G. Nebe, M. Künzer Abgabe am 10.02.06.

Quadratische Formen, WS 05/06

Blatt 13

Aufgabe 46 (8 Punkte).

Sei (E, b) ein bilinearer $\mathbf{Z}$-Modul mit $\operatorname{rk} E \le 4$. Sei $\det E = 2$.

(1) Zeige, daß es $r,\ s,\ t\ \ge\ 0$ und ein Vorzeichen $\pm$ so gibt, daß

$$E\ \simeq\ \langle 1\rangle^{\perp r} \perp \langle -1\rangle^{\perp s} \perp \left\langle\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right\rangle^{\perp t} \perp \langle \pm 2\rangle\ ,$$

wobei das Vorzeichen wegen $\det E = 2$ von den Parametern s und t bestimmt wird.

(2) Gib Repräsentanten der Isometrieklassen von bilinearen $\mathbf{Z}$-Moduln mit $\operatorname{rk} E\ \le\ 4$ und $\det E = 2$ an.

Aufgabe 47 (4+8+4+2 Punkte).

(1) Seien $0 < a \le b$, und sei $0 \le c \le a/2$ in $\mathbf{Z}$.

(i) Zeige, daß das Minimum des $\mathbf{Z}$-Gitters $\left\langle\begin{smallmatrix} a & c \\ c & b\end{smallmatrix}\right\rangle$ gleich a ist.

(ii) Finde Parameter a, b und c so, daß die Hermite-Ungleichung aus (18.1) eine Gleichheit wird.

(2) Sei $p\ \ge\ 3$ prim, und sei (L, b) ein bilinearer $\mathbf{Z}_p$-Modul, gesehen als $\mathbf{Z}_p$-Gitter in $V := \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} L$. Sei $\det L \ne 0$.

(i) Sei $e \in L \smallsetminus \{0\}$ mit $\mathrm{v}_p(b(e,e)) =: i$ minimal. Zeige, daß $\mathrm{v}_p(b(f,f')) \ge i$ für $f,\ f'\ \in\ L$. Zeige, daß $\langle e\rangle_{\mathbf{Z}_p}$ scharf primitiv ist in $(L, p^{-i}b)$. Zerlege L entsprechend.

(ii) Zeige, daß es für $i \ge 0$ reguläre quadratische $\mathbf{Z}_p$-Moduln (L_i, b_i) gibt mit

$$(L, b)\ = \perp_{i\ge 0} (L_i, p^i b_i) \qquad\qquad (\textit{Jordanzerlegung})\ .$$

(iii) Sei $k \ge 0$ minimal mit $L_k \ne 0$. Zeige, daß für eine gegebene Jordanzerlegung

$$(L/(L\cap p^{k+1}L^{\#}),\ \overline{p^{-k}b})\ \simeq\ (L_k/pL_k,\ \bar{b}_k)$$

ist (jeweils induzierte Bilinearformen).

(iv) Zeige, daß bei zwei gegebenen Jordanzerlegungen

$$(L, b)\ = \perp_{i\ge 0} (L_i, p^i b_i)\ = \perp_{i\ge 0} (\tilde{L}_i, p^i \tilde{b}_i)$$

es für alle $i\ \ge\ 0$ eine Isometrie $L_i\ \simeq\ \tilde{L}_i$ gibt. (Hinweis: Spalte erstes L_i ab, dann Induktion über Rang. Verwende ohne Beweis den Satz von Witt für lokale Ringe, Kneser (4.4), um aus $L_i \simeq \tilde{L}_i$ zu folgern, daß $L_i^{\perp} \simeq \tilde{L}_i^{\perp}$.)

(3) Seien die bilinearen $\mathbf{Z}$-Moduln $E := \left\langle\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 32\end{smallmatrix}\right\rangle$ und $F := \left\langle\begin{smallmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8\end{smallmatrix}\right\rangle$ gegeben.

(i) Zeige, daß E und F nicht isometrisch sind.

(ii) Zeige, daß E und F im selben Geschlecht liegen.

(4) Seien die bilinearen $\mathbf{Z}$-Moduln $E := \left\langle\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8\end{smallmatrix}\right\rangle$ und $F := \left\langle\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4\end{smallmatrix}\right\rangle$ gegeben. Zeige, daß E und F nicht im selben Geschlecht liegen.