{n} J$ .

Mithin ist auch  $JG = (G^t J^t)^t = (GJ)^t = \frac{s}{n} J^t = \frac{s}{n} J$ .

- (3) Nun ist  $L$  stark perfekt. An Position  $(y, z) \in T \times T$  hat  $G^2$  den Eintrag  $\sum_{x \in T} (yx^t)^2 (xz^t)^2$ . Da  $L$  stark perfekt ist, ist  $S(L)$  nach Definition (6.30) ein 4-Design, so daß mit Aufgabe 37 (3)

$$\sum_{x \in T} (yx^t)^2 (xz^t)^2 = \frac{s}{n(n+2)} ((yy^t)(zz^t) + 2(yz^t)^2) = \frac{s}{n(n+2)} (1 + 2(yz^t)^2)$$

entsteht. Wir lesen ab, daß  $G^2 = \frac{s}{n(n+2)} (J + 2G)$ .

- (4) Weiterhin ist  $L$  stark perfekt. Da  $GJ = JG$ , können wir  $G$  und  $J$  simultan diagonalisieren. Wir können also durchgehend  $G$  durch  $\tilde{G} := \text{diag}(g_1, \dots, g_s)$  und  $J$  durch  $\tilde{J} := \text{diag}(s, 0, \dots, 0)$  ersetzen.

Aus  $\tilde{G}\tilde{J} = \frac{s}{n}\tilde{J}$  entnehmen wir  $g_1 = \frac{s}{n}$ .

Aus  $\tilde{G}^2 = \frac{s}{n(n+2)}(\tilde{J} + 2\tilde{G})$  entnehmen wir  $g_i \in \{0, \frac{2s}{n(n+2)}\}$  für  $i \in [2, s]$ .

Auf der anderen Seite ist  $\text{Spur}(\tilde{G}) = \text{Spur}(G) = \sum_{x \in T} (xx^t)^2 = s$ . Somit muß

$$s = \text{Spur}(\tilde{G}) = \frac{s}{n} + (r-1) \frac{2s}{n(n+2)}$$

sein. Es folgt  $r-1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ , und also  $r = \frac{n^2+n}{2}$ .

### Aufgabe 39

Nach Voraussetzung ist nun  $2^{1/2}L$  ein ganzes Gitter, i.e.  $xy^t \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$  für alle  $x, y \in L$ . Ferner ist  $L$  stark eutaktisch, und  $\text{Aut } L$  operiert transitiv auf  $L$ .

Sei  $x_0 \in S(L)$ . Für  $x \in S(L)$  ist dann mit Cauchy-Schwarz  $|xx_0^t|^2 \leq |xx^t||x_0x_0^t| = 1$ , und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $x$  ein skalares Vielfaches von  $x_0$  ist, i.e. wenn  $x = \pm x_0$ . Also ist  $xx_0^t \in \{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1\}$ , und es ist  $xx_0^t = \pm 1$  genau dann, wenn  $x = \pm x_0$ .

Schreibe  $n_i := \{x \in S(L) : xx_0^t = i/2\}$  für  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Dann gelten zunächst die Gleichungen  $n_2 = 2$  und  $n_0 + n_1 + n_2 = 2s$ .

Da  $L$  stark eutaktisch ist, gilt ferner

$$\frac{2s}{n} = \frac{2s}{n} x_0 x_0^t = \sum_{x \in S(L)} (xx_0^t)^2 = \frac{1}{4} n_1 + n_2 .$$

Somit ist  $n_1 = 8 \left( \frac{s}{n} - 1 \right)$ .

(1) Da  $\text{Aut } L$  nach Voraussetzung transitiv auf  $S(L)$  operiert, wird

$$\sum_{x, y \in S(L)} (xy^t)^{2\ell} = 2s \sum_{x \in S(L)} (xx_0^t)^{2\ell} = 2s(2^{-2\ell} n_1 + n_2) = 2s \left( 2^{3-2\ell} \left( \frac{s}{n} - 1 \right) + 2 \right) .$$

(2) Es ist nun  $n = 8$ . Da  $L$  stark perfekt ist, gilt mit (6.22) und (1)

$$\frac{3s}{40} = \frac{2s \cdot 1 \cdot 3}{8 \cdot 10} (x_0 x_0^t)^2 = \sum_{x \in S(L)} (xx_0^t)^4 = 2^{-1} \left( \frac{s}{8} - 1 \right) + 2 ,$$

woraus  $s = 120$  folgt.

Nun ist  $S(L)$  nach (6.25) genau dann ein 6-Design, wenn

$$\sum_{x, y \in S(L)} (xy^t)^6 = \frac{(2s)^2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{8 \cdot 10 \cdot 12} .$$

Die linke Seite ist nach (1) gleich  $2s(2^{-3} \left( \frac{s}{8} - 1 \right) + 2) = 900$ . Die rechte Seite ist ebenfalls gleich 900. Also liegt sogar ein 6-Design vor.

Ein 8-Design liegt dagegen nicht mehr vor.

