

Lösung 1

Aufgabe 1. Wir schreiben $M = (m_{i,j})_{i,j}$. Sei M' die Adjunkte von M , die an Position (i, j) den Eintrag $(-1)^{i+j} \det M_{j,i}$ hat, wobei $M_{j,i}$ aus M durch Streichen der j ten Zeile und der i ten Spalte hervorgeht. Nach der Cramerschen Regel ist $M'M = MM' = \det M \cdot E_n$.

- (1) Ist f nun ein Automorphismus, so sei g ein Inverses, und N die beschreibende Matrix von g . Es folgt $MN = 1$, und daraus $(\det M)(\det N) = \det(MN) = 1$.

Ist umgekehrt $\det M$ invertierbar, so ist $(\det M)^{-1}M'$ die inverse Matrix zu M , und also die beschreibende Matrix des inversen Endomorphismus.

- (2) Ist $\det M$ kein Nullteiler, so folgt für $v \in A^n$ aus $vM = 0$, daß $vMM' = (\det M) \cdot v = 0$, und also $v = 0$. Somit ist $f : v \mapsto vM$ injektiv.

Ist umgekehrt $\det M$ ein Nullteiler, so sei $x \in A$ mit $x \neq 0$ und $x(\det M) = 0$ gewählt. Sei $r \in [1, n]$ minimal mit $x \det X = 0$ für jede $r \times r$ -Untermatrix X von M , die also aus M durch Streichen von $n - r$ beliebigen Zeilen und $n - r$ beliebigen Spalten hervorgeht.

Ist $r = 1$, so ist $xM = 0$, und z.B. $(x, 0, \dots, 0) \neq 0$ ein Vektor, der von M annulliert wird und so die Injektivität von f widerlegt.

Sei nun $r \geq 2$ angenommen. Sei Y eine $(r - 1) \times (r - 1)$ -Untermatrix von M mit $x \det Y \neq 0$. Wähle die Einträge in einer in Y nicht auftretenden Zeile in den Spaltenpositionen von Y , um Y zu einer Untermatrix $Y' \in A^{r \times (r-1)}$ von M zu ergänzen. Für $i \in [1, n]$ sei $y_{(i)} \in A^{r \times 1}$ der aus den Einträgen von M der i ten Spalte und der Zeilenpositionen von Y' gebildete Spaltenvektor. Sei $Y'_{(i)} \in A^{r \times r}$ die um die Spalte $y_{(i)}$ rechts ergänzte Matrix Y' . Diese Matrix hat nun entweder eine Spalte doppelt, oder aber ist bis auf Permutation eine Untermatrix von M . Nach Wahl von r ist daher stets $x \cdot \det Y'_{(i)} = 0$.

Eine Entwicklung von $Y'_{(i)}$ nach der eben angefügten letzten Spalte liefert $d_i := \det Y_{(i)} = \sum_{z \in Z} m_{z,i} c_z$ für gewisse $c_z \in A$, wobei Z die Menge der in Y' auftretenden Zeilenpositionen bezeichne. Dabei gibt es ein $t \in Z$ mit $c_t = \pm \det Y$, und also $x c_t \neq 0$. Nun ist aber $x d_i = 0$ stets, und also $\sum_{z \in Z} (x c_z) m_{z,i} = 0$ stets, was eine nichttriviale Linearkombination der Nullzeile aus den Zeilen von M darstellt, wie zur Widerlegung der Injektivität von f erforderlich.

- (3) Sei z.B. $A = \mathbf{Z}/(4)$, $n = 1$ und f die Multiplikation mit 2. Dann ist $\det M = 2 \neq 0$, aber f ist wegen $f(2) = 0$ nicht injektiv.

Aufgabe 2.

- (1) Wir behaupten, daß $\underline{a} := (e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ eine Basis von A_{n-1} darstellt. Diese Zeilenvektoren in eine Matrix geschrieben, erhalten wir eine $(n - 1) \times n$ -Matrix in Zeilenstufenform ohne Nullzeile. Daher liegt ein linear unabhängiges Tupel vor. Wir müssen zeigen, daß es A_{n-1} erzeugt. Ist $\sum_{i \in [1, n]} x_i e_i$ mit $\sum_{i \in [1, n]} x_i = 0$ gegeben, so wird in der Tat

$$\sum_{i \in [1, n]} x_i e_i = \left(\sum_{i \in [1, n-1]} x_i (e_i - e_n) \right) + \underbrace{\left(\sum_{i \in [1, n]} x_i \right)}_{= 0} e_n,$$

und $e_i - e_n = \sum_{j \in [i, n-1]} (e_j - e_{j+1})$ ist im fraglichen Erzeugnis enthalten.

Nun ist $b(e_i - e_{i+1}, e_j - e_{j+1})$ gleich 2, falls $i = j$, gleich -1 , falls $|i - j| = 1$, und gleich 0 sonst. Also hat die Grammatrix die Gestalt

$$\text{Gram}(A_{n-1}, \underline{a}) = \underline{a} b_{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^{(n-1) \times (n-1)},$$

wobei alle unerwähnten Einträge gleich 0 seien.

Konstruktion bis auf eine das Quadrat einer Einheit gleich d_i ist. Ersetzung von w'_i durch ein Vielfaches w_i liefert also $E_{i-1} \perp \langle w_i \rangle = E_i$ mit $b(w_i, w_i) = d_i/d_{i-1}$. Bezüglich der Basis (w_1, \dots, w_n) ist die Grammatrix also von der Gestalt $\text{diag} \left(\frac{d_1}{d_0}, \frac{d_2}{d_1}, \dots, \frac{d_n}{d_{n-1}} \right)$.

Da sogar $w_i \in E_i$ liegt, bedeutet diese Feststellung für symmetrische Matrizen M in $A^{n \times n}$ folgendes. Ist der i -te Hauptminor d_i von M eine Einheit für alle $i \in [1, n]$, so gibt eine invertierbare untere Dreiecksmatrix S so, daß $SM S^t = \text{diag} \left(d_1, \frac{d_2}{d_1}, \dots, \frac{d_n}{d_{n-1}} \right)$.

- (2) Ist nun $A = \mathbf{R}$, und sind alle Hauptminoren von M positiv, so gibt es nach (1) eine invertierbare (untere Dreiecks-) Matrix S so, daß $SM S^t$ eine Diagonalmatrix D mit positiven Diagonaleinträgen ist. Ist $x \in \mathbf{R}^{1 \times n} \setminus \{0\}$, so folgt $xMx^t = (xS^{-1})D(xS^{-1})^t > 0$. Mithin ist M positiv definit.