Clifford Algebren.

Sei A ein Körper und (E,q) ein regulärer oder halbregulärer quadratischer A-Vektorraum mit Basis $(e_1,\ldots,e_n)$ und $\mathcal{C}=\mathcal{C}(E,q)$ seine Clifford Algebra und $Z:=\mathcal{C}^{\mathcal{C}_0}$.

4.5 $\mathcal{C}=\mathcal{C}_0\oplus\mathcal{C}_1$

4.11 $\mathcal{C}$ hat Basis $(e_{i_1}\ldots e_{i_r}\mid 0\le r\le n$ und $1\le i_1<\ldots<i_r\le n)$.

4.14 $\mathcal{C}(E_1\perp E_2)\cong\mathcal{C}(E_1)\hat{\otimes}\mathcal{C}(E_2)$.

4.18 Ist $F:=E\perp\langle f\rangle$ mit $q(f)=a\neq 0$ dann ist $\mathcal{C}(E,-aq)\cong\mathcal{C}_0(F,q)$.

5.3 Es gibt einen eindeutigen Automorphismus $\alpha\in\mathrm{Aut}(Z)$ mit $\alpha(z)x=xz$ für alle $x\in E, z\in Z$.

4.21 Ist $n=\dim(E)=1$, so ist $Z=\mathcal{C}$ kommutativ, $\alpha=\mathrm{id}$.

4.23 (und 5.4) Ist $n=2$ dann hat $\mathcal{C}$ eine kanonische Involution. Es ist $\mathcal{C}$ eine zentral einfache A-Algebra und $Z=\mathcal{C}_0\cong A[X]/(X^2-X+c)$ wobei $4c-1=\det(e_1,e_2)$ und α ist die Einschränkung der kanonischen Involution. Weiter ist $Z=\langle z,\alpha(z)\rangle$ mit $(z-\alpha(z))^2=1-4c$.

5.7 Ist $E=E_1\perp E_2$ und $Z_i:=\mathcal{C}(E_i)^{\mathcal{C}_0(E_i)}$ so gilt $Z=\{z\in Z_1\otimes Z_2\mid(\alpha_1\otimes\gamma_2)(z)=(\gamma_1\otimes\alpha_2)(z)\}$ und $\alpha=(\alpha_1\otimes\gamma_2)_{|Z}$. Ist $Z_i\cong A[X]/(X^2-X+c_i)\subseteq\mathcal{C}_0(E_i)$ für $i=1,2$ und α_i die kanonische Involution von Z_i, so gilt $Z\cong A[X]/(X^2-X+c)$ mit $c=c_1+c_2-4c_1c_2$ und α ist die kanonische Involution von Z.

5.8 (a) Ist $n=2m$ gerade und $E=\perp_{i=1}^m E_i$ mit $E_i=\langle e_{2i-1},e_{2i}\rangle$, dann ist $Z=\langle 1,z\rangle\cong A[X]/(X^2-X+c)$ mit $z\in\mathcal{C}_0$, $z+\alpha(z)=1$, $z\alpha(z)=c$ und $(\alpha(z)-z)^2=1-4c=(-1)^m\det(e_1,\ldots,e_{2m})$ und $Z(\mathcal{C}(E))=A$.
(b) Ist $F=E\perp\langle e_{2m+1}\rangle$ mit E wie in (a) und $q(e_{2m+1})=a\neq 0$ so ist $Z(F):=\mathcal{C}(F)^{\mathcal{C}_0(F)}=\langle 1,t\rangle\cong A[X]/(X^2-b)$ mit $t\in\mathcal{C}_1(F)$ und $b=(-1)^m d'(e_1,\ldots,e_{2m+1})$. Weiter ist $\alpha=\mathrm{id}$, $Z(\mathcal{C}(F))=Z(F)$ und $Z(\mathcal{C}_0(F))=A$.

5.9 (a) Sei $(E,q)=(E_1,q_1)\perp(E_2,q_2)$ mit E_1 regulär von gerader Dimension $2m$. Dann ist

$$\mathcal{C}(E)=\mathcal{C}(E_1,q_1)\otimes\mathcal{C}(E_2,dq_2)$$

mit $d=(-1)^m\det(e_1,\ldots,e_{2m})$.
(b) Sei $(E,q)=(E_1,q_1)\perp(E_2,q_2)$ mit E_1 halbregulär von Dimension $2m+1$. Dann ist

$$\mathcal{C}_0(E)=\mathcal{C}_0(E_1,q_1)\otimes\mathcal{C}(E_2,dq_2)$$

mit $d=(-1)^m d'(e_1,\ldots,e_{2m+1})$.

5.10 (a) Ist $\dim(E)$ gerade, so ist $\mathcal{C}(E,q)$ ein Tensorprodukt von Quaternionenalgebren und $\mathcal{C}_0(E,q)=B\otimes Z$ mit $Z=Z(\mathcal{C}_0(E,q))$ und B ein Tensorprodukt von Quaternionenalgebren. Weiter ist $Z(\mathcal{C}(E,q))=A$.
(b) Ist $\dim(E)$ ungerade, so ist $\mathcal{C}_0(E,q)$ ein Tensorprodukt von Quaternionenalgebren und $\mathcal{C}(E,q)=\mathcal{C}_0(E,q)\otimes Z$ mit $Z=Z(\mathcal{C}(E,q))$. Weiter ist $Z(\mathcal{C}_0(E,q))=A$.