(3) Es ist nun  $n = 6$ . Da  $L$  stark perfekt ist, gilt mit (6.22) und (1)

$$\frac{s}{8} = \frac{2s \cdot 1 \cdot 3}{6 \cdot 8} (x_0 x_0^t)^2 = \sum_{x \in S(L)} (xx_0^t)^4 = 2^{-1} \left( \frac{s}{6} - 1 \right) + 2 ,$$

woraus  $s = 36$  folgt.

Wäre  $S(L)$  ein 6-Design, so wäre nach (6.22) und (1)

$$\frac{2s \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{6 \cdot 8 \cdot 10} (x_0 x_0^t)^3 = \sum_{x \in S(L)} (xx_0^t)^6 = 2^{-3} \left( \frac{s}{6} - 1 \right) + 2 .$$

Die linke Seite ist gleich  $\frac{9}{4}$ . Die rechte Seite ist gleich  $\frac{21}{8}$ . Also liegt kein 6-Design vor.

Man kann auch (6.25) heranziehen. Zur Widerlegung genügt aber, wie gesehen, (6.22).

Wegen (2.18) kann in (2)  $L = E_8$  sein, in (3)  $L = E_6$ . Cf. Tabelle vor (1.15).

#### Aufgabe 40

Wir erinnern daran, daß  $\text{Harm}_{3,m}$  als Kern von  $\mathcal{F}_{3,m} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{F}_{3,m-2}$  definiert war (wobei  $\mathcal{F}_{3,m-2} = 0$  falls  $m - 2 < 0$ ).

Es ist e.g.

$$(1)$$

eine Basis von  $\text{Harm}_{3,0}$ .

Es ist e.g.

$$(X_1 X_2, X_1 X_3, X_2 X_3, X_2^2 - X_3^2, X_1^2 - X_2^2)$$

eine Basis von  $\text{Harm}_{3,2}$ .

Es ist e.g.

$$(X_1^3 X_2 - 3X_1 X_2 X_3^2, X_1 X_2^3 - 3X_1 X_2 X_3^2, X_1^3 X_3 - 3X_1 X_2^2 X_3, X_1 X_3^3 - 3X_1 X_2^2 X_3, X_2^3 X_3 - 3X_1^2 X_2 X_3, X_2 X_3^3 - 3X_1^2 X_2 X_3, X_1^4 + X_2^4 - 6X_1^2 X_2^2, X_1^4 + X_3^4 - 6X_1^2 X_3^2, X_2^4 + X_3^4 - 6X_2^2 X_3^2)$$

eine Basis von  $\text{Harm}_{3,4}$ .

Eine zerlegungsangepaßte Basis von  $\mathcal{F}_{3,4} = \text{Harm}_{3,4} \perp \omega \text{Harm}_{3,2} \perp \omega^2 \text{Harm}_{3,0}$  ist daher e.g. gegeben durch

$$(X_1^3 X_2 - 3X_1 X_2 X_3^2, X_1 X_2^3 - 3X_1 X_2 X_3^2, X_1^3 X_3 - 3X_1 X_2^2 X_3, X_1 X_3^3 - 3X_1 X_2^2 X_3, X_2^3 X_3 - 3X_1^2 X_2 X_3, X_2 X_3^3 - 3X_1^2 X_2 X_3, X_1^4 + X_2^4 - 6X_1^2 X_2^2, X_1^4 + X_3^4 - 6X_1^2 X_3^2, X_2^4 + X_3^4 - 6X_2^2 X_3^2, \omega X_1 X_2, \omega X_1 X_3, \omega X_2 X_3, \omega(X_2^2 - X_3^2), \omega(X_1^2 - X_2^2), \omega^2).$$

## Aufgabe 41

- (1) Schreibe  $I_1$  für die Invarianzeigenschaft eines Polynoms  $g(X) \in \mathbf{R}[X]$ , für alle  $x, y \in \mathbf{R}^{1 \times n}$  mit  $xx^t = yy^t$  auch  $g(x) = g(y)$  zu haben.

Gilt  $I_1$  für  $g(X) \in \mathbf{R}[X]$ , und ist  $g|_{\langle e_1 \rangle_{\mathbf{R}}} = 0$ , dann ist  $g = 0$ . Denn für alle  $x \in \mathbf{R}^{1 \times n}$  gibt es ein  $\sigma \in O_n(\mathbf{R})$  mit  $x\sigma \in \langle e_1 \rangle_{\mathbf{R}}$ . Da dann  $xx^t = (x\sigma)(x\sigma)^t$ , wird also  $g(x) = g(x\sigma) = 0$ .

Betrachte nun ein  $f(X) \in \mathbf{R}[X]$ , welches  $I_1$  erfüllt.

Es ist  $f(X_1, 0, \dots, 0) = f(-X_1, 0, \dots, 0)$  wegen  $I_1$ , und also  $f(X_1, 0, \dots, 0) =: h(X_1^2) \in \mathbf{R}[X_1^2]$ .

