G. Nebe, M. Künzer Abgabe am 28.10.05.

Quadratische Formen, WS 05/06

Blatt 1

Aufgabe 1 (2+3+1 Punkte). Sei A ein kommutativer Ring, und sei $n \geq 1$. Sei $A^n \xrightarrow{f} A^n$ ein Endomorphismus, und sei $M \in A^{n\times n}$ seine beschreibende Matrix bezüglich der Standardbasis.

(1) Zeige, daß f genau dann ein Automorphismus ist, wenn $\det M$ invertierbar in A ist.

(2) Zeige, daß f genau dann injektiv ist, wenn $\det M$ kein Nullteiler in A ist.
(Hinweis: Oeljeklaus-Remmert, Lineare Algebra I, S. 232.)

(3) Gib ein Beispiel für einen Endomorphismus f, für welchen $\det M \neq 0$, aber für welchen f nicht injektiv ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $n \geq 1$. Sei $A = \mathbf{Z}$.

Sei $I_n := \mathbf{Z}^n$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt $b(e_i, e_j) = \partial_{i,j}$ (Kronecker) für $i, j \in [1, n]$.

Sei $A_{n-1} := \{\sum_{i\in[1,n]} x_i e_i \ : \ x_i \in \mathbf{Z},\ \sum_{i\in[1,n]} x_i = 0\} \subseteq I_n$, ausgestattet mit der von I_n eingeschränkten Bilinearform.

Sei $D_n := \{\sum_{i\in[1,n]} x_i e_i \ : \ x_i \in \mathbf{Z},\ \sum_{i\in[1,n]} x_i \equiv_2 0\} \subseteq I_n$, ausgestattet mit der von I_n eingeschränkten Bilinearform.

(1) Bestimme eine Basis von A_{n-1} und bezüglich dieser die Grammatrix.

(2) Für welche n ist A_{n-1} nichtausgeartet? Für welche n ist A_{n-1} regulär?

(3) Bestimme eine Basis von D_n und bezüglich dieser die Grammatrix.

(4) Für welche n ist D_n nichtausgeartet? Für welche n ist D_n regulär?

(5) Für welche $n \geq 1$ ist $A_n \simeq D_n$ (Isometrie)?

Aufgabe 3 (3+1 Punkte).

Sei A ein kommutativer Ring. Sei (E, b) ein bilinearer Modul mit E frei auf einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$. Für $i \in [1, n]$ sei d_i die Determinante der Grammatrix der auf $E_i := \langle v_1, \ldots, v_i\rangle$ eingeschränkten Bilinearform bezüglich der Basis $(v_1, \ldots, v_i)$. In anderen Worten, es ist d_i der i-te Hauptminor der Grammatrix von b bezüglich $(v_1, \ldots, v_n)$.

(1) Sei vorausgesetzt, daß d_i eine Einheit in A ist für alle $i \in [1, n]$. Zeige, daß es eine Basis von E gibt, bezüglich der die Grammatrix die Gestalt $\mathrm{diag}\left(d_1, \frac{d_2}{d_1}, \ldots, \frac{d_n}{d_{n-1}}\right)$ hat.

(2) Folgere damit, daß eine symmetrische Matrix $M \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mit ausschließlich positiven Hauptminoren positiv definit ist (wie aus der Linearen Algebra bekannt).