Es erfüllt nun  $\omega$  und also auch  $h(\omega)$  die Eigenschaft  $I_1$ , und mithin auch  $f(X) - h(\omega)$ . Nun ist aber

$$(f(X) - h(\omega))|_{(x_1, 0, \dots, 0)} = f(x_1, 0, \dots, 0) - h(x_1^2) = 0$$

für  $x_1 \in \mathbf{R}$ . Gemäß Vorbemerkung ist also auch  $f(X) - h(\omega) = 0$ . Somit ist  $f(X) \in \mathbf{R}[\omega]$ .

- (2) Schreibe  $I_2(e)$  für die Invarianzeigenschaft eines Polynoms  $g(X) \in \mathbf{R}[X]$ , für alle  $x, y \in S^{n-1}$  mit  $xe^t = ye^t$  auch  $g(x) = g(y)$  zu haben.

Zunächst dürfen wir  $ee^t = 1$  annehmen, da  $I_2(e) \iff I_2(\lambda e)$  für  $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , und da  $\mathbf{R}[\rho_e, \omega] = \mathbf{R}[\rho_{\lambda e}, \omega]$ .

Wir haben zu zeigen, daß aus  $I_2(e)$  für  $f(X) \in \mathbf{R}[X]$  folgt, daß  $f(X) \in \mathbf{R}[\rho_e, \omega]$ .

Sei  $\sigma \in O_n(\mathbf{R})$ .

Es ist  $\sigma \rho_e = \rho_{e\sigma^t}$ , da für  $x \in \mathbf{R}^{1 \times n}$

$$\sigma \rho_e(x) = \rho_e(x\sigma) = e\sigma^t x^t \rho_{e\sigma^t}(x)$$

ist. Wegen  $\sigma\omega = \omega$  ist also  $\sigma \mathbf{R}[\rho_e, \omega] = \mathbf{R}[\rho_{e\sigma^t}, \omega]$ .

Ferner erfüllt  $g(X) \in \mathbf{R}[X]$  die Bedingung  $I_2(e)$  genau dann, wenn  $(\sigma g)(X)$  die Bedingung  $I_2(e\sigma^t)$  erfüllt. Denn erfüllt  $f(X)$  die Bedingung  $I_2(e)$ , so ist für alle  $x, y \in S^{n-1}$  mit  $x\sigma e^t = y\sigma e^t$  auch  $(\sigma g)(x) = g(x\sigma) = g(y\sigma) = (\sigma g)(y)$ . Mittels  $\sigma^{-1}$  erhält man auch die umgekehrte Implikation.

Da wir ein  $\sigma \in O_n(\mathbf{R})$  mit  $e\sigma^t = e_1$  wählen können, genügt es also, den Fall  $e = e_1$  zu betrachten.

Gilt  $I_2(e_1)$  für  $g(X) \in \mathbf{R}[X]$ , und ist  $g|_{\langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbf{R}}} = 0$ , dann ist  $g = 0$ . Denn für alle  $x \in \mathbf{R}^{1 \times n}$  gibt es ein  $\sigma \in \text{Stab}_{O_n(\mathbf{R})}(e_1)$  mit  $x\sigma \in \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbf{R}}$ . Da dann  $x e_1^t = (x\sigma) e_1^t$ , wird also  $g(x) = g(x\sigma) = 0$ .

Betrachte nun ein  $f(X) \in \mathbf{R}[X]$ , welches  $I_2(e_1)$  erfüllt.

Es ist  $f(X_1, X_2, 0, \dots, 0) = f(X_1, -X_2, 0, \dots, 0)$  wegen  $I_2(e_1)$ , und also  $f(X_1, X_2, 0, \dots, 0) =: k(X_1, X_2^2) \in \mathbf{R}[X_1, X_2^2]$ .

Es ist  $\mathbf{R}[X_1, X_2^2] = \mathbf{R}[X_1, X_1^2 + X_2^2]$  (als Teilringe von  $\mathbf{R}[X_1, X_2]$ ). Die Inklusion  $\subseteq$  folgt hierbei bereits aus der Tatsache, daß  $X_1^2 = (X_1^2 + X_2^2) - X_2^2$ . Schreibe  $k(X_1, X_2^2) = \tilde{k}(X_1, X_1^2 + X_2^2)$  für ein geeignetes Polynom  $\tilde{k}(Y_1, Y_2) \in \mathbf{R}[Y_1, Y_2]$ .

Es erfüllen  $X_1$  und  $\omega$ , und also auch  $\tilde{k}(X_1, \omega)$  die Bedingung  $I_2(e_1)$ , und mithin auch  $f(X) - \tilde{k}(X_1, \omega)$ . Nun ist aber

$$(f(X) - \tilde{k}(X_1, \omega))|_{(x_1, x_2, 0, \dots, 0)} = f(x_1, x_2, \dots, 0) - \tilde{k}(x_1, x_1^2 + x_2^2) = 0$$

für alle  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ . Gemäß Vorbemerkung ist also auch  $f(X) - \tilde{k}(X_1, \omega) = 0$ . Somit ist  $f(X) \in \mathbf{R}[X_1, \omega]$ .

Sind (1) und (2) Spezialfälle eines allgemeineren Sachverhaltes?